УДК 004.42:510.69

О.С. Шкільняк

ВІДНОШЕННЯ ЛОГІЧНОГО НАСЛІДКУ В ЛОГІКАХ МОНОТОННИХ ПРЕДИКАТІВ ТА ЛОГІКАХ АНТИТОННИХ ПРЕДИКАТІВ

Досліджено відношення логічного наслідку в чистих першопорядкових композиційно-номінативних логіках часткових однозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів. Описано відношення неспростовнісного, істиннісного, хибнісного та сильного логічного наслідку в логіках монотонних предикатів і логіках антитонних предикатів. Наведено приклади, які засвідчують відмінності одних відношень від інших, та встановлено співвідношення між різними відношеннями логічного наслідку.
Ключові слова: логіка, предикат, семантика, логічний наслідок.

Вступ

Апарат математичної логіки лежить в основі сучасних інформаційних і програмних систем (див., напр., [1]). Для цього зазвичай використовується класична логіка предикатів та базовані на її основі спеціальні логіки. Проте класична логіка має [2] низку обмежень, що ускладнює її використання. Тому набуває актуальності проблема побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Такими є композиційно-номінативні логіки часткових квазіарних предикатів.

Центральним для логіки є поняття логічного наслідку. Широке використання в програмуванні часткових відображень, які можуть бути неоднозначними, виводить на перший план проблему вивчення відношень логічного наслідку для логік із нетрадиційними семантиками. Для першопорядкових композиційно-номінативних логік такі відношення описано в [2–5]. Вивченню відношень логічного наслідку для логік монотонних предикатів і логік антитонних предикатів присвячена дана робота, вона є безпосереднім продовженням роботи [4].

Метою даної статті є дослідження відношень логічного наслідку в чистих першопорядкових композиційно-номінативних логік (ЧКНЛ) однозначних та неоднозначних квазіарних предикатів. Розглядаються відношення неспростовнісного, істиннісного, хибнісного, сильного логічного наслідку. Основний акцент зроблено на вивченні цих відношень в різних семантиках логік монотонних предикатів і логік антитонних предикатів. Виділено 20 таких відношень, з'ясовано, що із цих відношень лише 7 попарно різних. Наведено приклади, які засвідчують відмінності одних відношень від інших. Встановлено співвідношення між різними відношеннями логічного наслідку.

Невизначені в цій статті поняття тлумачимо в сенсі робіт [2, 5].

Для полегшення читання опишемо основні поняття і визначення.

1. Композиційні алгебри квазіарних предикатів

В першопорядкових логіках предикати задаються на множинах пар, перша компонента яких – ім'я, а друга – його значення. Такі множини пар названо іменними множинами (ІМ). Предикати, задані на ІМ, називають квазіарними.

V-*A*-іменна множина (*V*-*A*-ІМ) – це часткова однозначна функція вигляду $d : V \to A$. Трактуємо V і A як множини предметних імен (змінних) і предметних (базових) значень. Клас всіх *V*-*A*-іменних множин будемо позначати ${}^{V}\!A$.

V-*A*-квазіарний предикат – це часткова (неоднозначна, взагалі кажучи) функція вигляду $P : {}^{V}\!A \to \{T, F\}$. Тут $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

Неоднозначні *V*-*A*-квазіарні предикати трактуємо як відношення між ${}^{V}\!A$ та $\{T, F\}$. Такі предикати названо [2] предикатами реляційного типу, або *R*-предикатами. Множину значень, які *R*-предикат *P* може прийняти на $d\in{}^{V}A$, позначимо $P(d)$. Маємо $P(d)\subseteq\{T, F\}$, тому $P(d)$ може набувати одне із значень $\{\varnothing\}$, $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$.

Клас *V-A*-квазіарних *R*-предикатів позначають PrR_A^V.

Кожний *R*-предикат $P: {}^{V}A\rightarrow\{T, F\}$ задається двома множинами – областю істинності $T(P)$ та областю хибності $F(P)$:

$$T(P)=\{d\in{}^{V}A \mid T\in P(d)\};$$

$$F(P)=\{d\in{}^{V}A \mid F\in P(d)\}.$$

V-A-квазіарний предикат P:

– однозначний, якщо $T(P)\cap F(P)=\varnothing$;

– тотальний, якщо $T(P)\cup F(P)={}^{V}A$;

– неспростовний, якщо $F(P)=\varnothing$;

– виконуваний, якщо $T(P)\neq\varnothing$;

– тотожно істинний (позначаємо T), якщо $T(P)={}^{V}A$ та $F(P)=\varnothing$;

– тотожно хибний (позначаємо F), якщо $T(P)=\varnothing$ та $F(P)={}^{V}A$;

– всюди невизначений (позначаємо $\bot$), якщо $T(P)=\varnothing$ та $F(P)=\varnothing$;

– тотально насичений (позначаємо $\top$), якщо $T(P)={}^{V}A$ та $F(P)={}^{V}A$.

Часткові однозначні предикати названо [4, 5] *P*-предикатами, тотальні названо *T*-предикатами, тотальні однозначні – *TS*-предикатами. Класи таких *V-A*-квазіарних предикатів будемо відповідно позначати PrP_A^V, PrT_A^V, $PrTS_A^V$.

Предикат $P: {}^{V}A\rightarrow\{T, F\}$ монотонний, якщо: $d\subseteq d' \Rightarrow P(d)\subseteq P(d')$.

Предикат $P: {}^{V}A\rightarrow\{T, F\}$ антитонний, якщо: $d\subseteq d' \Rightarrow P(d)\supseteq P(d')$.

Для однозначних предикатів монотонність стає еквітонністю. Однозначний $P: {}^{V}A\rightarrow\{T, F\}$ еквітонний, якщо:

$$(P(d)\downarrow \text{ та } d\subseteq d')\Rightarrow P(d')\downarrow=P(d).$$

Монотонні *R*-предикати, антитонні *R*-предикати, еквітонні *P*-предикати, антитонні *T*-предикати відповідно називають (див. [5]) *RM*-предикатами, *RA*-предикатами, *PE*-предикатами, *TA*-предикатами. Класи цих предикатів будемо позначати $PrRM_A^V, PrRA_A^V, PrPE_A^V, PrTA_A^V$.

Константні предикати $\bot, \top, \mathrm{T}, \mathrm{F}$ монотонні (еквітонні) й антитонні, при цьому предикати $\bot, \mathrm{T}, \mathrm{F}$ – однозначні.

Предикати-індикатори *Ex* наявності у вхідних даних компоненти з іменем $x\in V$ задаємо [5] так:

$$T(Ex)=\{d \mid d(x)\downarrow\},\ F(Ex)=\{d \mid d(x)\uparrow\}.$$

Предикати-індикатори *Ex* тотальні, однозначні, немонотонні, неантитонні.

Предикат $\tilde{P}$ називають [5] дуальним до предиката P, якщо:

$$T(\tilde{P})=\overline{F(P)};\ F(\tilde{P})=\overline{T(P)}.$$

Безпосередньо із визначень маємо:

Q – *P*-предикат $\Leftrightarrow$ $\tilde{Q}$ – *T*-предикат;

Q – *T*-предикат $\Leftrightarrow$ $\tilde{Q}$ – *P*-предикат;

Q – *PE*-предикат $\Leftrightarrow$ $\tilde{Q}$ – *TA*-предикат;

Q – *TA*-предикат $\Leftrightarrow$ $\tilde{Q}$ – *PE*-предикат;

якщо Q – *TS*-предикат, то $\tilde{Q}=Q$.

Спеціальне відображення дуалізації $\delta: PrR_A^V\rightarrow PrR_A^V$ задають [5] так: $\delta(P)=\tilde{P}$.

Маємо [5] такі властивості:

$$\delta(\mathrm{T})=\mathrm{T},\ \delta(\mathrm{F})=\mathrm{F},\ \delta(\bot)=\top,\ \delta(\top)=\bot;$$

$$\delta(PrR_A^V)=PrR_A^V,\ \delta(PrTS_A^V)=PrTS_A^V,$$

$$\delta(PrP_A^V)=PrT_A^V,\ \delta(PrT_A^V)=PrP_A^V;$$

$$\delta(PrPE_A^V)=PrTA_A^V,\ \delta(PrTA_A^V)=PrPE_A^V,$$

$$\delta(PrRM_A^V)=PrRA_A^V,\ \delta(\Pr RA_A^V)=\Pr RM_A^V.$$

Базовими композиціями ЧКНЛ є [2] логічні зв'язки $\neg$ і $\vee$, композиції реномінації $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та квантифікації $\exists x$.

Для $\bot, \top$, T та F маємо (див. [5]):

$$\neg\bot=\bot,\ \bot\vee\bot=\bot,\ \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\bot)=\bot,\ \exists x(\bot)=\bot;$$

$$\neg\top=\top,\ \top\vee\top=\top,\ \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\top)=\top,\ \exists x(\top)=\top;$$

$$\neg\mathrm{T}=\mathrm{F}, \neg\mathrm{F}=\mathrm{T}, \mathrm{F}\vee\mathrm{F}=\mathrm{F};$$

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{T})=\mathrm{T}, \exists x(\mathrm{T})=\mathrm{T}, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{F})=\mathrm{F}, \exists x(\mathrm{F})=\mathrm{F};$$

$$\mathrm{T}\vee\mathrm{T}=\mathrm{T}\vee\bot=\bot\vee\mathrm{T}=\mathrm{T}\vee\mathrm{F}=\mathrm{F}\vee\mathrm{T}=\mathrm{T};$$

$$\mathrm{F}\vee\bot=\bot\vee\mathrm{F}=\bot;\ \bot\vee\top=\top\vee\bot=\mathrm{T};$$

$$\mathrm{T}\vee\top=\top\vee\mathrm{T}=\mathrm{F}\vee\top=\top\vee\mathrm{F}=\top.$$

Позначимо $CQ=\{\neg,\vee,\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}},\exists x\}$.

Чиста першопорядкова алгебра квазіарних предикатів – це композиційна алгебра $QR_A^V=(PrR_A^V,CQ)$.

Композиції $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}},\exists x$ зберігають [2] однозначність, тотальність, монотонність, антитонність предикатів. Тому щодо $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$ замкнені такі класи: *P*-предикатів, *T*-предикатів, *TS*-предикатів; монотонних (еквітонних) предикатів, антитонних предикатів.

Таким чином, можна виділити такі підалгебри алгебри QR_A^V:

$$QP_A^V=(PrP_A^V,CQ),$$

$$QT_A^V=(PrT_A^V,CQ),$$

$$QTS_A^V=(PrTS_A^V,CQ),$$

$$QRM_A^V=(PrRM_A^V,CQ),$$

$$QRA_A^V=(PrRA_A^V,CQ),$$

$$QPE_A^V=(PrPE_A^V,CQ),$$

$$QTA_A^V=(PrTA_A^V,CQ).$$

Те, що $\aleph$ є підалгеброю алгебри $\Re$, позначаємо $\aleph\prec\Re$. Тоді [5] маємо:

$$QTS_A^V\prec QP_A^V \text{ та } QTS_A^V\prec QT_A^V;$$

$$QPE_A^V\prec QP_A^V \text{ та } QPE_A^V\prec QRM_A^V;$$

$$QTA_A^V\prec QT_A^V \text{ та } QTA_A^V\prec QRA_A^V.$$

Нехай δ – відображення дуалізації.

Алгебри (Pr_1,CQ) та (Pr_2,CQ) дуальні, якщо $\delta(\mathrm{Pr}_1)=\mathrm{Pr}_2$ та $\delta(\mathrm{Pr}_2)=\mathrm{Pr}_1$.

Маємо такі дуальні пари алгебр:

QP_A^V та QT_A^V,

QPE_A^V та QTA_A^V,

QRM_A^V та QRA_A^V.

Алгебри QR_A^V та QTS_A^V автодуальні.

2. Мови та їх інтерпретації

Семантичними моделями ЧКНЛ є [2] чисті першопорядкові композиційні системи квазіарних предикатів вигляду (A, Pr, CQ). Така система задає алгебру даних (A, Pr) і композиційну алгебру предикатів (Pr, CQ). Терми композиційної алгебри трактуємо як формули мови ЧКНЛ.

Алфавіт мови: множини V предметних імен (змінних) та $U\subseteq V$ тотально неістотних [2] імен; множина символів базових композицій $Cs=\{\neg,\vee,R_{\bar{x}}^{\bar{v}},\exists x\}$, множина Ps предикатних символів (сигнатура). Розширена сигнатура мови – це $\Sigma=(V, U, Cs, Ps)$.

Індуктивне визначення множини Fr формул таке:

– $Ps\subseteq Fr$; формули $p\in Ps$ – атомарні;

– $\Phi,\Psi\in Fr\Rightarrow\neg\Phi,\vee\Phi\Psi,R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi,\exists x\Phi\in Fr$.

Інтерпретуємо мову сигнатури Σ на композиційній системі (A, Pr, CQ) за допомогою тотального однозначного відображення $I:Ps\to\mathrm{Pr}$. Розширимо I до відображення $I:Fr\to\mathrm{Pr}$ згідно побудови складних формул за допомогою символів Cs:

– $I(\neg\Phi)=\neg(I(\Phi))$,

– $I(\vee\Phi\Psi)=\vee(I(\Phi),I(\Psi))$,

– $I(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi))=\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(I(\Phi))$,

– $I(\exists x\Phi)=\exists x(I(\Phi))$.

Інтерпретація мови ЧКНЛ сигнатури Σ – це $\boldsymbol{J}=(\mathrm{CS},\Sigma,I)$. Скорочено інтерпретації будемо позначати (A, I).

Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ – позначимо Φ_J.

Виділення підалгебр квазіарних предикатів виділяє відповідні класи інтерпретацій. Такі класи інтерпретацій називають *семантиками*.

Маємо загальний клас R-інтерпретацій та підкласи P-інтерпретацій, T-інтерпретацій, TS-інтерпретацій, PE-інтерпретацій, TA-інтерпретацій, RM-інтерпретацій, RA-інтерпретацій. Ці класи інтерпретацій, або семантики, відповідно позначають так: $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{TS}$, $\boldsymbol{PE}$, $\boldsymbol{TA}$, $\boldsymbol{RM}$, $\boldsymbol{RA}$.

Для семантик маємо (див. [5]):

$$\boldsymbol{PE} \subset \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{TA} \subset \boldsymbol{T};$$

$$\boldsymbol{TS} \subset \boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{TS} \subset \boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{R};$$

$$\boldsymbol{PE} \subset \boldsymbol{RM} \subset \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{TA} \subset \boldsymbol{RA} \subset \boldsymbol{R}.$$

Дуальна до інтерпретації $\boldsymbol{J} = (A, I)$ інтерпретація $\delta(\boldsymbol{J}) = (A, I_\delta)$ задається так: для всіх $p \in Ps$ маємо $T(p_{\delta(J)}) = \overline{F(p_J)}$ та $F(p_{\delta(J)}) = \overline{T(p_J)}$.

Тоді $\boldsymbol{J}$ дуальна до $\delta(\boldsymbol{J})$.

Якщо інтерпретації $\boldsymbol{J}$ та ϑ дуальні, то (див. [2]): для всіх $\Phi \in Fr$ маємо

$$T(\Phi_J) = \overline{F(\Phi_\vartheta)} \text{ та } F(\Phi_\vartheta) = \overline{T(\Phi_J)}.$$

Якщо $\boldsymbol{J}$ та $\boldsymbol{G}$ дуальні, то:

– Φ_J монотонний $\Leftrightarrow$ Φ_G антитонний;

– Φ_G антитонний $\Leftrightarrow$ Φ_J монотонний.

Виділення дуальних пар предикатних алгебр індукує виділення дуальних пар семантик $\boldsymbol{P}$ та $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{PE}$ та $\boldsymbol{TA}$, $\boldsymbol{RM}$ та $\boldsymbol{RA}$.

Семантики $\boldsymbol{R}$ та $\boldsymbol{TS}$ автодуальні.

Для формул мови ЧКНЛ введено [2] поняття виконуваної, неспростовної, тотожно істинної, тотожно хибної формули.

Семантичні властивості ЧКНЛ досліджено, зокрема, в [2–5].

3. Відношення логічного наслідку

На множині формул можна ввести [2, 4, 5] низку відношень, які формалізують центральне для логіки поняття логічного наслідку. Спочатку вводимо відношення наслідку для двох формул при фіксованій інтерпретації $\boldsymbol{J}$.

1. Істиннісний, або T-наслідок ${}_J|\!=_T$:

$$\Phi_J |\!=_T \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \subseteq T(\Psi_J).$$

2. Хибнісний, або F-наслідок ${}_J|\!=_F$:

$$\Phi_J |\!=_F \Psi \Leftrightarrow F(\Psi_J) \subseteq F(\Phi_J).$$

3. Сильний, або TF-наслідок ${}_J|\!=_{TF}$:

$$\Phi_J |\!=_{TF} \Psi \Leftrightarrow \Phi_J |\!=_T \Psi \text{ та } \Phi_J |\!=_F \Psi.$$

4. Неспростовнісний, або IR-наслідок ${}_J|\!=_{IR}$:

$$\Phi_J |\!=_{IR} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) = \varnothing.$$

5. Дуальний до IR, або DI-наслідок ${}_J|\!=_{DI}$:

$$\Phi_J |\!=_{DI} \Psi \Leftrightarrow F(\Phi_J) \cup T(\Psi_J) = {}^V\!A.$$

Відповідні відношення логічного наслідку в семантиці $\boldsymbol{\alpha}$ визначаємо за такою схемою:

$\Phi\, {}^\alpha|\!=_* \Psi$, якщо $\Phi_J |\!=_* \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

Зазначені відношення описано в [2].

Нехай інтерпретації $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ дуальні. Тоді [2, 5] маємо:

$$\Phi_A |\!=_T \Psi \Leftrightarrow \Phi_B |\!=_F \Psi,$$

$$\Phi_A |\!=_F \Psi \Leftrightarrow \Phi_B |\!=_T \Psi,$$

$$\Phi_A |\!=_{IR} \Psi \Leftrightarrow \Phi_B |\!=_{DI} \Psi,$$

$$\Phi_A |\!=_{DI} \Psi \Leftrightarrow \Phi_B |\!=_{IR} \Psi,$$

$$\Phi_A |\!=_{TF} \Psi \Leftrightarrow \Phi_B |\!=_{TF} \Psi.$$

При розширенні семантики відношення логічного наслідку звужується (тут $*$ – це T, F, TF, IR, DI):

Теорема 1. Нехай для семантик $\boldsymbol{\alpha}$ та $\boldsymbol{\beta}$ маємо $\boldsymbol{\alpha} \subseteq \boldsymbol{\beta}$. Тоді ${}^\beta|\!=_* \subseteq {}^\alpha|\!=_*$

Справді, нехай $\Phi\, {}^\beta|\!=_* \Psi$, тоді $\Phi_J |\!=_* \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\beta}$. Але $\boldsymbol{\alpha} \subseteq \boldsymbol{\beta}$, тому $\Phi_J |\!=_* \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$. Звідси $\Phi\, {}^\alpha|\!=_* \Psi$. Отже, ${}^\beta|\!=_* \subseteq {}^\alpha|\!=_*$.

Для наведених відношень логічного наслідку маємо (див. [2, 4]):

$${}^P|\!=_{DI} = {}^T|\!=_{IR} = {}^R|\!=_{IR} = {}^R|\!=_{DI} = \varnothing;$$

$${}^P|\!=_T = {}^T|\!=_F;\ {}^P|\!=_F = {}^T|\!=_T;\ {}^P|\!=_{IR} = {}^T|\!=_{DI};$$

$^{P}|=_{TF}={}^{T}|=_{TF}$; $^{R}|=_{T}={}^{R}|=_{F}={}^{R}|=_{TF}$.

Серед цих відношень виявилося [2, 4] лише 5 попарно різних:

$$^{P}|=_{IR},\ ^{P}|=_{T},\ ^{P}|=_{F},\ ^{P}|=_{TF},\ ^{R}|=_{TF}.$$

Для логіки *TS*-предикатів і класичної логіки ці 5 відношень втрачають відмінності та стають єдиним відношенням:

$$^{TS}|=_{TF}={}^{TS}|=_{T}={}^{TS}|=_{F}={}^{TS}|=_{IR}={}^{TS}|=_{DI}.$$

Маємо [4, 5] такі співвідношення:

$$^{P}|=_{TF}\subset{}^{P}|=_{T},\ ^{P}|=_{TF}\subset{}^{P}|=_{F};$$

$$^{R}|=_{TF}\subset{}^{P}|=_{TF};$$

$$^{P}|=_{T}\cup{}^{P}|=_{F}\subset{}^{P}|=_{IR};$$

$$^{P}|=_{T}\not\subset{}^{P}|=_{F},\ ^{P}|=_{F}\not\subset{}^{P}|=_{T}.$$

Обмежуючи розглянуті відношення на семантики монотонних (еквітонних) предикатів і антитонних предикатів, отримуємо такі відношення:

$$^{PE}|=_{IR},\ ^{TA}|=_{DI},\ ^{PE}|=_{DI},\ ^{TA}|=_{IR},$$

$$^{PE}|=_{T},\ ^{TA}|=_{F},\ ^{PE}|=_{F},\ ^{TA}|=_{T},$$

$$^{PE}|=_{TF},\ ^{TA}|=_{TF};$$

$$^{RM}|=_{IR},\ ^{RA}|=_{IR},\ ^{RM}|=_{DI},\ ^{RA}|=_{DI},$$

$$^{RM}|=_{T},\ ^{RA}|=_{F},\ ^{RA}|=_{T},\ ^{RM}|=_{F},$$

$$^{RM}|=_{TF},\ ^{RA}|=_{TF}.$$

Беручи до уваги дуальність пар ***PE*** і ***TA*** та ***RM*** і ***RA***, отримуємо:

Теорема 2.

1) $^{PE}|=_{IR}={}^{TA}|=_{DI}$, $^{PE}|=_{T}={}^{TA}|=_{F}$,

$^{PE}|=_{F}={}^{TA}|=_{T}$, $^{PE}|=_{TF}={}^{TA}|=_{TF}$;

2) $^{RM}|=_{T}={}^{RA}|=_{F}$, $^{RM}|=_{F}={}^{RA}|=_{T}$,

$^{RM}|=_{TF}={}^{RA}|=_{TF}$;

3) $^{PE}|=_{DI}={}^{TA}|=_{IR}=\varnothing$,

$^{RM}|=_{IR}={}^{RA}|=_{IR}={}^{RM}|=_{DI}={}^{RA}|=_{DI}=\varnothing$.

Таким чином, із роглянутих відношень логічного наслідку для монотонних (еквітонних) предикатів і антитонних предикатів залишається не більше 7 різних:

$$^{PE}|=_{IR},\ ^{PE}|=_{T},\ ^{PE}|=_{F},\ ^{PE}|=_{TF},$$

$$^{RM}|=_{T},\ ^{RM}|=_{F},\ ^{RM}|=_{TF}.$$

Розглянемо співвідношення між відношеннями логічного наслідку.

Беручи до уваги теорему 1, отримуємо:

Теорема 3.

$^{RM}|=_{TF}\subseteq{}^{RM}|=_{T}$, $^{RM}|=_{TF}\subseteq{}^{RM}|=_{F}$,

$^{RM}|=_{TF}\subseteq{}^{PE}|=_{TF}$, $^{RM}|=_{T}\subseteq{}^{PE}|=_{T}$,

$^{RM}|=_{F}\subseteq{}^{PE}|=_{F}$;

$^{PE}|=_{TF}\subseteq{}^{PE}|=_{T}\subseteq{}^{PE}|=_{IR}$,

$^{PE}|=_{TF}\subseteq{}^{PE}|=_{F}\subseteq{}^{PE}|=_{IR}$;

$^{R}|=_{TF}\subseteq{}^{RM}|=_{TF}$, $^{P}|=_{TF}\subseteq{}^{PE}|=_{TF}$,

$^{P}|=_{T}\subseteq{}^{PE}|=_{T}$, $^{P}|=_{F}\subseteq{}^{PE}|=_{F}$,

$^{P}|=_{IR}\subseteq{}^{PE}|=_{IR}$.

Відомо [2], що:

$$\neg\Phi\,\&\,\Phi\ {}^{P}|=_{T}\vartheta,\ \vartheta\ {}^{P}|=_{F}\Psi\vee\neg\Psi,$$

$$\neg\Phi\,\&\,\Phi\ {}^{P}|=_{TF}\Psi\vee\neg\Psi.$$

За теоремою 3 тоді отримуємо:

Твердження 1. 1) $\neg\Phi\,\&\,\Phi\ {}^{PE}|=_{T}\vartheta$;

2) $\vartheta\ {}^{PE}|=_{F}\Psi\vee\neg\Psi$;

3) $\neg\Phi\&\Phi\ {}^{PE}|=_{TF}\Psi\vee\neg\Psi$.

Водночас [2] маємо:

$$\neg\Phi\,\&\,\Phi\ {}^{P}|\neq_{F}\vartheta,\ \vartheta\ {}^{P}|\neq_{T}\Psi\vee\neg\Psi,$$

$$\neg\Phi\,\&\,\Phi\ {}^{R}|\neq_{TF}\Psi\vee\neg\Psi.$$

Останні твердження можна посилити, формулюючи їх для семантик *PE* і *RM*. Для цього розглянемо декілька прикладів. При формулюванні прикладів для зручності використовуємо символи розширеної сигнатури: Ex для предикатів-індикаторів та $\perp, \top, \mathrm{T}, \mathrm{F}$ для константних предикатів.

Зафіксуємо довільну $\boldsymbol{J} = (A, I)$.

Приклад 1. $\neg\perp \& \perp\ {}_J|\neq_F\ \mathrm{F}$.

Маємо $F(\mathrm{F}) = {}^VA$, проте $F(\perp \& \neg\perp) = F(\perp) \cup F(\neg\perp) = F(\perp) \cup T(\perp) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$.

Приклад 2. $\mathrm{T}\ {}_J|\neq_T \perp\vee\neg\perp$.

Маємо $T(\mathrm{T}) = {}^VA$, проте $T(\perp \vee \neg\perp) = T(\perp) \cup T(\neg\perp) = T(\perp) \cup F(\perp) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$.

Приклад 3. $\top \& \neg\top\ {}_J|\neq_T \perp \vee \neg\perp$ та $\perp \& \neg\perp\ {}_J|\neq_F \top \vee \neg\top$.

Справді, маємо:

$T(\top \& \neg\top) = T(\top) \cap F(\top) = {}^VA \cap {}^VA = {}^VA$;

$T(\perp \vee \neg\perp) = T(\perp) \cup T(\neg\perp) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$;

$F(\top \vee \neg\top) = F(\top) \cap T(\top) = {}^VA \cap {}^VA = {}^VA$;

$F(\perp \& \neg\perp) = F(\perp) \cup F(\neg\perp) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$.

Таким чином, отримуємо:

Твердження 2. 1) $\neg\Phi \& \Phi\ {}^{PE}|\neq_F \vartheta$;

2) $\vartheta\ {}^{PE}|\neq_T \Psi \vee \neg\Psi$;

3) $\Phi \& \neg\Phi\ {}^{RM}|\neq_T \Psi \vee \neg\Psi$,

$\Phi \& \neg\Phi\ {}^{RM}|\neq_F \Psi \vee \neg\Psi$.

Згідно теореми 3 тоді отримуємо

Наслідок 1.

1) $\neg\Phi \& \Phi\ {}^{PE}|\neq_{TF} \vartheta$;

2) $\vartheta\ {}^{PE}|\neq_{TF} \Psi \vee \neg\Psi$;

3) $\Phi \& \neg\Phi\ {}^{RM}|\neq_{TF} \Psi \vee \neg\Psi$.

Маємо $\Phi\ {}^P|\neq_{IR} \exists x\Phi$ та $\forall x \Psi\ {}^P|\neq_{IR} \Psi$ (див. [2]). Зазначені твердження можна посилити до $\Phi\&\forall x \Psi\ {}^P|\neq_{IR} \exists x\Phi\vee\Psi$. Наведемо відповідні приклади.

Приклад 4. Маємо

$\neg Ex\ {}_J|\neq_{IR} \exists x\neg Ex$, $\forall x Ex\ {}_J|\neq_{IR} Ex$,

$\neg Ex \& \forall x Ex\ {}_J|\neq_{IR} \exists x\neg Ex \vee Ex$.

Маємо $(Ex)_J(d) = F$ і $(\neg Ex)_J(d) = T$ для всіх $d\in {}^VA$, тому $(\exists x\neg Ex)_J = \mathrm{F}$ і $(\forall x Ex)_J = \mathrm{T}$. Для $d\in {}^VA$ такого, що $d(x)\uparrow$, маємо $d\in T(\neg Ex_J)$, $d\in F(Ex_J)$, $d\in T((\neg Ex \& \forall x Ex)_J)$, $d\in F((\exists x\neg Ex \vee Ex)_J)$. Тому $\neg Ex\ {}_J|\neq_{IR} \exists x\neg Ex$, $\forall x Ex\ {}_J|\neq_{IR} Ex$, $\neg Ex \& \forall x Ex\ {}_J|\neq_{IR} \exists x\neg Ex \vee Ex$.

Таким чином.

Твердження 3.

1) $\Phi\ {}^P|\neq_{IR} \exists x\Phi$;

2) $\forall x \Psi\ {}^P|\neq_{IR} \Psi$;

3) $\Phi\&\forall x \Psi\ {}^P|\neq_{IR} \exists x\Phi\vee\Psi$.

Беручи до уваги теорему 3, отримуємо (тут $|\neq$ – це ${}^P|\neq_{IR}$, ${}^P|\neq_T$, ${}^P|\neq_F$, ${}^P|\neq_{TF}$, ${}^R|\neq_{TF}$):

Теорема 4.

1) $\Phi\ |\neq \exists x\, \Phi$;

2) $\forall x\, \Psi\ |\neq \Psi$;

3) $\Phi\&\forall x\, \Psi\ |\neq \exists x\Phi\vee \Psi$.

Для монотонних (еквітонних) предикатів маємо (див. [2]):

$T(Q) \subseteq T(\exists xQ)$ та $F(Q) \subseteq F(\forall xQ)$,

$F(\exists xQ) \not\subseteq F(Q)$ та $T(\forall xQ) \not\subseteq T(Q)$.

Звідси отримуємо:

Твердження 4.

$\Phi\ {}^{RM}|=_T \exists x\Phi$ та $\forall x\Psi\ {}^{RM}|=_F \Psi$,

$\Phi\ {}^{PE}|\neq_F \exists x\Phi$ та $\forall x\Psi\ {}^{PE}|\neq_T \Psi$.

Відмінність ${}^{PE}|=_T$ та ${}^{PE}|=_F$ засвідчує

Теорема 5.

1) $\neg\varphi\&\varphi\vee\Phi\ {}^{PE}|=_T \exists x\Phi$,

$\forall x\Psi\ {}^{PE}|=_F \Psi\&(\neg\varphi\vee\varphi)$;

2) $\neg\varphi\&\varphi\vee\Phi\ {}^{PE}|\neq_F \exists x\Phi$,

$\forall x\Psi\ {}^{PE}|\neq_T\ \Psi\&(\neg\varphi\vee\varphi)$.

Для P-предикатів маємо $T(\neg Q\&Q) = F(\neg Q\vee Q) = \varnothing$, звідки $T(\neg Q\&Q\vee S) = T(S)$ та $F(S\&(\neg Q\vee Q)) = F(S)$; також маємо $F(\neg Q\&Q\vee S)\subseteq F(S)$ та $T(S\&(\neg Q\vee Q))\subseteq T(S)$. Враховуючи $T(S)\subseteq T(\exists xS)$ та $F(S)\subseteq F(\forall xS)$, маємо п. 1, а враховуючи $F(\exists xS)\not\subseteq F(S)$ та $T(\forall xS)\not\subseteq T(S)$, отримуємо п. 2.

Теорема 6.

1) $\neg\varphi\&\varphi\vee\Phi\ {}^{RM}|\neq_T\ \exists x\Phi$,

$\forall x\Psi\ {}^{RM}|\neq_F\ \Psi\&(\neg\varphi\vee\varphi)$;

2) $\neg\varphi\&\varphi\vee\Phi\ {}^{RM}|\neq_F\ \exists x\Phi$,

$\forall x\Psi\ {}^{RM}|\neq_T\ \Psi\&(\neg\varphi\vee\varphi)$.

Для доведення розглянемо приклад.

Приклад 5. $\neg\top\&\top\vee\bot\ {}_J|\neq_T\ \exists x\bot$ та $\forall x\bot\ {}_J|\neq_F\ \bot\&(\neg\top\vee\top)$.

Маємо $T(\top) = F(\top) = {}^VA$, звідки $T(\neg\top\&\top) = F(\neg\top\vee\top) = {}^VA$. Проте $T(\bot) = F(\bot) = \varnothing$, тому $T(\neg\top\&\top\vee\bot) = {}^VA$ та $F(\bot\&(\neg\top\vee\top)) = {}^VA$. Водночас маємо $T(\exists x\bot) = F(\exists x\bot) = T(\forall x\bot) = F(\forall x\bot) = \varnothing$, звідки отримуємо:

$$T(\neg\top\&\top\vee\bot)\not\subseteq T(\exists x\bot),$$

$$F(\bot\&(\neg\top\vee\top))\not\subseteq F(\forall x\bot).$$

Звідси випливає п. 1 теореми 6.

П. 2 теореми 6 випливає з теорем 3 та 5.

Твердження 5.

$\Phi\&\forall x\Psi\ {}^{RM}|=_{TF}\ \exists x\Phi\vee\Psi$.

Із $\Phi\ {}^{RM}|=_T\ \exists x\Phi$ та $\forall x\Psi\ {}^{RM}|=_F\ \Psi$ за монотонністю відношень ${}^{RM}|=_T$ та ${}^{RM}|=_F$ маємо $\Phi\&\forall x\Psi\ {}^{RM}|=_T\ \exists x\Phi\vee\Psi$ і $\Phi\&\forall x\Psi\ {}^{RM}|=_F\ \exists x\Phi\vee\Psi$, звідки отримуємо $\Phi\&\forall x\Psi\ {}^{RM}|=_{TF}\ \exists x\Phi\vee\Psi$.

Беручи до уваги теорему 3, отримуємо (тут $|=$ – це ${}^{PE}|=_{IR}$, ${}^{PE}|=_T$, ${}^{PE}|=_F$, ${}^{PE}|=_{TF}$, ${}^{RM}|=_T$, ${}^{RM}|=_F$, ${}^{RM}|=_{TF}$):

Теорема 7. $\Phi\&\forall x\Psi\ |=\ \exists x\Phi\vee\Psi$.

Теорема 8. Маємо

$(\neg\varphi\&\varphi\vee\Phi)\&\forall x\Psi\ {}^{PE}|=_{TF}\ \exists x\Phi\vee\Psi\&(\neg\varphi\vee\varphi)$,

$(\neg\varphi\&\varphi\vee\Phi)\&\forall x\Psi\ {}^{RM}|\neq_T\ \exists x\Phi\vee\Psi\&(\neg\varphi\vee\varphi)$,

$(\neg\varphi\&\varphi\vee\Phi)\&\forall x\Psi\ {}^{RM}|\neq_F\ \exists x\Phi\vee\Psi\&(\neg\varphi\vee\varphi)$.

Перше твердження теореми випливає з п. 1 теореми 5 і монотонності відношень ${}^{PE}|=_T$ та ${}^{PE}|=_F$.

Маємо $\exists x\bot=\bot$, $\forall xEx = \mathrm{T}$, $\exists x\neg Ex = \mathrm{F}$; ${}^VA = T(\neg\top\&\top) = T(\neg\top\vee\top) = F(\neg\top\&\top) = T(\neg\top\vee\top)$. Нехай $(\neg\top\&\top\vee\bot)\&\forall xEx$, $\exists x\bot\vee Ex\&(\neg\top\vee\top)$, $(\neg\top\&\top\vee\neg Ex)\&\bot$, $\exists x\neg Ex\vee\bot\&(\neg\top\vee\top)$ – це α, β, γ, δ. Тоді $T(\alpha) = {}^VA$, $T(\beta)\subset{}^VA$, $F(\gamma)\subset{}^VA$, $F(\delta) = {}^VA$. Тому $(\neg\top\&\top\vee\bot)\&\forall xEx\ {}_J|\neq_T\ \exists x\bot\vee Ex\&(\neg\top\vee\top)$, $(\neg\top\&\top\vee\neg Ex)\&\forall x\bot\ {}_J|\neq_F\ \exists x\neg Ex\vee\bot\&(\neg\top\vee\top)$. Звідси друге та третє твердження теореми.

Для P-предикатів завжди маємо $T(\neg Q\&Q\vee S) = T(S)$ та $F(S\&(\neg Q\vee Q)) = F(S)$, тому, згідно теореми 4, отримуємо:

Твердження 6.

$\neg\varphi\&\varphi\vee\Phi\ {}^{P}|\neq_{IR}\ \exists x\Phi$, $\forall x\Psi\ {}^{P}|\neq_{IR}\ \Psi\&(\neg\varphi\vee\varphi)$,

$\neg\varphi\&\varphi\vee\Phi\&\forall x\Psi\ {}^{P}|\neq_{IR}\ (\exists x\Phi\vee\Psi)\&(\neg\varphi\vee\varphi)$.

Враховуючи теорему 3, остаточно отримуємо:

Теорема 9. Маємо

$\neg\varphi\&\varphi\vee\Phi\ |\neq\ \exists x\Phi$, $\forall x\Psi\ |\neq\ \Psi\&(\neg\varphi\vee\varphi)$,

$(\neg\varphi\&\varphi\vee\Phi)\&\forall x\Psi\ |\neq\ \exists x\Phi\vee\Psi\&(\neg\varphi\vee\varphi)$.

Тут $|\neq$ – це ${}^{P}|\neq_{IR}$, ${}^{P}|\neq_T$, ${}^{P}|\neq_F$, ${}^{P}|\neq_{TF}$, ${}^{R}|\neq_{TF}$.

Зведемо отримані результати щодо наявності чи відсутності того чи іншого логічного наслідку для відповідних пар формул в таблицю (таблиця).

В цій таблиці використано такі скорочення (тут |= позначає одне з описаних відношень):

ρ_1 – це $\neg\Phi\&\Phi \models \vartheta$,

ρ_2 – це $\vartheta \models \Psi\vee\neg\Psi$,

ρ_3 – це $\neg\Phi\&\Phi \models \Psi\vee\neg\Psi$,

ρ_4 – це $\Phi \models \exists x\Phi$,

ρ_5 – це $\forall x\Psi \models \Psi$,

ρ_6 – це $\Phi\&\forall x\Psi \models \exists x\Phi\vee\Psi$,

ρ_7 – це $\neg\varphi\&\varphi\vee\Phi \models \exists x\Phi$,

ρ_8 – це $\forall x\Psi \models \Psi\&(\neg\varphi\vee\varphi)$,

ρ_9 – це

$(\neg\varphi\&\varphi\vee\Phi)\&\forall x\Psi \models \exists x\Phi\vee\Psi\&(\neg\varphi\vee\varphi)$.

Таблиця. Наявність логічного наслідку для певних пар формул

	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6	ρ_7	ρ_8	ρ_9
$^{P}\models_{IR}$	+	+	+	–	–	–	–	–	–
$^{P}\models_{T}$	+	–	+	–	–	–	–	–	–
$^{P}\models_{F}$	–	+	+	–	–	–	–	–	–
$^{P}\models_{TF}$	–	–	+	–	–	–	–	–	–
$^{R}\models_{TF}$	–	–	–	–	–	–	–	–	–
$^{PE}\models_{IR}$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$^{PE}\models_{T}$	+	–	+	+	–	+	+	–	+
$^{PE}\models_{F}$	–	+	+	–	+	+	–	+	+
$^{PE}\models_{TF}$	–	–	+	–	–	+	–	–	+
$^{RM}\models_{T}$	–	–	–	+	–	+	–	–	–
$^{RM}\models_{F}$	–	–	–	–	+	+	–	–	–
$^{RM}\models_{TF}$	–	–	–	–	–	+	–	–	–

Усі відношення логічного наслідку, які фігурують в таблиці, виявилися різними.

Беручи до уваги вищенаведені результати, маємо такі співвідношення між відношеннями логічного наслідку:

Теорема 10.

$^{RM}\models_{TF} \subset {}^{RM}\models_{T} \subset {}^{PE}\models_{T}$,

$^{RM}\models_{TF} \subset {}^{RM}\models_{F} \subset {}^{PE}\models_{F}$,

$^{RM}\models_{TF} \subset {}^{PE}\models_{TF}$;

$^{PE}\models_{TF} \subset {}^{PE}\models_{T}$, $^{PE}\models_{TF} \subset {}^{PE}\models_{F}$,

$^{PE}\models_{T} \subset {}^{PE}\models_{IR}$, $^{PE}\models_{F} \subset {}^{PE}\models_{IR}$;

$^{R}\models_{TF} \subset {}^{RM}\models_{TF}$, $^{P}\models_{TF} \subset {}^{PE}\models_{TF}$,

$^{P}\models_{T} \subset {}^{PE}\models_{T}$, $^{P}\models_{F} \subset {}^{PE}\models_{F}$,

$^{P}\models_{IR} \subset {}^{PE}\models_{IR}$;

$^{R}\models_{TF} \subset {}^{P}\models_{TF}$, $^{P}\models_{TF} \subset {}^{P}\models_{T}$,

$^{P}\models_{TF} \subset {}^{P}\models_{F}$,

$^{P}\models_{T} \subset {}^{P}\models_{IR}$, $^{P}\models_{F} \subset {}^{P}\models_{IR}$;

$^{P}\models_{T} \not\subset {}^{P}\models_{F}$ та $^{P}\models_{F} \not\subset {}^{P}\models_{T}$;

$^{PE}\models_{T} \not\subset {}^{PE}\models_{F}$ та $^{PE}\models_{F} \not\subset {}^{PE}\models_{T}$;

відношення $^{RM}\models_{T}$, $^{RM}\models_{F}$, $^{PE}\models_{TF}$ не включаються одне в інше.

Відношення логічного наслідку індукують відповідні відношення логічної еквівалентності, вони поширюються на множини формул.

Відношення логічного наслідку для множин формул в загальному випадку логік квазіарних предикатів описано, зокрема, в [2–5]. Дослідження таких відношень в логіках монотонних і логіках антитонних предикатів планується продовжити в наступних роботах.

Висновки

Досліджено відношення логічного наслідку для чистих першопорядкових композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів. Описано композиційні предикатні алгебри, мови і класи інтерпретацій (семантики) цих логік, виділено низку відношень логічного наслідку. Основну увагу зосереджено на вивченні таких відношень в логіках монотонних предикатів і логіках антитонних предикатів, для них визначено 20 відношень логічного наслідку, із яких попарно різними є ${}^{PE}|\!=_{IR}$, ${}^{PE}|\!=_{T}$, ${}^{PE}|\!=_{F}$, ${}^{PE}|\!=_{TF}$, ${}^{RM}|\!=_{T}$, ${}^{RM}|\!=_{F}$, ${}^{RM}|\!=_{TF}$. Наведено приклади, які засвідчують відмінності одних відношень від інших, встановлено співвідношення між різними відношеннями. Результати щодо наявності чи відсутності того чи іншого відношення логічного наслідку для певних пар формул зведено в таблицю.

1. *Handbook* of Logic in Computer Science / Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. – Oxford University Press, Vol. 1–5, 1993–2000.
2. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Прикладна логіка. Київ: ВПЦ Київський університет, 2013. 278 с.
3. *Nikitchenko M., Shkilniak S.* Semantic Properties of Logics of Quasiary Predicates. Workshop on Foundations of Informatics: Proceedings FOI-2015. Chisinau, Moldova. P. 180–197.
4. *Шкільняк О.С.* Відношення логічного наслідку в логіках квазіарних предикатів. Проблеми програмування. 2016. № 1. С. 29–43.
5. *Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С.* Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів. Проблеми програмування. 2016. № 2–3. С. 73–86.

References

1. Abramsky S., Gabbay D. and Maibaum T. (editors). (1993–2000). Handbook of Logic in Computer Science. Oxford University Press.
2. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2013). Applied logic. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet. (in Ukrainian).
3. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2015). Semantic Properties of Logics of Quasiary Predicates. In Workshop on Foundations of Informatics: Proceedings FOI-2015. Chisinau, Moldova. P. 180–197.
4. Shkilniak O. (2016). Logical consequence relations in logics of quasiary predicates. In Problems in Programming. N 1, P. 29–43. (in Ukrainian).
5. Nikitchenko M., Shkilniak O. and Shkilniak S. (2016). Pure first-order logics of quasiary predicates. In Problems in Programming. N 2–3, P. 73–86. (in Ukrainian).

Одержано 22.12.2016

Про автора:

Шкільняк Оксана Степанівна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних систем.
Кількість наукових публікацій в українських виданнях – 81, у тому числі у фахових виданнях – 30.
Кількість наукових публікацій в зарубіжних виданнях – 9.
http://orcid.org/0000-0003-4139-2525.

***Місце роботи автора*:**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
01601, Київ, вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 259 0511, (050) 356 4875.
E-mail: me.oksana@gmail.com