УДК 517.977

Г.Ц. ЧИКРИЙ

О РАСТЯЖЕНИИ ВРЕМЕНИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ИМПУЛЬСНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

Аннотация. В развитие идей академика Б.Н. Пшеничного рассмотрена линейная дифференциальная игра сближения с импульсными управлениями. Предложена методика исследования, основанная на растяжении времени и ориентированная на ситуацию, когда классическое условие Понтрягина не имеет места. Получены достаточные условия конечности гарантированного времени сближения. Приведен иллюстративный пример.

Ключевые слова: функция растяжения времени, дифференциальная игра, импульсное управление, многозначное отображение, геометрическая разность Минковского, условие Понтрягина.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящается памяти моего учителя, выдающегося математика и кибернетика, академика НАН Украины Бориса Николаевича Пшеничного, которому в апреле 2017 года исполнилось бы 80 лет [1, 2]. Он является создателем украинской школы по необходимым условиям экстремума и теории дифференциальных игр. Обладая высочайшим аналитическим мастерством и исключительной интуицией, Б.Н. Пшеничный разработал ряд эффективных методов [3, 4], что принесло ему мировую известность.

Задачи, которые ставил Борис Николаевич перед своими учениками, нередко впоследствии перерастали в научные направления. Одно из них связано с эффектом запаздывания информации и принципом растяжения времени, а также их использованием при решении задач сближения с полной информацией, не поддающихся прямому применению известных методов [5–11].

В русле этого направления рассматривается линейная игровая задача о выводе траектории конфликтно-управляемого процесса на терминальное множество в случае, когда оно имеет цилиндрический вид [12], а противоборствующие стороны используют импульсные управления [13]. Задача усложняется еще и тем, что классическое условие Понтрягина, вообще говоря, не выполняется.

Процессы с импульсным управлением возникают, в частности, в космических исследованиях при рассмотрении задач типа коммивояжера, связанных с целераспределением и управлением движущимися объектами [14].

Предлагается метод решения задачи, основанный на использовании функции растяжении времени и позволяющий получить достаточные условия завершения игры за конечное гарантированное время.

Результаты иллюстрируются на модельном примере игры с динамикой математических маятников.

ПОСТАНОВКА ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ СБЛИЖЕНИЯ

Рассмотрим управляемую систему, динамика которой в евклидовом пространстве R^n описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = Az - u + v, \quad z(0) = z_0, \tag{1}$$

где A — квадратная матрица порядка n, $u = u(t)$ и $v = v(t)$ — векторы управления преследователя и убегающего соответственно.

Игра рассматривается с точки зрения преследователя, цель которого — с помощью выбора своего управления за конечное время вывести траекторию объекта из начального положения z_0 на заданное терминальное множество M^* при любом управлении убегающего. Множество M^* имеет цилиндрический вид:

$$M^* = M_0 + M,$$

где M_0 — линейное подпространство, M — непустой компакт из L — ортогонального дополнения к M^0 в R^n. Обозначим π оператор ортогонального проектирования из R^n в L.

Управления носят импульсный характер и выражаются с помощью дельта-функции Дирака [15]:

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta(t - \tau_i), \ \ \upsilon(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \upsilon_i \delta(t - \tau_i),$$

где векторы u_i, υ_i выбираются игроками в моменты времени τ_i, $\tau_i = ih$, $h > 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и принадлежат компактам U и V соответственно. Такие управления игроков будем называть допустимыми в игре.

Таким образом, в правую часть системы (1) аддитивно входят обобщенные функции. Согласно [16] при выбранных управлениях преследователя и убегающего решение системы (1) существует при любом начальном условии z_0, оно единственно и абсолютно непрерывно на объединении интервалов $(ih, (i+1)h)$, $i \in 0 \cup N$, N — множество натуральных чисел.

В частности, проекция решения системы (1) на L в фиксированный момент времени T при наличии скачков управления u_i, υ_i в моменты $\tau_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $u_i \in U$, $\upsilon_i \in V$, имеет вид

$$\pi z(T) = \pi e^{AT} z_0 - \sum_{i=0}^{n} \pi e^{A(n-i)h} u_i + \sum_{i=0}^{n} \pi e^{A(n-i)h} \upsilon_i, \tag{2}$$

$$n = \max\{i, i \in 0 \cup N : ih < T\}.$$

Будем считать, что описанная игра сближения может быть окончена в конечный момент T, если преследователь с помощью выбора скачков управления u_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, в моменты $\tau_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, может вывести траекторию игры (2) на терминальное множество M^* в момент времени T при любом допустимом управлении убегающего.

В первом прямом методе Л.С. Понтрягина [12], как и в основной схеме метода разрешающих функций [17], в качестве управлений преследователя применяются контруправления по Красовскому [18].

Далее будем использовать операцию геометрического вычитания множеств Минковского [12]

$$X \overset{*}{\_} Y = \{z : z + Y \subset X\} = \bigcap_{y \in Y} (X - y), \ \ X \in R^n, \ \ Y \in R^n.$$

Условие 1 (условие Понтрягина): $\pi e^{Aih} U \overset{*}{\_} \pi e^{Aih} V \neq \varnothing \ \ \forall i \in 0 \cup N$.

Это условие отражает преимущество преследователя над убегающим в ресурсах управления в терминах параметров игры. В работе [13] при выполнении условия 1 выведены достаточные условия завершения линейной дифференциальной игры с импульсными управлениями за конечное время на основе метода разрешающих функций [17].

В настоящей статье предлагается метод решения этой задачи в случае, если условие 1 не выполнено. Он основан на идее построения управления преследователя по управлению противника в прошлом [19] и является развитием принципа растяжения времени [10] для линейной дифференциальной игры с импульсными управлениями в рамках схемы первого прямого метода Л.С. Понтрягина [12] .

ФУНКЦИЯ РАСТЯЖЕНИЯ ВРЕМЕНИ. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОКОНЧАНИЯ ИГРЫ

Определение 1. Назовем $I(i)$, $i \in 0 \cup N$, функцией растяжения времени, если она принимает целые значения и удовлетворяет условиям: $I(0)=0$; $I(i)>0$, $I(i)>i$, $i \in N$; $I(i_1)>I(i_2)$, $i_1>i_2$.

Введем в рассмотрение многозначное отображение

$$W(i)=\pi e^{Aih}U \overset{*}{\underset{-}{}} \sum_{j=I(i)}^{I(i+1)-1} \pi e^{Ajh}V, \quad i \in 0 \cup N, \tag{3}$$

где $I(i+1)-1 \geq I(i)$, $i \in 0 \cup N$, как следует из определения функции $I(i)$.

Условие 2. Существует функция растяжения времени $I(i)$ такая, что

$$W(i) \neq \varnothing \quad \forall i \in 0 \cup N. \tag{4}$$

Теорема 1. Пусть в рассматриваемой игре выполнено условие 2, а также существует натуральное число $i_1 \in 0 \cup N$, при котором справедливо соотношение

$$\left(\pi e^{A(I(i_1)+1)h} z_0 - \sum_{i=0}^{I(i_1)-i_1-1} \pi e^{A(I(i_1)-i)h} U\right) \cap$$
$$\cap \left(M + \sum_{i=0}^{i_1} \left(\pi e^{Aih} U \overset{*}{\underset{-}{}} \sum_{j=I(i)}^{I(i+1)-1} \pi e^{Ajh} V\right)\right) \neq \varnothing \,. \tag{5}$$

Тогда из начального положения z_0 игра может быть завершена в момент времени $(I(i_1)+1)h$ при любом допустимом управлении противника.

Доказательство. Обозначим $i_0 = I(i_1)-i_1$. Очевидно, что $i_0 \geq 1$. Из условия 2 (см. (4)) и предположения (5) следует, что существуют векторы u_i^0, $u_i^0 \in U$, $i=0,1,2,\ldots,i_0-1$, точка m, $m \in M$, и селекторы $\omega(i)$, $\omega(i) \in W(i)$ (см. (3)), такие, что

$$\pi e^{A(I(i_1)+1)h} z_0 - \sum_{i=0}^{i_0-1} \pi e^{A(I(i_1)-i)h} u_i^0 = m + \sum_{i=0}^{i_1} \omega(i)\,. \tag{6}$$

Проекция решения (2) системы (1) на L в момент времени $(I(i_1)+1)h$ при фиксированных скачках управления u_i^0, $i=0,1,2,\ldots,i_0-1$, и произвольных векторах управления u_i, $u_i \in U$, $i=i_0, i_0+1,\ldots,I(i_1)$, и υ_i, $\upsilon_i \in V$, $i=0,1,2,\ldots,I(i_1)$, может быть записана следующим образом:

$$\pi z((I(i_1)+1)h)=$$
$$= \pi e^{A(I(i_1)+1)h} z_0 - \sum_{i=0}^{i_0-1} \pi e^{A(I(i_1)-i)h} u_i^0 - \sum_{i=i_0}^{I(i_1)} \pi e^{A(I(i_1)-i)h} u_i + \sum_{i=0}^{I(i_1)} \pi e^{A(I(i_1)-i)h} \upsilon_i\,. \tag{7}$$

Легко увидеть, что

$$\sum_{i=i_0}^{I(i_1)} \pi e^{A(I(i_1)-i)h} u_i = \sum_{i=0}^{i_1} \pi e^{A(i_1-i)h} u_{i_0+i}\,. \tag{8}$$

По аналогии с [20] представим последний член формулы (7) в виде двойной суммы:

$$\sum_{i=0}^{I(i_1)} \pi e^{A(I(i_1)-i)h} \upsilon_i = \sum_{i=0}^{i_1} \sum_{j=I(i_1)-I(i_1-(i-1))+1}^{I(i_1)-I(i_1-i)} \pi e^{A(I(i_1)-j)h} \upsilon_j . \qquad (9)$$

Для наглядности подробно распишем правую часть формулы (9):

$$\sum_{i=0}^{i_1} \sum_{j=I(i_1)-I(i_1-(i-1))+1}^{I(i_1)-I(i_1-i)} \pi e^{A(I(i_1)-j)h} \upsilon_j = \pi e^{AI(i_1)h} \upsilon_0 + \sum_{i=1}^{I(i_1)-I(i_1-1)} \pi e^{A(I(i_1)-j)h} \upsilon_j + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{j=I(i_1)-I(2)+1}^{I(i_1)-I(1)} \pi e^{A(I(i_1)-j)h} \upsilon_j + \sum_{j=I(i_1)-I(1)+1}^{I(i_1)} \pi e^{A(I(i_1)-j)h} \upsilon_j .$$

При вычислении первого члена внешней суммы ($i=0$) в левой части этого равенства учитывалось, что $I(i_1+1) = I(i_1)+1$ при фиксированном i_0.

Перепишем решение (7) с учетом формул (8), (9):

$$\pi z((I(i_1)+1)h) = \pi e^{AT} z_0 - \sum_{i=0}^{i_0-1} \pi e^{A(I(i_1)-i)h} u_i - \sum_{i=0}^{i_1} \pi e^{A(i_1-i)h} u_{i_0+i} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{i_1} \sum_{j=I(i_1)-I(i_1-(i-1))+1}^{I(i_1)-I(i_1-i)} \pi e^{A(I(i_1)-j)h} \upsilon_j . \qquad (10)$$

Пусть в моменты времени ih, $i=0,1,2,\ldots,i_0-1$, преследователь использует скачки управлений u_i^0. Предпишем преследователю в последующие моменты ih, $i=i_0$, $i_0+1,\ldots,I(i_1)$, $I(i_1)=i_0+i_1$, выбирать скачки управления из равенства

$$\pi e^{A(i_1-i)h} u_{i_0+i} = \sum_{j=I(i_1)-I(i_1-(i-1))+1}^{I(i_1)-I(i_1-i)} \pi e^{A(I(i_1)-j)h} \upsilon_j + \omega(i_1-i), \qquad (11)$$

где

$$\omega(i_1-i) \in W(i_1-i),\ W(i_1-i) = \pi e^{A(i_1-i)h} U \overset{*}{-} \sum_{j=I(i_1)-I(i_1-(i-1))+1}^{j=I(i_1)-I(i_1-i)} \pi e^{A(I(i_1)-j)h} V.$$

Как видим, первые векторы скачков u_i^0, $i=0,\ldots,\ i_0-1$, могут выбираться в начале игры. При выборе скачков управления в каждый последующий момент времени $(i_0+i)h$, $i=0,1,2,\ldots,i_1$, преследователь использует информацию о скачках управления противника в прошлом, начиная с момента времени $(I(i_1)-I(i_1-(i-1))+1)h$ до момента $(I(i_1)-I(i_1-i))h$ включительно.

Подставив формулу (11) в решение (10), с учетом равенства (6) получим, что $\pi z(I(i_1)+1) = m$, $m \in M$.

Таким образом, если преследователь выбирает управление описанным выше способом, то при любых допустимых управлениях убегающего игра будет завершена в конечный момент времени $(I(i_1)+1)h$. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть в рассматриваемой игре существует конечный момент времени T, при котором справедливо соотношение

$$\left(\pi e^{AT} z_0 - \sum_{i=0}^{I(i_1)-i_1-1} \pi e^{A(T-ih)}\, U \right) \cap$$

$$\cap \left(M + \sum_{i=0}^{i_1} \left(\pi e^{A(T-(I(i_1)-i)h)} U \overset{*}{-} \sum_{j=I(i)}^{I(i+1)-1} \pi e^{A(T-(I(i_1)-j)h)} V \right) \right) \neq \varnothing,$$

где $i_1 = \max\{i, i \in N: I(i)h < T\}$, а геометрическая разность предполагается непустой. Тогда из начального положения z_0 игра может быть завершена в момент времени T, $I(i_1)h < T \le (I(i_1)+1)h$, при любом допустимом управлении противника.

Следствие 2. Пусть в рассматриваемой игре терминальное множество является подпространством, т.е. $M^* = M_0$, выполнено условие 2, причем $0 \in W(i)$ $\forall i \in 0 \cup N$, и, кроме того, существует конечный момент времени T, $T > 0$, при котором справедливо соотношение:

$$\left(\pi e^{AT} z_0 - \sum_{i=0}^{I(i_1)-i_1-1} \pi e^{A(T-ih)} U \right) \cap \sum_{i=0}^{i_1} \left(\pi e^{Aih} U \overset{*}{-} \sum_{j=I(i)}^{I(i+1)-1} \pi e^{Ajh} V \right) \ne \varnothing,$$

где $i_1 = \max\{i,\ i \in N: I(i)h < T\}$.

Тогда преследователь может закончить игру в момент времени T, $I(i_1)h < T \le (I(i_1)+1)h$, при любом допустимом управлении противника.

Следует отметить, что для достижения своей цели преследователь строит свое управление способом, описанным при доказательстве теоремы 1.

ПРИМЕР

Рассмотрим задачу о встрече объектов второго порядка, имеющих динамику математических маятников:

$$\ddot{x} = -a^2 x + \rho u, \; x \in R^n, \tag{12}$$

$$\ddot{y} = -b^2 y + \sigma v, \; y \in R^n. \tag{13}$$

Здесь x и y — геометрические координаты объектов; u и v — векторы управления, $\| u \| \le 1$, $\| v \| \le 1$; ρ и σ — силовые коэффициенты; a и b — собственные частоты систем [21]; a, b, ρ, σ — положительные числа.

Заданы начальные положения и скорости объектов $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$.

С помощью стандартной замены переменных

$$z_1 = x,\; z_2 = \dot{x},\; z_3 = y,\; z_4 = \dot{y}$$

переходим от систем (12), (13) второго порядка к системе первого порядка вида (1):

$$\dot{z}_1 = z_2,$$

$$\dot{z}_2 = -a^2 z_1 + \rho u,$$

$$\dot{z}_3 = z_4,$$

$$\dot{z}_4 = -b^2 z_3 + \sigma v$$

с начальными условиями $z_1(0) = x_0$, $z_2(0) = \dot{x}_0$, $z_3(0) = y_0$, $z_4(0) = \dot{y}_0$.

Фундаментальная матрица новой системы имеет форму

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos at \cdot E & \frac{1}{a} \sin at \cdot E & O & O \\ -a \sin at \cdot E & \cos at \cdot E & O & O \\ O & O & \cos bt \cdot E & \frac{1}{b} \sin bt \cdot E \\ O & O & -b \sin bt \cdot E & \cos bt \cdot E \end{pmatrix},$$

где O и E — квадратные нулевая и единичная матрицы соответственно.

В преобразованной дифференциальной игре фазовым объектом является вектор $z=(z_1, z_2, z_3, z_4)$, а области управлений принимают вид

$$U=(O\ \rho S\ O\ O),\ V=(O\ O\ O\ \sigma S),$$

где S, $S\in R^n$, — шар единичного радиуса. Терминальным множеством в этой игре является подпространство M_0, $M_0 \in R^{4n}$:

$$M_0 = \{z=(z_1, z_2, z_3, z_4), z\in R^{4n}: z_1=z_3\},$$

а оператор проектирования имеет вид $\pi=(E\ O-E\ O)$. Если $\pi z(T)=0$, где $\pi z = z_1 - z_3$, то в момент времени T происходит встреча объектов.

Построим функцию растяжения времени $I(i)$, $i\in 0\cup N$, удовлетворяющую условию 2. Для рассматриваемой задачи это условие приобретает вид

$$\frac{\rho}{a}|\sin aih|S \overset{*}{-} \frac{\sigma}{b}\left|\sum_{j=I(i)}^{I(i+1)-1}\sin bjh\right| S\neq\varnothing,\ i\in 0\cup N. \tag{14}$$

Для выполнения условия (14) необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$\frac{\rho}{a}|\sin aih|\geq \frac{\sigma}{b}\left|\sum_{j=I(i)}^{I(i+1)-1}\sin bjh\right|,\ i\in 0\cup N. \tag{15}$$

Для наглядности подробно исследуем частный случай $h=\pi/2\alpha$. При нечетных i, т.е. при $i=1, 3, \ldots$, соотношение (15) сводится к неравенству

$$\frac{\rho}{a}\geq \frac{\sigma}{b}\left|\sum_{j=I(i)}^{I(i+1)-1}\sin bj\pi/2a\right|. \tag{16}$$

Легко увидеть, что

$$\left|\sum_{j=I(i)}^{I(i+1)-1}\sin bjh\right|\leq \sum_{j=I(i)}^{I(i+1)-1}|\sin bjh|\leq I(i+1)-I(i).$$

Поэтому если параметры игры связывает соотношение

$$\rho/a\geq\sigma/b, \tag{17}$$

то выбор

$$I(i+1)=I(i)+1,\ i=1, 3, \ldots, \tag{18}$$

обеспечивает выполнение неравенства (16).

Следуя определению функции растяжения времени, положим $I(0)=0$. При $i=0$ и четных значениях i левая часть неравенства (15) обращается в нуль, т.е. имеет место равенство

$$\sum_{j=I(i)}^{I(i+1)-1}\sin bj\frac{\pi}{2a}=0. \tag{19}$$

При подстановке $i=0$ в формулу (19) получим

$$\sum_{j=0}^{I(1)-1}\sin bj\frac{\pi}{2a}=0. \tag{20}$$

Выберем из натуральных чисел подходящее, т.е. удовлетворяющее равенству (20), значение $I(1)$ такое, что $I(1)-1>0$ ввиду свойств функции растяжения времени.

Предположим, что число $I(1)$ — нечетно. Тогда сумма в равенстве (20) состоит из $I(1)-1$ (четного) числа слагаемых. Выбор $I(1)$ из равенства

$$b(I(1)-1)\frac{\pi}{2a}=2\pi$$

обращает эту сумму в нуль ввиду симметричности функции синуса. Таким образом,

$$I(1)=1+4a/b \tag{21}$$

удовлетворяет равенству (20). Поскольку $I(1)$ — нечетное число, то число $4a/b$ должно быть четным натуральным числом и, следовательно, должно выполняться ограничение на параметры игры:

$$2a/b\in N. \tag{22}$$

Случай, когда $I(1)$ — четное, здесь не рассматривается, так как его вычисление не представляется возможным.

Аналогично рассуждая, можно показать, что при четных значениях i, $i\in N$ ($i=2,4,...$), равенство (19) выполняется для чисел $I(i)$, удовлетворяющих равенству

$$b(I(i+1)-I(i))\frac{\pi}{2a}=2\pi\,.$$

Осюда получаем

$$I(i+1)=I(i)+4a/b\,,\ i=2,4,\ldots \tag{23}$$

Предположим, что выполнены условия относительно параметров игры (17), (22). Тогда формулы (18), (21), (23) полностью определяют функцию $I(i)$, $i\in 0\cup N$, удовлетворяющую соотношению (15) и, следовательно, условию (14).

Последовательно примененяя эти формулы, получаем

$$I(0)=0\,,\ I(1)=1+4a/b,\ I(2)=2+4a/b\,,\ I(3)=2+8a/b\,,\ I(4)=3+8a/b\,,\ \ldots$$

Таким образом, построенная функция $I(i)$, $i\in 0\cup N$, удовлетворяет всем требованиям, перечисленным в определении функции растяжения времени.

Покажем, что при любых начальных положениях объектов $(x_0,\dot{x}_0)$, $(y_0,\dot{y}_0)$, $\|x_0-y_0\|>0$, преследователь, строя свое управление описанным в доказательстве теоремы способом, может гарантированно осуществить встречу объектов в некоторый конечный момент времени T. Пусть в моменты времени $\frac{\pi}{2a}\,i$, $i=0,1,\ldots,i_0-1$, преследователь не использует скачки управления, т.е. $u_i^0\equiv 0$. Тогда, как вытекает из следствия 2, для доказательства этого утверждения достаточно убедиться в существовании момента времени T, при котором имеет место неравенство

$$\left\|\sin aT\cdot x_0-\sin bT\cdot y_0+\frac{1}{a}\cos aT\cdot\dot{x}_0-\frac{1}{b}\cos bT\cdot\dot{y}_0\right\|\le$$

$$\le\left|\sum_{k=0}^{i_1}\left(\frac{\rho}{a}\sin\left(ak\frac{\pi}{2a}\right)-\frac{\sigma}{b}\sum_{j=I(k)}^{I(k+1)-1}\sin\left(bj\frac{\pi}{2a}\right)\right)\right|, \tag{24}$$

где $i_1=\max\{i,\, i\in 0\cup N\colon ih<T\}$.

Нетрудно увидеть, что левая часть этого неравенства сверху ограничена величиной

$$\|x_0\|+\|y_0\|+\frac{1}{a}\|\dot{x}_0\|+\frac{1}{b}\|\dot{y}_0\|.$$

Как следует из построения функции $I(i)$, $i \in 0 \cup N$, и предположения (17), его правая часть имеет вид суммы:

$$\sum_{k=1}^{i} \left(\frac{\rho}{a} - \frac{\sigma}{b} \right) \left[\frac{k+1}{2} \right],$$

где $[\cdot]$ означает целую часть числа.

По мере роста i, $i \in N$, при его четных значениях эта сумма остается неизменной, а при каждом нечетном значении увеличивается на положительное число $\frac{\rho}{a} - \frac{\sigma}{b}$ (см. (17)), стремясь к бесконечности при $i \to +\infty$. Поэтому существует конечный момент времени T, при котором выполняется неравенство (24), что означает встречу объектов (12), (13): $x(T) = y(T)$, где $I(i_1)\frac{\pi}{2a} \le T < (I(i_1)+1)\frac{\pi}{2a}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье получены достаточные условия окончания линейной дифференциальной игры с импульсными управлениями на основе принципа растяжения времени без предположения о выполнении условия Понтрягина. При этом указан способ построения управляющего воздействия, приводящего к цели. В приведенном иллюстративном примере эти условия принимают вид простых ограничений на параметры игры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Чикрий А.А. О научном наследии Б.Н. Пшеничного. *Кибернетика и системный анализ.* 2002. № 2. С. 3–32.
2. Сергиенко И.В., Чикрий А.А. О развитии научных идей Б.Н. Пшеничного в области оптимизации и математической теории управления. *Кибернетика и системный анализ.* 2012. Т. 50, № 2. С. 3–28.
3. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. Москва: Наука, 1980. 330 с.
4. Пшеничный Б.Н. Остапенко В.В. Дифференциальные игры. Киев: Наук. думка, 1992. 260 с.
5. Chikrij G.Ts. An approach to the solution of linear differential games with variable information delay. *Journal of Automation and Information Sciences.* 1995. Vol. 27, N 3&4. P. 163–170.
6. Chikrii G.Ts. On one problem of control with variable information time lag. Preprints of the IFAC Conf. “System Structure and Control.” Vol. 3. Nantes, France, 1998. P. 657–661.
7. Chikrii G.T. Principle of time stretching in evolutionary games of approach. *Journal on Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 5. P. 12–26.
8. Chikrii G.Ts. Time dilatation principle in evolutionary games of approach. *Proceedings of VII International Conference on Optimization Methods and Applications* (Optima-2016), Petrovac, Montenegro, 2016. P. 34.
9. Chikrii G.Ts. One approach to solution of complex game problems for some quasi-linear evolutionary systems. *Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra*. 2004. Vol. 14, N 4. P. 307–314.
10. Chikrii G.Ts. Using the effect of information delay in differential pursuit games. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2007. Vol. 43, N 2. P. 233–245.
11. Chikrii G.Ts. On one problem of approach for damped oscillations. *Journal of Automation and Information Science*. 2009. Vol. 4, N 10. P. 1–9.
12. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Москва: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
13. Кривонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А. Динамические игры с разрывными траекториями. Киев: Наук. думка, 2005. 219 с.

14. Chikriy A.A., Kalashnikova S.F. Pursuit of a group of evaders by a single controlled object. *Cybernetics*. 1987. Vol. 23, N 4. P. 437–445.

15. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. Киев: Вища школа, 1987. 288 с.

16. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Москва: Наука, 1985. 224 с.

17. Chikrii A.A. Conflict-controlled processes. Dordrecht; Boston; London: Springer Science&Business Media, 2013. 424 p.

18. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. Москва: Наука, 1970. 420 с.

19. Зонневенд Д. Об одном типе превосходства игрока. *Доклады АН СССР*. 1973. Т. 208, № 3. С. 520–523.

20. Азимов А.Я., Фан Зуй Хай. Об одном способе преследования в теории линейных дискретных игр с интегральными ограничениями на управления. Москва, 1983. — 36 с. Деп. в ВИНИТИ. № 3164.

21. Василенко Н.В. Теория колебаний. Киев: Вища школа, 1992. 430 с.

Надійшла до редакції 12.04.2017

Г.Ц. Чикрій

ПРО РОЗТЯГУВАННЯ ЧАСУ У ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ІГРАХ З ІМПУЛЬСНИМИ КЕРУВАННЯМИ

Анотація. У розвиток ідей академіка Б.Н. Пшеничного розглянуто лінійну диференціальну гру зближення з імпульсними керуваннями. Запропоновано методику дослідження, що базується на розтягуванні часу і орієнтована на ситуацію, коли класична умова Понтрягіна не має місця. Отримано достатні умови скінченності гарантованого часу зближення. Наведено ілюстративний приклад.

Ключові слова: функція розтягування часу, диференціальна гра, імпульсне керування, багатозначне відображення, геометрична різниця Мінковського, умова Понтрягіна.

G.Ts. Chikrii

ON THE TIME EXTENSION IN DIFFERENTIAL GAMES WITH IMPULSE CONTROLS

Abstract. In the development of ideas of B.N. Pshenichnyi, the paper considers a linear differential game with impulse controls. A research technique is proposed, which is based on time extension and oriented to the case where the classical Pontryagin condition does not hold. Sufficient conditions for the finiteness of the guaranteed approach time are obtained. An illustrative example is given.

Keywords: function of the time extension, differential game, impulse control, set-valued mapping, Minkowski' geometric difference, Pontryagin's condition.

Чикрий Грета Цолаковна,
доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: g.chikrii@gmail.com.