УДК 519.872

Е.В. КОБА

СИСТЕМА ОБСЛУЖИВАНИЯ $M/M/1/0$ С ПОВТОРЕНИЕМ И КОМБИНИРОВАННОЙ ДИСЦИПЛИНОЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Аннотация. Рассмотрена система обслуживания $M/M/1/0$ с повторением и комбинированной дисциплиной обслуживания, а именно: заявки с орбиты обслуживаются в порядке очереди, но при наличии свободного канала заявка, пришедшая с первичного потока, сразу отправляется на обслуживание. Выведены формулы для вероятностей состояний и условие эргодичности. Проведено сравнение рассматриваемой системы с чистой системой Лакатоша.

Ключевые слова: система обслуживания, система обслуживания с повторением, орбита, система обслуживания с циклическим временем ожидания, комбинированная дисциплина обслуживания, условие эргодичности системы.

ВВЕДЕНИЕ

Системы массового обслуживания (СМО) с повторением заявок стали активно изучаться, начиная с 80-х годов прошлого столетия. Для них характерно следующее: если пришедшая заявка поступает в переполненную систему, т.е. обслуживающий канал (или обслуживающие каналы) и все места в очереди (при ее наличии в системе) заняты, она покидает систему, но не теряется, а через некоторое время повторяет свою попытку попасть на обслуживание (в канал или в очередь). В этом случае возникает неупорядоченная очередь повторных заявок, которую принято называть орбитой. В настоящее время в связи с развитием информационных технологий системы обслуживания с повторением заявок как модели функционирования информационных систем получили широкое распространение.

Наиболее общая модель СМО с повторением (возвращением) заявок представлена в обзорной статье Т. Янга и Дж. Темплтона [1]. Классификация СМО с возвращением заявок введена в [2]. Сравнительный анализ классических систем обслуживания и систем обслуживания с возвращением заявок проведен в [3], а статьи [4, 5] — это исчерпывающие библиографии по исследованию таких систем.

В Украине важные результаты относительно систем с повторными заявками были получены В.В. Анисимовым [6, 7], И.Н. Коваленко [8, 9], Е.В. Кобой [10], Е.А. Лебедевым [11, 12] и их учениками. Направление их исследования — эргодичность немарковских СМО с возвращением, системы с циклическим временем ожидания (системы типа Лакатоша), многоциклические системы, системы с переменными параметрами, телефонные системы (в частности, Call-центры), системы с разнотипными заявками, транспортные системы и т.д.

ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

В 1994 г. в журнале научных работ университета им. Лоранда Этвеша (г. Будапешт) была опубликована статья венгерского математика Ласло Лакатоша, в которой изучались системы обслуживания с повторением и дисциплиной обслуживания FIFO (первый пришел — первым обслужился) [13,14]. Эти системы получили название системы с циклическим временем ожидания или системы типа Лакатоша.

В этих системах в отличие от классических СМО с повторением вновь пришедшая заявка при наличии заявок на орбите не может попасть на обслуживание в свободный канал; она занимает очередь на орбите и обслуживается в порядке очереди.

Пусть, например, t_n — n-й момент появления заявки в системе. Если n-я заявка поступает в свободную систему (т.е. заявки отсутствуют как в канале обслуживания, так и на орбите), она сразу направляется в канал обслуживания. Если же канал занят, то n-я заявка отправляется на орбиту и возвращается оттуда через случайное (в общем случае) время, предпринимая попытку обслужиться. При это если канал свободен, то она обслуживается. В противном случае заявка возвращается на орбиту и процесс повторяется. Таким образом, заявки могут поступать на обслуживание с орбиты в моменты $t_n + \theta_{n1}, t_n + \theta_{n1} + \theta_{n2}, \ldots$, где θ_{nk}, $k = 1, 2, 3, \ldots$, — независимые одинаково распределенные случайные величины. В канал обслуживания n-я заявка поступает сразу же после возвращения с орбиты, но не раньше, чем обслужится $(n-1)$–я заявка.

Л. Лакатош рассматривал эти системы в связи с моделированием процесса посадки воздушного судна, где канал обслуживания — взлетно-посадочная полоса, а орбита — зона ожидания.

Системы обслуживания типа Лакатоша получили развитие в научных трудах И.Н. Коваленко [15] и Е.В. Кобы [16]. Следует отметить, что в настоящее время системы типа Лакатоша изучаются также как модели оптических буферов [см., например 17].

Следует отметить, однако, что чистая модель Лакатоша не всегда рациональна. Возможна ситуация, когда время пребывания на цикле орбиты значительно больше, чем время обслуживания в канале, например в авиации, когда время пребывания воздушного судна на круге зоны ожидания (цикл орбиты) значительно превышает время пребывания воздушного судна при посадке на взлетно-посадочной полосе (канал обслуживания). Выделим из модели Лакатоша рациональное, а именно: обслуживание с орбиты будет происходить в порядке очереди, но при этом допускается возможность обслуживания вне очереди заявок из первичного потока при наличии свободного канала.

Рассмотрим систему $M/M/m/0$ с возвращением и бесконечной орбитой, т.е. входящий поток в СМО — пуассоновский (параметр λ), время обслуживания распределено по экспоненциальному закону (параметр μ). Данная система, в отличие от системы Лакатоша, функционирует с возможным нарушением порядка обслуживания FIFO в случае, когда в момент поступления заявки из первичного потока хотя бы один из m каналов обслуживания свободен. В этой ситуации заявка начинает обслуживаться немедленно.

Опишем детали функционирования системы. Пусть M — натуральное число. Заявки, которые находятся на орбите, можно разделить на две категории. Заявки первой категории обслуживаются в первую очередь. Если же на орбите меньше, чем M заявок, то вновь поступившая на орбиту заявка считается первоочередной и относится к первой категории. Если на орбите M или больше заявок, то вновь поступившая заявка присоединится к очереди и относится ко второй категории. Как только какая-нибудь заявка из первой категории попадает в канал обслуживания, то некая заявка из второй категории переходит в первую категорию. Орбита подает на обслуживание заявку по принципу M-канальной системы. Каждая заявка первой категории посылает пуассоновский поток попыток с параметром θ, чтобы войти в СМО. Если в СМО менее m занятых каналов, то заявка переходит в СМО, в противном случае возвращается на орбиту.

Как было отмечено, орбита содержит заявки первой и второй категорий. Допустим, что всего на ней k заявок, тогда число заявок первой категории составляет $\min(k, M)$, остальные заявки относятся ко второй категории.

Состояние СМО с орбитой описывается однородным марковским процессом $(X(t), Y(t))$ с целочисленными компонентами, где $0 \le X(t) \le m$, $0 \le Y(t) \le \infty$. Величина $X(t)$ обозначает число заявок, обслуживаемых в момент t, а величины $Y(t)$ — число заявок, находящихся на орбите в момент t.

В системе возможны следующие переходы из одного состояния в другое:

а) переходы, связанные с поступлением заявок:

$$\lambda(i, j; i+1, j) = \lambda \text{ при } 0 \le i < m,$$

$$\lambda(i, j; i+1, j) = \lambda \text{ при } i = m;$$

б) переходы с орбиты в систему:

$$\lambda(i, j; i+1, j-1) = \theta \min(j, M) \text{ при } i < m;$$

в) переходы, связанные с обслуживанием заявок:

$$\lambda(i, j; i-1, j) = i\mu \text{ при } i > 0.$$

Таким образом, когда $X(t) = i < m$ и $Y(t) = j$, то за время dt на свободный канал может поступить одно требование с орбиты с вероятностью $M\theta dt$ при $j \ge M$ или с вероятностью $j\theta dt$ при $0 \le j < M$. Когда $X(t) = m$, то с интенсивностью λ величина $Y(t)$ увеличивается на единицу. Остальные интенсивности переходов из одного сосотояния в другое очевидны.

СИСТЕМА $M/M/1/0$ С ВОЗВРАЩЕНИЕМ

Ограничимся случаем, когда $m = M = 1$. Найдем условие эргодичности СМО с орбитой и будем выводить формулы для стационарных вероятностей состояний. Для упрощения обозначим $p_j = P(X = 0, Y = j)$, $q_j = P(X = 1, Y = j)$, где X, Y — стационарные версии $X(t), Y(t)$ в предположении, что стационарный режим существует.

На рис. 1 показана начальная часть графа переходов.

Исходя из данного графа переходов имеем

$$\lambda p_0 = \mu q_0,$$

$$(\lambda + \mu) q_0 = \lambda p_0 + \theta p_1,$$

$$(\lambda + \theta) p_n = \mu q_n, \; n > 0,$$

$$(\lambda + \mu) q_n = \lambda p_n + \lambda q_{n-1} + \theta p_{n+1}, \; n > 0.$$

Введем производящие функции

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, \; Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$$

в предположении, что эти ряды сходятся при данных z. Имеем

$$(\lambda + \theta) P(z) - \mu Q(z) = \theta p_0,$$

$$(\lambda z + \theta) P(z) + z(\lambda z - \lambda - \mu) Q(z) = \theta p_0.$$

Вместо трех параметров λ, μ, θ введем два параметра:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \; \sigma = \frac{\theta}{\mu}.$$

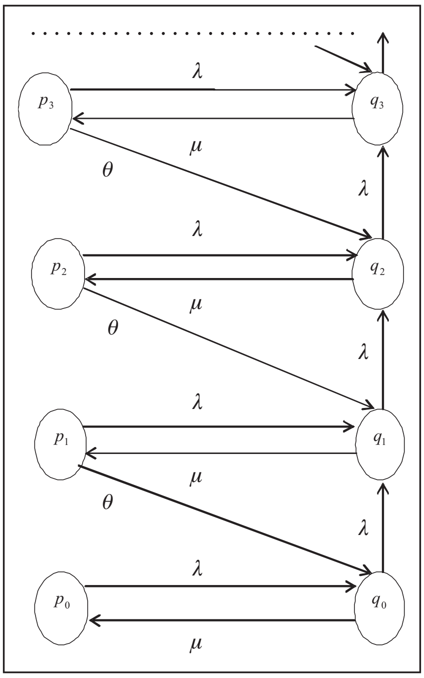

Рис.1. Граф переходов системы

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} (\rho+\sigma)P(z)-Q(z)=\sigma p_0, \\ (\rho z+\sigma)P(z)+z(\rho z-\rho-1)Q(z)=\sigma p_0. \end{cases}$$

Определитель системы имеет вид

$$\Delta(z)=\begin{vmatrix} \rho+\sigma & -1 \\ \rho z+\sigma & z(\rho z-\rho-1) \end{vmatrix}=(1-z)(\sigma-\rho(\rho+\sigma)z).$$

Получим определители переменных:

$$\Delta_P(z)=\sigma p_0\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & z(\rho z-\rho-1) \end{vmatrix}=\sigma p_0(1-z)(1-\rho z),$$

$$\Delta_Q(z)=\sigma p_0\begin{vmatrix} \rho+\sigma & 1 \\ \rho z+\sigma & 1 \end{vmatrix}=\sigma p_0\rho(1-z).$$

Отсюда

$$P(z)=\frac{\Delta_P(z)}{\Delta(z)}=\frac{\sigma p_0(1-\rho z)}{\sigma-\rho(\rho+\sigma)z},$$

$$Q(z)=\frac{\Delta_Q(z)}{\Delta(z)}=\frac{\sigma p_0\rho}{\sigma-\rho(\rho+\sigma)z}.$$

Из условия нормировки $P(1)+Q(1)=1$ находим $\sigma p_0=\sigma(1-\rho)-\rho^2$. Окончательные формулы для производящих функций имеют вид

$$P(z)=\frac{(\sigma(1-\rho)-\rho^2)(1-\rho z)}{\sigma-\rho(\rho+\sigma)z},$$

$$Q(z)=\frac{\rho(\sigma(1-\rho)-\rho^2)}{\sigma-\rho(\rho+\sigma)z}.$$

Из этих формул видно, что необходимое и достаточное условие эргодичности системы имеет вид $\sigma>\rho(\rho+\sigma)$, т.е. $\sigma>\rho^2/(1-\rho)$. Обращая производящие функции $P(z)$, $Q(z)$, получаем явные формулы для p_n, q_n:

$$p_0=1-\rho-\frac{\rho^2}{\sigma},$$

$$p_n=\left(1-\rho-\frac{\rho^2}{\sigma}\right)\left(\left(\frac{\rho(\rho+\sigma)}{\sigma}\right)^n-\rho\left(\frac{\rho(\rho+\sigma)}{\sigma}\right)^{n-1}\right),\ n>0,$$

$$q_n=\rho\left(1-\rho-\frac{\rho^2}{\sigma}\right)\left(\frac{\rho(\rho+\sigma)}{\sigma}\right)^n,\ n\ge 0.$$

Заметим, что $Q(1)=P(X=1)=\rho$. Таким образом, при условии эргодичности все поступающие заявки обслуживаются с вероятностью единица. Более того, все моменты распределения величины Y конечны, так как радиус сходимости функций $P(z), Q(z)$ равен $\sigma/\rho(\rho+\sigma)>1$.

СРАВНЕНИЕ РАССМОТРЕННОЙ СИСТЕМЫ С СИСТЕМОЙ ТИПА ЛАКАТОША

Рассмотрим систему $M/M/1$ типа Лакатоша [13, 14] с экспоненциальным распределением с параметром θ времени цикла на орбите, пуассоновским входящим потоком с параметром λ, экспоненциальным временем обслуживания с параметром μ. Сравним условия эргодичности такой системы с условиями предложенной нами системы.

Пусть W_n — время ожидания n-й заявки в системе типа Лакатоша. При достаточно большом значении W_n выполняется соотношение

$$E(W_{n+1}-W_n)\sim EY_n - EZ_{n+1} + EU_{n+1},$$

где Y_n — время обслуживания n-й заявки, Z_{n+1}— время между поступлением n-й и $n+1$-й заявок, U_{n+1} — цикл $n+1$-й заявки на орбите.

Таким образом,

$$E(W_{n+1}-W_n)\sim \frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\theta}. \qquad (1)$$

Соглано критерию Мустафы [18] условие эргодичности системы состоит в том, чтобы выражение (1) было отрицательным, т.е.

$$\lambda\theta-\mu\theta+\lambda\mu<0,\ \rho\sigma-\sigma+\rho<0,\ \sigma>\frac{\rho}{1-\rho}.$$

Полученное условие более сильное, чем условие $\sigma>\rho^2/(1-\rho)$ для нашей системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена система обслуживания $M/M/1/0$ с возвращением и комбинированной дисциплиной обслуживания, т.е. заявки с орбиты обслуживаются в порядке очереди, но при наличии свободного канала заявка, пришедшая с первичного потока, немедленно отправляется на обслуживание. Для такой системы выведены формулы для вероятностей состояний, а также условие эргодичности. Проведено сравнение рассматриваемой системы с чистой системой Лакатоша [13, 14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yang T., Templeton J.G.C. A survey on retrial queues. *Queueing Systems.* 1987. N 3. P. 201–233.
2. Коба Е.В., Коваленко И.Н. К классификации систем массового обслуживания с повторением вызовов. *Кибернетика и системный анализ.* 2010. № 3. С. 84–91.
3. Artalejo J., Falin G. Standart and retrial queueing systems: a comparative analysis. *Revista matemática complutense*. 2002. Vol. XV, N 1. P. 101–129.
4. Artalejo J. A classified bibliography of research in retrial queueing. Progress in 1990-1999. *Top.* 1999. N 7. P. 187–211.
5. Artalejo J. A classified bibliography of research in retrial queueing. Progress in 2000-2009. *Mathematical and Computer Modeling.* 2010, Vol 51. P. 1071–1081.
6. Anisimov V.V. Analysis of retrial queueing systems in asymptotically aggregated environment. Third International Workshop on Retrial Queues. Amsterdam, 2000. P. 43–46.
7. Анисимов В.В., Куртулуш М. Некоторые марковские модели системы обслуживания с повторными вызовами в условиях малой загрузки. *Кибернетика и системный анализ.* 2010. № 6. С. 110–126.
8. Коваленко И.Н. Вероятность потери в системе обслуживания $M/G/m$ с Т-повторением вызовов в режиме малой нагрузки. *Доповіді НАН України.* 2002. № 5. С. 77–80.

9. Коваленко И.Н. О двухциклической системе обслуживания. *Кибернетика и системный анализ.* 2015. Т. 51, № 1. С. 59–65.

10. Коба Е.В. Условие устойчивости некоторых типовых систем обслуживания с возвращением заявок. *Кибернетика и системный анализ.* 2005. № 1. С. 124–127.

11. Lebedev E.A. On the first passage time of removing level for retrial queues. *Доповіді НАН України.* 2002. № 3. С. 47–50.

12. Усар И.Я., Лебедев Е.А. Системы с повторными вызовами и переменной интенсивностью входящего потока. *Кибернетика и системный анализ.* 2013. № 3. С. 151–159.

13. Lakatos L. On a simple continuous cyclic-waiting problem. *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp*. 1994. N 14. P. 105–113.

14. Lakatos L. A probability model connected with landing of airplanes. Safety and reliability. (Ed. A.A. Balkoma). Rotherdam: Brookfieled, 1999. P. 151–154.

15. Коваленко И.Н., Коба Е.В. Три системы обслуживания с повторными вызовами, отражающие некоторые особенности процесса посадки воздушных судов. *Проблемы управления и информатики.* 2002. № 2. С. 78–82.

16. Koba E.V. On a $GI/G/1$ retrial queueing system with a FIFO queueing discipline. *Theory of Stochastic Processes.* 2002. N 8. P. 201–207.

17. Серебрякова С.В. Застосування циклічних систем обслуговування. *Доповіді НАН України*. 2016. № 3. С. 32–37.

18. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. Москва: Изд. РУДН, 1995. 529 с.

Надійшла до редакції 01.11.2016

О.В. Коба

СИСТЕМА ОБСЛУГОВУВАННЯ $M/M/1/0$ З ПОВТОРЕННЯМ ТА КОМБІНОВАНОЮ ДИСЦИПЛІНОЮ ОБСЛУГОВУВАННЯ

Анотація. Розглянуто систему обслуговування $M/M/1/0$ з повторенням та комбінованою дисципліною обслуговування, а саме: заявки з орбіти обслуговуються у порядку черги, але при наявності вільного каналу заявка, що прийшла з первинного потоку, негайно відправляється на обслуговування.. Виведено формули для ймовірностей станів і умову ергодичності. Проведено порівняння системи, що розглядається, з чистою системою Лакатоша.

Ключові слова: система обслуговування, система обслуговування з повторенням, орбіта, система обслуговування з циклічним часом очікування, комбінована дисципліна обслуговування, умова ергодичності системи.

E.V. Koba

RETRIAL QUEUEING SYSTEM $M/M/1/0$ WITH COMBINED DISCIPLINE OF SERVICE

Abstract. The paper considers the retrial queueing system $M/M/1/0$ with combined discipline of service, namely, a customer from the orbit is served in its turn, but in case of a free channel an arrival from the original flow is serviced immediately. The author obtained the expressions for state probabilities as well as the ergodicity conditions. The system is compared with the Lakatos type system.

Keywords: queueing system, retrial queueing system, orbit, cycling-waiting queueing system, combined discipline of service, stability condition of system.

Коба Елена Викторовна,
доктор физ.-мат. наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института кибернетики НАН Украины им. В.М. Глушкова, Киев, e-mail: e-koba@yandex.ru.