УДК 519.217

О.В. ПРИЩЕПА, Е.А. ЛЕБЕДЕВ

ОБ ОДНОЙ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ

Аннотация. Рассмотрены марковские многоканальные системы массового обслуживания с одной повторной попыткой начать обслуживание. Для систем найдены условия существования стационарного режима и предложены эффективные алгоритмы для подсчета стационарных вероятностей с использованием цепных дробей и явных векторно-матричных формул.

Ключевые слова: стохастическая система, повторные вызовы, стационарный режим.

Развитие телекоммуникационных и компьютерных сетей требует построения новых моделей в рамках теории массового обслуживания, которые более полно моделируют реальные процессы. Именно поэтому следует рассматривать системы массового обслуживания, которые учитывают феномен повторных вызовов и, таким образом, могут использоваться для решения большого количества практических задач без потери точности в расчетах. Для системы массового обслуживания с повторными вызовами характерно то, что требования, которые поступили в систему при занятости всех каналов обслуживания, возвращаются в нее после некоторого времени. Считается, что требования, которые не получили доступа к обслуживающим приборам в момент поступления в систему, находятся на орбите [1]. Все требования на орбите равноправны, неупорядочены и через случайное время (цикл орбиты) независимо одно от другого обращаются к обслуживающим приборам системы, чтобы получить обслуживание.

Первые результаты исследований таких систем представлены в монографиях [2, 3]. Отметим, что для классических моделей систем с повторными вызовами хорошо зарекомендовал себя метод производящих функций (например, [3]). С его помощью удалось получить ряд содержательных результатов, которые составили основу теории таких систем на первом этапе. В дальнейшем при решении задач выбора оптимальных параметров модели появилась необходимость изучения системы с повторными вызовами, у которых локальные характеристики процесса обслуживания зависят от текущего состояния системы.

В настоящей статье рассматривается случай зависимости интенсивности входного потока от числа требований, находящихся на орбите (в «очереди» повторных вызовов). Накладывается ограничение на число повторных попыток начать обслуживание подобно тому, как это было сделано в работе [4]. В этих условиях при изучении процесса обслуживания метод производящих функций не используется. Для изучения характеристик процесса обслуживания в стационарном режиме развивается аппроксимативный подход. Он состоит в том, что сначала изучается усеченная конечная система, а затем полученные результаты используются в процессе анализа исходной системы.

Основная модель, которая рассматривается в данной статье, является двумерной цепью Маркова $Q(t)=(Q_1(t),Q_2(t))$, $t\ge 0$, с непрерывным временем в фазовом пространстве $S(Q)=\{0,1,\dots,c\}\times\{0,1,\dots\}$. Компонента $Q_1(t)$ указывает на количество занятых приборов в момент времени t; $Q_2(t)$ соответствует числу источников повторных вызовов.

Инфинитезимальные характеристики $a_{(i,j)(i',j')}$, $(i,j),(i',j') \in S(Q)$, цепи $Q(t)$ задаются следующим образом:

1) если $i = 0, 1, \ldots, c-1$, $j = 0, 1, \ldots$, то

$$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j \ \text{ при } \ (i', j') = (i+1, j), \\ i\mu \ \text{ при } \ (i', j') = (i-1, j), \\ j\nu \ \text{ при } \ (i', j') = (i+1, j-1), \\ -(\lambda_j + i\mu + j\nu) \ \text{ при } \ (i', j') = (i, j), \\ 0 \ \text{ в остальных случаях;} \end{cases} \tag{1}$$

2) если $i = c$, $j = 0, 1, \ldots$, то

$$a_{(c,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j \ \text{ при } \ (i', j') = (c, j+1), \\ c\mu \ \text{ при } \ (i', j') = (c-1, j), \\ j\nu \ \text{ при } \ (i', j') = (c, j-1), \\ -(\lambda_j + c\mu + j\nu) \ \text{ при } \ (i', j') = (c, j), \\ 0 \ \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2}$$

Данная цепь Маркова моделирует процесс обслуживания в следующей системе. На вход поступают требования для обслуживания. Если в момент поступления есть хотя бы один свободный прибор, то требование сразу же поступает на обслуживание и затем покидает систему. Время обслуживания – показательно распределенная с параметром μ случайная величина. Если все приборы заняты, то требование становится источником повторного вызова и пытается очередной раз получить обслуживание через случайное время, которое имеет показательное распределение с параметром ν. Требование, которое при повторном обращении обнаруживает приборы занятыми, покидает систему и не получает обслуживания. Интенсивность входного потока равна λ_j, $j = 0, 1, \ldots$, и зависит от числа j источников повторных вызовов.

Процессы, подобные цепи $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t))$, численными методами изучались в [4]. Кроме того, отметим, что по структуре интенсивностей переходов рассматриваемый марковский процесс близок к процессу обслуживания в модели С.Н. Степанова – системы с повторными вызовами и настойчивыми требованиями (см. [5]). Согласно принятой в теории массового обслуживания системе обозначений рассматриваемою модель будем представлять $M / M / c / \infty$. Символ ∞ на последней позиции означает отсутствие ограничений на число источников повторных вызовов. В дальнейшем будем считать $\lambda_j, \mu, \nu > 0$, $j = 0, 1, \ldots$, что всегда учитывается на практике. При выполнении этого требования будем говорить, что параметры модели невырожденные.

Выясним условия существования стационарного режима для $Q(t)$.

Лемма 1. Если параметры модели не вырождены и $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \, n^{-1} \lambda_n < \nu$, то для процесса обслуживания $Q(t)$, $t \geq 0$, существует стационарный режим и эргодическое распределение совпадает с единственным стационарным распределением.

Доказательство. Для того чтобы доказать существование стационарного режима, в качестве тест-функций Ляпунова рассмотрим

$$\varphi(i, j) = \varphi(j) = j, \ (i, j) \in S(Q).$$

Для них средний перенос, который определяется как

$$y_{ij} = \sum_{(i', j') \neq (i, j)} a_{(i,j)(i',j')} (\varphi(i', j') - \varphi(i, j)),$$

равен
$$y_{ij}=\begin{cases}-j\nu & \text{при } i=0,1,\dots,c-1;\\ \lambda_j-j\nu & \text{при } i=c.\end{cases}$$
При $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n^{-1}\lambda_n<\nu$ для y_{ij} выполняются условия теоремы Твиди [3, с. 97]. Таким образом, процесс $Q(t)$ является регулярным, эргодическим и его предельное распределение совпадает с единственным стационарным распределением. Лемма доказана.

Суть настоящей статьи заключается в построении формул и эффективных алгоритмов расчета для стационарных вероятностей системы $M/M/c/\infty$. Обозначим π_{ij}, $(i,j)\in S(Q)$, стационарное распределение системы.

Для каждого $j=0,1,\dots$ построим разбиение фазового пространства $S(Q)=S_j(Q)\cup\overline{S_j}(Q)$, где $S_j(Q)=\{(k,m)\in S(Q): m\le j\}$. Используя теорему о равенстве потоков вероятностей через границу области $S_j(Q)$ в стационарном режиме [6, с. 49], получаем
$$\lambda_j\pi_{cj}=(j+1)\nu\pi_{0j+1}+(j+1)\nu\pi_{1j+1}+\ldots+(j+1)\nu\pi_{cj+1},\ j=0,1,\dots \tag{3}$$

Для стационарных вероятностей π_{ij}, $i=0,1,\dots,c$, $j=0,1,\dots$, система уравнений Колмогорова имеет вид
$$(\lambda_j+j\nu)\pi_{0j}=\mu\pi_{1j},\ j=0,1,\dots, \tag{4}$$

$$(\lambda_j+i\mu+j\nu)\pi_{ij}=\lambda_j\pi_{i-1j}+(i+1)\mu\pi_{i+1j}+(j+1)\nu\pi_{i-1j+1},$$
$$i=1,2,\dots,c-1,\ j=0,1,\dots, \tag{5}$$

$$(\lambda_j+c\mu+j\nu)\pi_{cj}=\lambda_j\pi_{c-1j}+\lambda_{j-1}\pi_{cj-1}+(j+1)\nu\pi_{c-1j+1}+(j+1)\nu\pi_{cj+1},$$
$$j=0,1,\dots \tag{6}$$

Для дальнейшего анализа системы (3)–(6) введем обозначения:

$F(j)=\|f_{ik}^j\|_{i,k=0}^c$, $j=0,1,\dots$, — матрица с элементами $f_{ii}^j=\lambda_j+i\mu+j\nu$, $i=0,1,\dots,c-1$, $f_{cc}^j=\lambda_j+c\mu$, $f_{ii-1}^j=-\lambda_j$, $i=0,1,\dots,c-1$, $f_{cc-1}^j=-(\lambda_j+j\nu)$, $f_{ii+1}^j=-(i+1)\mu$, $i=0,1,\dots,c-1$, $f_{ck}^j=-j\nu$, $k=0,1,\dots,c-2$, остальные элементы равны нулю;

$B=\|b_{ik}\|_{i,k=0}^c$, $b_{ii-1}=1$, $i=1,2,\dots,c$, $b_{cc}=1$, остальные элементы равны нулю.

В общем случае при произвольном числе источников повторных вызовов найти явные формулы для стационарных вероятностей не представляется возможным. Исключение составляют одноканальные системы, которые исследованы в работе [7]. С учетом этого рассмотрим усеченную модель $M/M/c/N$, которая имеет конечное число мест для повторных вызовов N. При условии, что все приборы заняты и сформировано N источников повторных вызовов, новые требования при поступлении полностью теряются системой.

Процесс обслуживания для усеченной модели определяется двумерной цепью Маркова $Q^N(t)=(Q_1^N(t),Q_2^N(t))$ с непрерывным временем в фазовом пространстве $S(Q^N)=\{0,1,\ldots,c\}\times\{0,1,\ldots,N\}$. Инфинитезимальные характеристики $a_{(i,j)(i',j')}$, $(i,j),(i',j')\in S(Q^N)$, цепи $Q^N(t)$ совпадают с (1) для $i=0,1,\ldots,c-1$, $j=0,1,\ldots,N$ и совпадают с (2) для $i=c$, $j=0,1,\ldots,N-1$. В случае $i=c$, $j=N$ имеем

$$a^N_{(c,N)(i',j')}=\begin{cases} c\mu \text{ при } (i',j')=(c-1,N),\\ N\nu \text{ при } (i',j')=(c,N-1),\\ -(c\mu+N\nu) \text{ при } (i',j')=(c,N),\\ 0 \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Поскольку фазовое пространство процесса конечно, то для него всегда существует стационарный режим и через π^N_{ij}, $(i,j)\in S(Q^N)$, будем обозначать стационарные вероятности.

Таким образом, для π^N_{ij}, $i=0,1,\ldots,c$, $j=0,1,\ldots,N-1$, справедливы уравнения (3)–(6):

$$\lambda_j\pi^N_{cj}=(j+1)\nu\pi^N_{0j+1}+(j+1)\nu\pi^N_{1j+1}+\ldots+(j+1)\nu\pi^N_{cj+1},\ j=0,1,\ldots,N-1; \tag{7}$$

$$(\lambda_j+j\nu)\pi^N_{0j}=\mu\pi^N_{1j},\ j=0,1,\ldots,N-1; \tag{8}$$

$$(\lambda_j+i\mu+j\nu)\pi^N_{ij}=\lambda_j\pi^N_{i-1j}+(i+1)\mu\pi^N_{i+1j}+(j+1)\nu\pi^N_{i-1j+1}, \tag{9}$$
$$i=1,2,\ldots,c-1,\ j=0,1,\ldots,N-1;$$

$$(\lambda_j+c\mu+j\nu)\pi^N_{cj}=\lambda_j\pi^N_{c-1j}+\lambda_{j-1}\pi^N_{cj-1}+(j+1)\nu\pi^N_{c-1j+1}+(j+1)\nu\pi^N_{cj+1}, \tag{10}$$
$$j=0,1,\ldots,N-1,$$

а для π^N_{iN}, $i=0,1,\ldots,c$, имеем

$$(\lambda_N+N\nu)\pi^N_{0N}=\mu\pi^N_{1N}; \tag{11}$$

$$(\lambda_N+i\mu+N\nu)\pi^N_{iN}=\lambda_N\pi^N_{i-1N}+(i+1)\mu\pi^N_{i+1N},\ i=1,2,\ldots,c-1; \tag{12}$$

$$(c\mu+N\nu)\pi^N_{cN}=\lambda_N\pi^N_{c-1N}+\lambda_{N-1}\pi^N_{cN-1}. \tag{13}$$

Введем дополнительное обозначение для матрицы, которая зависит от параметров системы $D=\|d_{ik}\|^c_{i,k=0}$, где $d_{00}=1$, $d_{0k}=0$, $d_{ik}=f^N_{i-1k}$, $i=1,2,\ldots,c$, $k=0,1,\ldots,c$. Найдем стационарное распределение π^N_{ij}, $(i,j)\in S(Q^N)$, в векторно-матричном виде.

Относительно матриц $F(j)$, $j=0,1,\ldots$, и D докажем следующий вспомогательный результат.

Лемма 2. Если параметры модели не вырождены, то существуют матрицы $F^{-1}(j)$, $j=0,1,\ldots$, и D^{-1}.

Доказательство. Представим $F(j)$, $j=0,1,\ldots$, в следующем виде:

$$F(j)=F^0(j)(I-\widetilde{F}(j)),\ j=0,1,\ldots, \tag{14}$$

где $F^0(j)=\| f_{ik}^{0j} \|_{i,k=0}^{c}$, $j=0,1,\ldots$, — диагональная матрица с элементами $f_{ii}^{0j}=\lambda_j+i\mu+j\nu,\ i=0,\ldots,c-1$, $f_{cc}^{0j}=\lambda_j+c\mu$; $\widetilde{F}(j)=\| \widetilde{f}_{ik}^{\,j} \|_{i,k=0}^{c}$, $j=0,1,\ldots$, — матрица с элементами $\widetilde{f}_{ii-1}^{\,j}=\dfrac{\lambda_j}{\lambda_j+i\mu+j\nu}$, $i=1,\ldots,c-1$, $\widetilde{f}_{cc-1}^{\,j}=\dfrac{(\lambda_j+j\nu)}{\lambda_j+c\mu}$, $\widetilde{f}_{ii+1}^{\,j}=\dfrac{(i+1)\mu}{\lambda_j+i\mu+j\nu}$, $i=0,\ldots,c-1$, $\widetilde{f}_{ck}^{\,j}=\dfrac{j\nu}{\lambda_j+c\mu}$, $k=0,\ldots,c-2$, остальные элементы равны нулю.

Использовав следствие 5.6.16 из [8], представим обратную матрицу для (14) в виде

$$
\begin{aligned}
(F(j))^{-1} &= (F^0(j)(I-\widetilde{F}(j)))^{-1}=(I-\widetilde{F}(j))^{-1}(F^0(j))^{-1}= \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(\widetilde{F}(j))^k (F^0(j))^{-1},\ j=0,1,\ldots
\end{aligned}
\tag{15}
$$

С учетом того, что

$$
|F^0(j)|=\prod_{i=0}^{c} f_{ii}^{0j}=(\lambda_j+c\mu)\prod_{i=0}^{c-1}(\lambda_j+i\mu+j\nu)>0,
$$

имеем $F^0(j)$, $j=0,1,\ldots$, — невырожденные матрицы. Таким образом, из (14) и (15) следует, что обратные матрицы $F^{-1}(j),\ j=0,1,\ldots$, существуют.

Для нижней треугольной матрицы D определитель $|D|=\prod_{i=0}^{c-1} f_{ii+1}^{N}=$ $=(-1)^c c!\,\mu^c\neq 0$, что доказывает ее обратимость. Лемма доказана.

Для вектора стационарных вероятностей $\pi_j^{(N)}=(\pi_{0j}^{(N)},\pi_{1j}^{(N)},\ldots,\pi_{cj}^{(N)})^{\mathrm{T}}$ справедлив такой результат.

Теорема 1. Если параметры модели не вырождены, то стационарные вероятности $\pi_{ij}^{(N)},(i,j)\in S(Q^N)$, представимы в векторно-матричном виде

$$
\pi_j^{(N)}=\Delta_j^N \pi_{00}^{(N)},\ j=0,\ldots,N,
$$

где

$$
\pi_{00}^{(N)}=\Big(\sum_{j=0}^{N}\bar{1}\Delta_j^N\Big)^{-1},\ \Delta_j^N=\frac{1}{j!\,\nu^j}\frac{\prod_{k=j}^{N-1}W(k)D^{-1}e_0}{e_0^{\mathrm{T}}\prod_{k=0}^{N-1}W(k)D^{-1}e_0},\ j=0,1,\ldots,N-1,
$$

$$
\Delta_N^N=\frac{1}{N!\,\nu^N}\frac{D^{-1}e_0}{e_0^{\mathrm{T}}\prod_{k=0}^{N-1}W(k)D^{-1}e_0}.
$$

Доказательство. Дополним систему уравнений (11), (12) равенством $\pi_{0N}^N=\pi_{0N}^N$ и запишем ее в векторно-матричном виде:

$$
D\pi_N^N=e_0\pi_{0N}^N.
$$

Это дает возможность представить π_N^N через π_{0N}^N:

$$\pi_N^N = D^{-1} e_0 \pi_{0N}^N . \tag{16}$$

Если в уравнении (7) заменить j на $j-1$, то (10) можно переписать в виде

$$(\lambda + c\mu)\pi_{cj}^N = \tag{17}$$

$$= (\lambda_j + j\nu)\pi_{c-1j}^N + (j+1)\nu\pi_{1j+1}^N + (j+1)\nu\pi_{2j+1}^N + j\nu\pi_{0j}^N + \ldots + j\nu\pi_{c-2j}^N ,$$

$$j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Запишем теперь системы (8), (9) и (17) в векторно-матричном виде:

$$F(j)\pi_j^N = (j+1)\nu B\pi_{j+1}^N , \; j = 0, 1, \ldots, N-1 . \tag{18}$$

Учитывая (16), находим решение рекуррентного соотношения (18)

$$\pi_j^N = \frac{N!\nu^{N-j}}{j!} \prod_{k=j}^{N-1} W(k) D^{-1} e_0 \pi_{0N}^N , \; j = 0, 1, \ldots, N-1 .$$

Для $j = 0$ из последней формулы имеем

$$\pi_0^N = N!\nu^N \prod_{k=0}^{N-1} W(k) D^{-1} e_0 \pi_{0N}^N . \tag{19}$$

Используя (19), можно записать вероятность π_{0N}^N через π_{00}^N:

$$\pi_{0N}^N = \left[N!\nu^N e_0^{\mathrm{T}} \prod_{k=0}^{N-1} W(k) D^{-1} e_0 \right]^{-1} \pi_{00}^N .$$

Тогда

$$\pi_j^{(N)} = \Delta_j^N \pi_{00}^{(N)} , \; j = 0, \ldots, N , \tag{20}$$

где

$$\Delta_j^N = \frac{1}{j!\nu^j} \frac{\prod_{k=j}^{N-1} W(k) D^{-1} e_0}{e_0^{\mathrm{T}} \prod_{k=0}^{N-1} W(k) D^{-1} e_0} , \; j = 0, 1, \ldots, N-1 ,$$

$$\Delta_N^N = \frac{1}{N!\nu^N} \frac{D^{-1} e_0}{e_0^{\mathrm{T}} \prod_{k=0}^{N-1} W(k) D^{-1} e_0} . \tag{21}$$

Из условия нормировки находим

$$\pi_{00}^{(N)} = \left(\sum_{j=0}^{N} \bar{1} \Delta_j^N \right)^{-1} .$$

Теорема доказана.

Непосредственным следствием доказанного результата является асимптотическое представление стационарных вероятностей для модели $M / M / c / \infty$.

Теорема 2. Если параметры модели не выраждены и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n^{-1}\lambda_n < \nu$, то стационарные вероятности π_{ij}, $(i, j) \in S(Q)$, системы типа $M / M / c / \infty$ определяются следующим образом:

$$\pi_j = \Delta_j \pi_{00}, \quad j = 0, 1, \ldots ,$$

где

$$\Delta_j = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{j!\nu^j} \frac{\prod\limits_{k=j}^{N-1} W(k) D^{-1} e_0}{e_0^{\mathrm{T}} \prod\limits_{k=0}^{N-1} W(k) D^{-1} e_0}, \quad \pi_{00} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \bar{1} \Delta_j \right)^{-1}.$$

Доказательство. Процессы обслуживания $Q(t)$ и $Q^N(t)$ являются процессами миграции. Поэтому на основании результатов работы [3, разд. 2, теоремы 2.3 и 2.4] при $N \to \infty$ стационарные вероятности π_{ij}^N усеченной модели $M / M / c / N$ приближают стационарные вероятности π_{ij} модели $M / M / c / \infty$ и существует предел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\pi_j^N}{\pi_{00}^N} = \frac{\pi_j}{\pi_{00}} = \lim_{N\to\infty} \Delta_j^N, \tag{22}$$

который обозначим Δ_j, $j = 0, 1, \ldots$ Из (22) имеем $\pi_j = \Delta_j \pi_{00}$, $j = 0, 1, \ldots$

Теорема доказана.

Формулы (20)–(22) представляют собой эффективный алгоритм вычисления стационарных вероятностей для системы типа $M / M / c / \infty$. Кроме того, полученные результаты дают возможность найти явные замкнутые выражения для этих вероятностей в случае $c = 1$ и $c = 2$.

Кроме векторно-матричного представления стационарных вероятностей, изложенного в теореме 1, существует возможность получения явных формул для одноканальных систем без урезания изначальной системы.

Теорема 3 [7]. Если выполнены условия теоремы 2, то для процесса обслуживания $Q(t)$, $t \ge 0$, системы типа $M / M / 1 / \infty$ существует стационарный режим и стационарные вероятности определяются следующим образом:

$$\pi_{0j} = \frac{1}{j!\nu^j} \prod_{i=1}^{j} \frac{\lambda_{i-1}[\lambda_{i-1} + (i-1)\nu]}{\lambda_i + i\nu + \mu} \pi_{00}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$$\pi_{1j} = \frac{\lambda_0}{\mu} \frac{1}{j!\nu^j} \prod_{i=1}^{j} \frac{\lambda_{i-1}(\lambda_i + i\nu)}{\lambda_i + i\nu + \mu} \pi_{00}, \quad j = 0, 1, \ldots ,$$

где

$$\pi_{00}^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!\nu^j} \prod_{i=1}^{j} \frac{\lambda_{i-1}(\lambda_{i-1} + (i-1)\nu)}{\lambda_i + i\nu + \mu} + \frac{\lambda_0}{\mu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!\nu^j} \prod_{i=1}^{j} \frac{\lambda_{i-1}(\lambda_i + i\nu)}{\lambda_i + i\nu + \mu}.$$

В случае двуканальной системы массового обслуживания представим стационарное распределение с использованием цепных дробей. Введем следующие обозначения.

— Для бесконечной цепной дроби

$$x_j = \cfrac{\gamma_{j+1}}{\beta_{j+1} + \cfrac{\gamma_{j+2}}{\beta_{j+2} + \cfrac{\gamma_{j+3}}{\beta_{j+3} + \ldots \atop \ldots + \cfrac{\gamma_{N-1}}{\beta_{N-1} + \ldots}}}} = \left[0;\ \frac{\gamma_{j+1}}{\beta_{j+1}};\ \frac{\gamma_{j+2}}{\beta_{j+2}};\ \ldots\right],\ j = 0, 1, \ldots,$$

где

$$\gamma_j = -\frac{\lambda_{j-1}((\lambda_{j-1} + (j-1)\nu)^2 + (j-1)\nu\mu)}{j(j+1)\nu^2\mu},\ j = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

$$\beta_j = -\frac{j\nu((\lambda_j + \mu + j\nu)^2 + \mu(\lambda_{j-1} + \mu + j\nu))}{j(j+1)\nu^2\mu},\ j = 1, 2, \ldots \tag{24}$$

— Для конечной цепной дроби

$$x_j^N = \cfrac{\gamma_{j+1}}{\beta_{j+1} + \cfrac{\gamma_{j+2}}{\beta_{j+2} + \cfrac{\gamma_{j+3}}{\beta_{j+3} + \ldots \atop \ldots + \cfrac{\gamma_{N-1}}{\beta_{N-1} + \cfrac{\gamma_N}{\beta_N}}}}} = \left[0;\ \frac{\gamma_{j+1}}{\beta_{j+1}};\ \ldots;\ \frac{\gamma_{N-1}}{\beta_{N-1}};\ \frac{\gamma_N}{\beta_N}\right],$$

$$j = 0, \ldots, N-1,$$

где γ_j, β_j при $j = 1, \ldots, N-1$ определяются аналогично как в (23), (24), при $j = N$ имеем

$$\gamma_N = \lambda_{N-1}((\lambda_{N-1} + (N-1)\nu)^2 + (N-1)\nu\mu),$$

$$\beta_N = N\nu((\lambda_N + \mu + N\nu)^2 + \mu(\lambda_{N-1} + \mu + N\nu)).$$

Теорема 4. Если выполнены условия теоремы 2, то стационарные вероятности π_{ij}, $(i, j) \in S(Q)$, системы типа $M/M/2/\infty$ имеют вид

$$\pi_{0j} = \left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k\right)\pi_{00},\ j = 1, 2, \ldots; \tag{25}$$

$$\pi_{1j} = \frac{\lambda_j + j\nu}{\mu}\left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k\right)\pi_{00},\ j = 0, 1, \ldots; \tag{26}$$

$$\pi_{2j} = \frac{1}{2\mu^2}((\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu\mu - (j+1)\nu\mu x_j)\left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k\right)\pi_{00},\ j = 0, 1, \ldots, \tag{27}$$

где

$$(\pi_{00})^{-1} = \frac{1}{2\mu^2}\left(\sum_{j=0}^{\infty}((\lambda_j + \mu + j\nu)^2 + \mu(\mu + j\nu - (j+1)\nu x_j))\left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k\right)\right). \tag{28}$$

Доказательство. Вначале найдем стационарные вероятности π_{ij}^N, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1, \ldots, N$, усеченной модели $M/M/2/N$. Используя уравнения (8), (11), представим π_{1j}^N через π_{0j}^N:

$$\pi_{1j}^N = \frac{\lambda_j + j\nu}{\mu}\pi_{0j}^N, \quad j=0,1,\ldots,N. \tag{29}$$

Уравнение (29) дает возможность переписать (9) в виде

$$2\mu^2\pi_{2j}^N = ((\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu\mu)\pi_{0j}^N - (j+1)\nu\mu\pi_{0j+1}^N, \; j=0,1,\ldots,N-1, \tag{30}$$

а уравнение (12) для $i=1$ — в виде

$$2\mu^2\pi_{2N}^N = ((\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu\mu)\pi_{0N}^N. \tag{31}$$

Используя формулы (30) и (31), а также уравнение (13) для $c=2$, находим

$$\lambda_{N-1}((\lambda_{N-1} + (N-1)\nu)^2 + (N-1)\nu\mu)\pi_{0N-1}^N =$$

$$= N\nu((\lambda_N + \mu + N\nu)^2 + \mu(\lambda_{N-1} + \mu + N\nu))\pi_{0N}^N. \tag{32}$$

Результат (32) запишем в новых обозначениях:

$$\gamma_N \pi_{0N-1}^N = \beta_N \pi_{0N}^N, \tag{33}$$

где

$$\gamma_N = \lambda_{N-1}((\lambda_{N-1} + (N-1)\nu)^2 + (N-1)\nu\mu),$$

$$\beta_N = N\nu((\lambda_N + \mu + N\nu)^2 + \mu(\lambda_{N-1} + \mu + N\nu)).$$

Используя уравнение (7) для $c=2$ и уравнение (29), представим (10) в виде

$$(2\mu + j\nu)\pi_{2j}^N = \frac{\lambda_j(\lambda_j + j\nu)}{\mu}\pi_{0j}^N + \lambda_{j-1}\pi_{2j-1}^N - (j+1)\nu\pi_{0j+1}^N, \; j=0,1,\ldots,N-1. \tag{34}$$

Очевидно, что для уравнения (34) целесообразно использовать соотношение (30). Таким образом, имеем

$$\gamma_j\pi_{0j-1}^N = \beta_j\pi_{0j}^N + \pi_{0\,j+1}^N, \; j=1,\ldots,N-1, \tag{35}$$

где

$$\gamma_j = -\frac{\lambda_{j-1}((\lambda_{j-1} + (j-1)\nu)^2 + (j-1)\nu\mu)}{j(j+1)\nu^2\mu},$$

$$\beta_j = -\frac{j\nu((\lambda_j + \mu + j\nu)^2 + \mu(\lambda_{j-1} + \mu + j\nu))}{j(j+1)\nu^2\mu}, \; j=1,\ldots,N-1.$$

Левую и правую части уравнения (35) разделим на π_{0j}^N, а в уравнении (33) разделим на π_{0N-1}^N. Переходя к новой переменной $x_j^N = \dfrac{\pi_{0\,j+1}^N}{\pi_{0\,j}^N}$, $j=0,1,\ldots,N-1$, находим

$$\frac{\gamma_j}{x_{j-1}^N} = \beta_j + x_j^N, \; j=1,\ldots,N-1, \tag{36}$$

$$x_{N-1}^N = \frac{\gamma_N}{\beta_N}. \tag{37}$$

Соотношения (36), (37) дают возможность записать стационарные вероятности π_{0j}^N, $j=0,1,\ldots,N-1$, через цепные дроби $x_j^N = \left[0; \frac{\gamma_{j+1}}{\beta_{j+1}}; \ldots; \frac{\gamma_{N-1}}{\beta_{N-1}}; \frac{\gamma_N}{\beta_N}\right]$, $j=0,\ldots,N-1$, в виде

$$\pi_{0j}^N = \left(\prod_{k=j}^{N-1} x_k^N\right)^{-1} \pi_{0N}^N, \ j=0,1,\ldots,N-1. \tag{38}$$

Используя (38) для $j=0$, выразим π_{0N}^N через π_{00}^N:

$$\pi_{0N}^N = \left(\prod_{k=0}^{N-1} x_k^N\right)\pi_{00}^N. \tag{39}$$

В результате получаем формулы для π_{0j}^N и π_{1j}^N, $j=0,1,\ldots,N$, которые зависят только от π_{00}^N:

$$\pi_{0j}^N = \left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k^N\right)\pi_{00}^N, \tag{40}$$

$$\pi_{1j}^N = \frac{\lambda_j + j\nu}{\mu}\left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k^N\right)\pi_{00}^N. \tag{41}$$

Полученные вероятности π_{0j}^N, $j=1,\ldots,N$, используем в уравнениях (30), (31). Это позволяет найти стационарные вероятности π_{2j}^N, $j=0,\ldots,N$:

$$\pi_{2j}^N = \frac{1}{2\mu^2}((\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu\mu - (j+1)\nu\mu x_j^N)\left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k^N\right)\pi_{00}^N, \ j=0,\ldots,N-1, \tag{42}$$

$$\pi_{2N}^N = \frac{(\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu\mu}{2\mu^2}\left(\prod_{k=0}^{N-1} x_k^N\right)\pi_{00}^N. \tag{43}$$

Из условия нормировки $\sum_{j=0}^{N}(\pi_{0j} + \pi_{1j} + \pi_{2j}) = 1$ имеем

$$(\pi_{00}^N)^{-1} = \tag{44}$$

$$= \frac{1}{2\mu^2}\left(\sum_{j=0}^{N}((\lambda_j + \mu + j\nu)^2 + \mu(\mu + j\nu))\left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k^N\right) - \sum_{j=0}^{N-1}(j+1)\nu\mu x_j^N\left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k^N\right)\right).$$

На основании аргументов, приведенных в теореме 2, в формулах (40)–(44) переходим к пределу при $N \to \infty$ и получаем (25)–(28). Теорема доказана.

В настоящей статье исследованы системы массового обслуживания с одной повторной попыткой начать обслуживание. Получены эффективные алгоритмы и явные замкнутые формулы для стационарных вероятностей через параметры систем, что позволяет в дальнейшем исследовать их характеристики и решать оптимизационные задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко И.Н., Коба Е.В. К классификации СМО с повторением вызовов. *Кибернетика и системный анализ.* 2010. № 3. С. 84–91.
2. Artalejo J. R., Gomez-Corral A. Retrial queueing systems: A computational approach. Berlin: Springer, 2008. 317 p.
3. Falin G.I., Templeton J.G.C. Retrial queues. London: Chapman and Hall, 1997. 328 p.
4. Shin Y.W., Moon D.H. Retrial queues with limited number of retrials: numerical investigations. The Seventh International Symposium on Operations Research and Its Applications (ISORA'08), 2008. P. 237–247.
5. Stepanov S.N. Numerical calculation accuracy of communication models with repeated calls. *Problems of Control and Information Theory.* 1984. Vol. 13, N 6. P. 371–381.
6. Уолрэнд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания. Москва: Мир, 1993. 336 с.
7. Лебедев Е.А., Прищепа О.В. Системы с повторными вызовами, нетерпеливыми требованиями и управляемым входным потоком. *Журнал вычислительной и прикладной математики.* 2007. Вып. 2 (95). С. 59–64.
8. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва: Мир, 1989. 655с.

Надійшла до редакції 22.12.2016

О.В. Прищепа, Є.О. Лебєдєв

ПРО ОДНУ БАГАТОКАНАЛЬНУ СИСТЕМУ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ПОВТОРНИМИ ВИКЛИКАМИ

Анотація. Розглянуто марковські багатоканальні системи масового обслуговування з однією повторною спробою почати обслуговування. Для систем знайдено умови існування стаціонарного режиму і запропоновано ефективні алгоритми для підрахунку стаціонарних імовірностей з використанням ланцюгових дробів та явних векторно-матричних формул.

Ключові слова: стохастична система, повторні виклики, стаціонарний режим.

O.V. Pryshchepa, E.O. Lebedev

ON A MULTI-CHANNEL QUEUEING SYSTEM WITH RETRIAL CALLS

Abstract. The paper deals with Markov multi-channel queueing systems with a single retrial attempt to begin a service process. The authors establish the conditions of the existence of stationary mode and propose efficient algorithms for calculation of the stationary probabilities with the use of the continued fractions and explicit vector-matrix formulas.

Keywords: stochastic system, retrial calls, stationary mode.

Прищепа Оксана Владимировна,
преподаватель Национального университета водного хозяйства и природопользования, Ровно,
e-mail: o.prischepa@gmail.com.

Лебедев Евгений Александрович,
доктор физ.-мат. наук, профессор Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,
e-mail: leb@unicyb.kiev.ua.