УДК 621.313.33

В.Й. Чабан, З.І. Гоголь, С.М. Костючко

АЛҐОРИТМ РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ І УСТАЛЕНИХ ПРОЦЕСІВ АСИНХРОННОГО МОТОРА

Запропоновано спільний алґоритм розрахунку перехідних і усталених процесів трифазного асинхронного мотора при наявності конденсатора в одній з фаз статора. Диференціальні рівняння пристрою записані в нормальній формі Коші. Перехідний процес одержується при заданих початкових умовах, усталений – при таких, що виключають перехідну реакцію. Подаються результати симуляції.

Предложен общий алгоритм расчета переходных и установившихся процессов трехфазного асинхронного двигателя при наличии конденсатора в одной из фаз статора. Дифференциальные уравнения устройства записаны в нормальной форме Коши. Переходный процесс получается при заданных начальных условиях, установившийся – при таких, что выключают переходную реакцию. Приводятся результаты симулирования.

Вступ. Наявність конденсаторів у обмотці статора трифазного асинхронного мотора – достатньо частий випадок на практиці. Для аналізу перехідних і усталених процесів таких моторів ми пропонуємо спільний алґоритм, що опирається на загальну теорію нелінійних диференціальних рівнянь: Розв'язується двоточкова крайова задача для звичайних диференціальних рівнянь електромеханічного стану.

Обмежимося випадком наявності конденсатора лише у фазі *C*. Це з одного боку спрощує математичні побудови, а з іншого ускладнює фізичний процес за рахунок появи напруги зміщення нейтралей.

Для розв'язання поставленої задачі необхідно було сперш: побудувати математичну модель пристрою, а також допоміжну модель параметричної чутливості [1, 2]. Це й стало підставою побудови матриці монодромії, а на її підставі просимулювати перехідний і усталений процеси.

1. Математична модель. Обмотка ротора мотора за кількістю витків вважається приведеною до обмоток статора. Струми обмотки ротора приводяться також за частотою до струмів обмотки статора. У такому разі рівняння електромаґнетного стану мотора можна записати у вигляді [1]

$$\frac{di}{dt} = A(u - \Omega'\Psi - Ri), \tag{1}$$

де

$$\begin{bmatrix} \lambda_S \\ \lambda_R \end{bmatrix}, \lambda = u, \Psi, i; \; A = \begin{bmatrix} A_S & A_{SR} \\ A_{RS} & A_R \end{bmatrix};$$
$$\Omega' = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \Omega \end{bmatrix}; \; R = \begin{bmatrix} R_S & \\ & R_R \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Тут $i_k = (i_{kA}, i_{kB})_t$, $k = S, R$ – колонки фазних струмів обмотки статора й перетворених струмів обмотки ротора; $u_k = (u_{kA}, u_{kB})_t$, $k = S, R$ – колонки фазних напруг обмотки статора; A_S, A_{SR}, A_{RS}, A_R – матриці

$$A_S = \alpha_S(1 - \alpha_S G); \; A_{SR} = A_{RS} = -\alpha_S \alpha_R G;$$
$$A_R = \alpha_R(1 - \alpha_R G), \tag{3}$$

де G, Ω – матриці

$$G = \begin{bmatrix} T + b_A i_A & b_B i_A \\ b_A i_B & T + b_B i_B \end{bmatrix}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

причому

$$b_A = b(2i_A + i_B); \; b_B = b(i_A + 2i_B); \; b = \frac{2}{3}\frac{R - T}{i_m^2};$$
$$R = \frac{1}{\alpha_S + \alpha_R + \rho}; \quad T = \frac{1}{\alpha_S + \alpha_R + \tau} \tag{5}$$

Тут τ, ρ – обернені статична й диференціальна індуктивності, їх знаходимо за характеристикою намаґнечування (холостого стану) машини як:

$$\tau = \left[\frac{\Psi_m(i_m)}{i_m}\right]^{-1}; \; \rho = \left[\frac{d\Psi_m(i_m)}{di_m}\right]^{-1}, \tag{6}$$

де i_m – модуль просторового вектора намаґнечувальних струмів

$$i_m = 2\sqrt{(i_A^2 + i_A i_B + i_B^2)/3}; \; i_A = i_{SA} + i_{RA}; \; i_B = i_{SB} + i_{RB}. \tag{7}$$

При відсутності насичення характеристика намаґнечування вироджується в пряму $i_m = \alpha_m \Psi_m$, де α_m – обернена основна індуктивність, а матриця (4) згідно з (6) – у діагональну

$$G = \frac{1}{\alpha_S + \alpha_R + \alpha_m} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

що значно спрощує рівняння (1). У такому разі ми отримуємо найпростішу з усіх відомих математичну модель асинхронного мотора; R_S, R_R – матриці опорів

$$R_S = \begin{bmatrix} r_S & \\ & r_S \end{bmatrix}; \; R_R = \begin{bmatrix} r_R & \\ & r_R \end{bmatrix} \tag{9}$$

причому α_S, α_R – обернені індуктивності дисипації обмоток статора й ротора; r_S – опір фаз статора; r_R – приведений опір обмотки ротора; Ω – матриця кутової швидкості ω.

Компоненти колонки повних потокозчеплень обмоток статора й ротора знаходимо так

$$\Psi_{kj} = \frac{1}{\tau}(i_{Sj} + i_{Rj}) + \frac{1}{\alpha_k} i_{kj}, \; j = A, B; \; k = S, R. \tag{10}$$

Елементи колонок напруг статора й ротора

$$u_S = U_m \sin(\omega_0 t) + u_C/3, U_m \sin(\omega_0 t - 120^0)_t +$$
$$+ u_C/3; \; u_R = 0, \tag{11}$$

де U_m, ω_0– амплітуда й кругова частота напруги мережі: u_C – напруга конденсатора.

Зрозуміло, що диференціальне рівняння (1) треба доповнити диференціальним рівнянням конденсатора

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{i_{SA} + i_{SB}}{C}, \qquad (12)$$

де C – ємність конденсатора.

Рівняння механічного стану одержуємо на підставі рівняння Лаґранжа, нехтуючи штивністю та дисипацією механічних ланок,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p_0}{J}(M_E - M(\omega)),\ M_E = \sqrt{3}p_0(\Psi_{SA}i_{SB} - \Psi_{SB}i_{SA}), \qquad (13)$$

де $M(\omega)$ – механічний момент; p_0 – число пар маґнетних полюсів; J – момент інерції ротора; M_E – електромаґнетний момент. Формулу (13) одержано, виходячи з запасу електромаґнетної енергії в контурах машини.

Система диференціальних рівнянь (1), (12), (13) – математична модель конденсаторного асинхронного мотора. Вона призначається для аналізу перехідних і усталених процесів. Для практичного користування нею необхідно знати такі вхідні дані: опори й обернені індуктивності дисипації обмоток статора й ротора; характеристику холостого стану, а при неврахуванні насичення основного маґнетного кола – обернену основну індуктивність машини, ємність конденсатора, число пар маґнетних полюсів і момент інерції ротора. Вхідними сигналами є:фазні напруги живлення і механічний момент на валу.

2. Розв'язання задачі Коші. Систему звичайних диференціальних рівнянь (1), (12), (13) запишемо в загальному вигляді

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \quad x = (i, u_C, \omega)_t. \qquad (14)$$

Інтеґрування диференціальних рівнянь (14) при заданих початкових умовах

$$x(t)|_{t=+0} = x(0) \qquad (15)$$

і становить задачу Коші для заданої системи диференціальних рівнянь, яка презентує задачу розрахунку перехідних електромеханічних процесів мотора. Щоб розв'язати двоточкову крайову задачу, необхідно знайти сперш матрицю монодромії.

3. Побудова матриці монодромії. Скористаємося все тією ж колонкою невідомих x (14). Але для побудови допоміжної моделі чутливості утворимо колонку невідомих y

$$y = (\Psi, u_C, \omega)_t. \qquad (16)$$

Відповідне (18) диференціальне рівняння (1) має вигляд

$$\frac{d\Psi}{dt} = u - \Omega'\Psi - Ri. \qquad (17)$$

Матрицю монодромії запишемо у вигляді [1]

$$\Phi = (Az, q, w)_t, \qquad (18)$$

де

$$z = \frac{\partial\Psi}{\partial x(0)};\ q = \frac{\partial u_C}{\partial x(0)};\ w = \frac{\partial\omega}{\partial x(0)}. \qquad (19)$$

Варіаційні рівняння для обчислення субматриць (19) одержуємо диференціюванням по $x(0)$ рівнянь електромеханічного стану (12), (13), (17).

Диференціюючи (17), одержуємо

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x(0)} + (\Omega' - RA)z + \frac{\partial\Omega'}{\partial\omega}w\Psi. \qquad (20)$$

Перша похідна по $x(0)$ у (19) згідно з (13)-(15) буде

$$\frac{\partial u}{\partial x(0)} = -\frac{1}{3}(q, q, 0, 0). \qquad (21)$$

Диференціюючи по $x(0)$ (12), одержуємо

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{C}\left(\frac{\partial i_{SA}}{\partial x(0)} + \frac{\partial i_{SB}}{\partial x(0)}\right). \qquad (22)$$

Диференціюючи по $x(0)$ (13), одержуємо

$$\frac{dw}{dt} = \frac{p_0}{J}\left(\sqrt{3}p_0\left(\frac{\partial\Psi_{SA}}{\partial x(0)}i_{SB} + \Psi_{SA}\frac{\partial i_{SB}}{\partial x(0)} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial\Psi_{SB}}{\partial x(0)}i_{SA} - \Psi_{SB}\frac{\partial i_{SA}}{\partial x(0)}\right) - \frac{\partial M(\omega)}{\partial\omega}w\right). \qquad (23)$$

Похідні $\partial\Psi_{SA}/\partial x(0)$, $\partial\Psi_{SB}/\partial x(0)$, $\partial i_{SA}/\partial x(0)$, $\partial i_{SB}/\partial x(0)$ є елементами матриць z, Az, тому вони відомі.

Таким чином, побудова матриці монодромії розглядуваного асинхронного мотора вимагає інтеґрування рівнянь першої варіації (20), (22), (23).

4. Розв'язання двоточкової крайової задачі. Існують такі початкові умови $x(0)$, які при інтеґруванні (14) на інтервалі часу від 0 до T дають змогу ввійти безпосередньо в періодичний розв'язок, обминаючи перехідну реакцію. Такі початкові умови розглядатимемо як аргумент рівняння періодичності

$$f(x(0)) = x(0) - x(x(0), T) = 0, \qquad (24)$$

де T – період.

Розв'язання нелінійного трансцендентного рівняння будемо здійснювати ітераційним методом Ньютона

$$x(0)^{(s+1)} = x(0)^{(s)} - f'\left(x(0)^{(s)}\right)^{-1} f\left(x(0)^{(s)}\right). \qquad (25)$$

Матрицю Якобі отримуємо диференціюванням по $x(0)$ цільової функції (24)

$$f'(x(0)) = E - \Phi(T), \qquad (26)$$

де

$$\Phi(T) = \left.\frac{\partial x(x(0), t)}{\partial x(0)}\right|_{t=T}. \qquad (27)$$

Матриця (27) і є шуканою матрицею монодромії (18) в момент часу $t = T$.

На s-й ітерації формули Ньютона (25) лінійні варіаційні рівняння (20), (22), (23) підлягають сумісному інтеґруванню з нелінійним (14) на часовому інтервалі $[0, T]$. У результаті знаходимо цільову функцію (24) й потрібну матрицю Якобі (26), (27), що цілком визначає праву частину ітераційної формули (25), а відтак – і її шукану ліву частину $x(0)^{(s+1)}$. Процес ітерації закінчується при досягненні заданої точності входження в періодичний розв'язок

$$\left|f\left(x(0)^{(s)}\right)\right| \le \varepsilon, \qquad (28)$$

де ε – вектор заданих точностей.

Матриця монодромії Φ (27) є, по суті, матрицею чутливостей до початкових умов. Кожний її рядок можна розглядати як градієнт певної змінної у просторі початкових умов, а кожен її стовпчик характеризує чутливість усієї множини змінних до однієї і тієї ж початкової умови. Тому диференціальні рівняння (20), (22), (23) можна розглядати як модель чутливості до початкових умов.

5. Алґоритм обчислень.

1. Маючи на s-й ітерації значення вектора $x(t)^{(s)}$ і матриці (на першому кроці початкові наближення), інтеґруємо рівняння (1), (12), (13), (20), (22), (23) на часовому інтервалі [0, T].

Значення $x(0)^{(0)}$ як нульове наближення формули Ньютона і початкова умова (15) задаються довільними. В тих випадках, коли у розв'язку можливе існування декількох періодичних станів, значення $x(0)^{(0)}$ визначає вхід процесу в зону притягання одного з них. Тому, щоб отримати сукупність усіх можливих періодичних розв'язків системи диференціальних рівнянь, необхідно варіювати цими значеннями.

Виходячи з (24), значення $\Phi(0)^{(s)}$, у тому числі й $\Phi(0)^{(0)}$, дорівнює одиничній матриці E

$$\Phi(0)^{(s)} = E\,. \tag{29}$$

2. Маючи тепер значення $x(T)^{(s)}$ і $\Phi(T)^{(s)}$, згідно з (24) обчислюємо $f(x(0)^{(s)})$, а згідно з (27) – $f'(x(0)^{(s)})$.

3. На підставі ітераційної формули (25) знаходимо уточнення значення вектора $x(0)^{(s+1)}$.

Якщо задати умову, що $T\to\infty$, то даний алґоритм відтворює розрахунок перехідних процесів!

6. Результати симуляції. Запропонований метод аналізу отримав всебічну перевірку в складних задачах електромеханіки, і виявився дуже ефективним [1, 2]. Результати симуляції перехідного (рис. 1) і усталеного (рис. 2) процесів модельного мотора показано нижче.

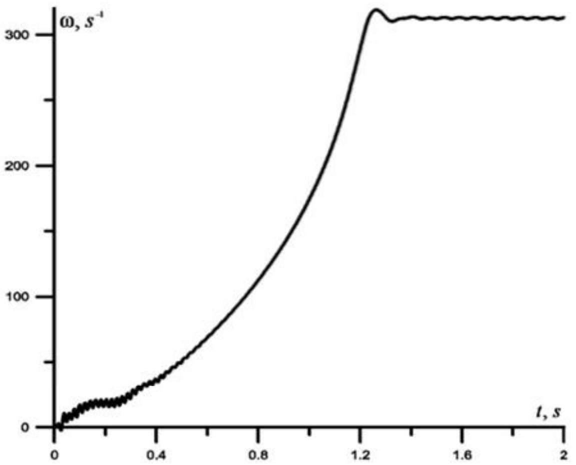

Рис. 1. Пуск. Залежність ω = ω(t) при ω(0) = 0

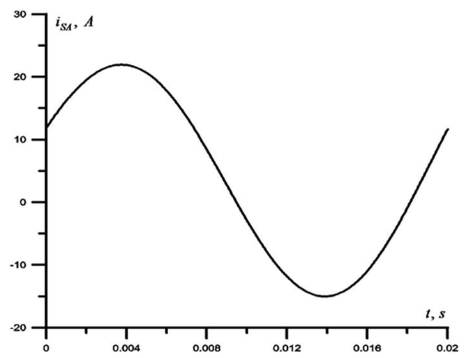

Рис. 2. Усталений струм $i = i(t)$ на інтервалі [0, T]

ВИСНОВОК

Якщо розрахунок усталених процесів електричних машин звести до двоточкової крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь її електромеханічного стану, то побудовані на цій основі алґоритми дають змогу розраховувати як перехідні, так і усталені процеси на спільній математичній підставі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Чабан В. Математичне моделювання електромеханічних процесів. – Львів, 1997. – 344 с.

2. Чабан В. Математичне моделювання в електротехніці. – Л.: Вид-во Тараса Сороки, 2010. – 508 с.

Bibliography (transliterated): *1.* Chaban V. Matematichne modelyuvannya elektromehanichnih procesiv. - L'viv, 1997. - 344 s. *2.* Chaban V. Matematichne modelyuvannya v elektrotehnici. - L.: Vid-vo Tarasa Soroki, 2010. - 508 s.

Надійшла 04.02.2011

Чабан Василь Йосипович, д.т.н., проф.
Національний університет "Львівська політехніка"
й Ряшівський університет
79021, Львів, вул. Кульпарківська, 142, кв. 33
тел. 067 720-21-81 e-mail: vtchaban@polynet.lviv.ua
Гоголь Зорана Іванівна,
Костючко Сергій Миколайович
Національний університет "Львівська політехніка"

Tchaban V.I., Gogol Z.I., Kostiuchko S.M.

A calculation algorithm for transient and steady-state processes in an induction motor.

The paper introduces a calculation algorithm for transient and steady-state processes in a three phase induction motor with a capacitor in one of the stator phases. Differential equations are given in normal Cauchy form. The transient process occurs under given initial conditions, while the steady-state process takes place under such initial conditions that eliminate the transient response. Simulation results are given.

Key words – **three phase induction motor, capacitor, transient and steady-state processes, simulation.**