

## ВЗАЄМОДІЯ РУХОМИХ І НЕРУХОМИХ ЗАРЯДІВ В СТАЦІОНАРНОМУ ПОЛІ ПРОВІДНОГО СЕРЕДОВИЩА

*Розглянуті взаємодії нерухомих точкових зарядів в електричному полі діелектрика і елементарних струмів в магнітному полі магнітного середовища. Проаналізовано постулат Максвелла в стаціонарному полі провідного середовища, визначене аналітичне вираження напруженості, створюваної рушійними зарядами стаціонарного поля. Встановлено, що проаналізована взаємодія рухомих і нерухомих зарядів в стаціонарному полі обернено пропорційна до квадрата відстані між ними.*

*Rассмотрены взаимодействия неподвижных точечных зарядов в электрическом поле диэлектрика и элементарных токов в магнитном поле магнитной среды. Проанализирован постулат Максвелла в стационарном поле проводящей среды, определено аналитическое выражение напряженности, создаваемой движущимися зарядами стационарного поля. Установлено, что проанализированное взаимодействие подвижных и неподвижных зарядов в стационарном поле обратно пропорционально квадрату расстояния между ними.*

### ВСТУП

Усвідомити процеси, що відбуваються в електротехнічних пристроях, охарактеризувати стан електромагнітної енергії в кожній точці в будь-який момент часу, а, виходить, і розрахувати пристрої на задані умови роботи можливо тільки за допомогою теорії електромагнітного поля. Електромагнітне поле характеризується наявністю магнітних і електричних полів, зв'язаних безперервним взаємним перетворенням. Ці поля являють собою дві складові електромагнітного поля, різні сторони його прояву. В основу визначення і електричного, і магнітного полів покладено їхній механічний прояв, тому що електромагнітне поле це поле чотирьох основних векторів:  $\mathbf{E}$  – вектора напруженості електричного поля,  $\mathbf{D}$  – вектора електричної індукції,  $\mathbf{H}$  – вектора напруженості магнітного поля й  $\mathbf{B}$  – вектора магнітної індукції, тобто характеристик його механічного прояву. У цьому полі також існують щільності зарядів і струмів, створювані електромагнітним полем або утворюючи його.

Електричне поле як одна зі складових електромагнітного розглядається в якості й електростатичного поля в діелектричному середовищі, і стаціонарного електричного поля постійного струму в провідному середовищі. Механічний прояв електростатичного поля описується законом Кулона, а магнітного поля – законом Ампера. Закон Кулона є основою теорії електростатичного поля, закон Ампера – теорії магнітного поля. Теорія стаціонарного електричного поля в провідному середовищі базується на основних рівняннях теорії електричних кіл, які узагальнюють експериментальні факти.

Дослідження механічного прояву стаціонарного електричного поля досить актуальна проблема, тому що одержання аналітичних залежностей, що описують даний прояв, дає математичну основу теорії стаціонарного електричного поля в провідному середовищі й теорії електричних кіл. Таким чином впроваджується теоретична база для розробки нових методів розрахунку електротехнічних пристроїв, а узагальнені експериментальні факти стають підтвердженням даних наукових поглядів.

**Основна частина.** Умови електростатики є тільки в ідеальному діелектричному середовищі, напри-

клад, у вакуумі. Всі реальні діелектрики в більшій або меншій мірі проводять електрику. Однак провідність діелектриків, які використовуються в електротехнічних пристроях як ізолюючі матеріали, настільки мала, що стосовно цілого ряду явищ її можна вважати рівною нулю.

В основі теорії електростатичного поля в діелектричних середовищах покладено його механічний прояв, що описується законом Кулона (законом зворотних квадратів): "Сила  $\mathbf{F}$ , з якою взаємодіють один з одним два точкових заряди  $q_1$  й  $q_2$ , прямо пропорційна добутку цих зарядів, обернено пропорційно квадрату відстані  $r$  між ними й залежить від електричних властивостей середовища, що оточує заряди" [1]:

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_a r^2} \mathbf{r}_0,$$

де:  $\mathbf{r}_0$  – одиничний вектор, спрямований по лінії з'єднуючій заряди;  $\epsilon_a$  – діелектрична проникність речовинного середовища, характеристика його електричних властивостей.

Силовою характеристикою електростатичного поля є його напруженість  $\mathbf{E}$ . Це векторна величина, чисельно рівна силі, що діє на заряд, який по величині дорівнює одиниці й обумовленої за умови, що внесений у дану точку заряд не спотворив поля, що існує до внесення цього заряду [2]:

$$\mathbf{E} = \lim_{q_2 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q_2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_a r^2} \mathbf{r}_0.$$

Основним проявом магнітного поля постійного струму є його механічний вплив на провідник зі струмом, поміщений у це поле. Взаємодія двох елементів лінійних струмів підкоряється закону Ампера (закону зворотних квадратів магнітного поля). "Сила взаємодії двох елементів лінійних струмів  $I_1 dl_1$  і  $I_2 dl_2$  пропорційна величинам струмів  $I_1$  і  $I_2$ , пропорційна довжинам елементів  $dl_1$  і  $dl_2$ , обернено пропорційна квадрату відстані  $r_{12}$  між ними й залежить від магнітних властивостей середовища" [1]:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r_{12}^2} [dl_1 [dl_2 \mathbf{r}_0]], \mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{4\pi r_{12}^2} [dl_2 [dl_1 \mathbf{r}_0]],$$

де:  $\mathbf{r}_0$  – одиничний вектор, спрямований по лінії, що з'єднує взаємодіючі елементи  $dl_1$  й  $dl_2$  відповідно

струмів  $I_1$  і  $I_2$ ;  $F_{12}$  – сила, що діє на елемент  $dl_1$  струму  $I_1$  з боку елемента  $dl_2$  струму  $I_2$ ;  $F_{21}$  – сила, що діє на елемент  $dl_2$  струму  $I_2$  з боку елемента  $dl_1$  струму  $I_1$ ;  $\mu_0$  – магнітна постійна – величина, що характеризує магнітні властивості вакууму.

Основною силовою характеристикою магнітного поля є магнітна індукція:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I [d\mathbf{l}r_0]}{4\pi r^2}.$$

Це векторна величина, чисельно дорівнює силі, що діє на елемент струму  $I dl$ , визначної за умови, що внесений у дану точку магнітного поля елемент  $I dl$ , розташований перпендикулярно силовим магнітним лініям, не спотворив поле, що існувало до внесення в нього елемента струму [2].

Таким чином, в основі визначення механічного прояву як електростатичного поля в діелектричному речовинному середовищі, так і магнітного поля в магнітному речовинному середовищі, лежить той самий закон зворотних квадратів (закон Кулона для електростатичного поля й закон Ампера для магнітного поля). Крім того, основними силовими характеристиками й одного й іншого поля є аналогічні векторні величини (напруженість  $\mathbf{E}$  електростатичного поля й магнітна індукція  $\mathbf{B}$  магнітного поля). Відмінністю є те, що в електростатичному полі взаємодіють нерухомі в просторі й не змінені в часі електричні заряди, а в магнітному полі – елементи лінійних струмів.

Електричне поле постійних струмів у провідному середовищі є полем потенційним. Це може бути пояснене тим, що в полі постійних струмів розподіл зарядів у просторі залишається стаціонарним, тобто незмінним у часі, тому що при будь-якому перерозподілі зарядів напруженість поля неминуче повинна була б змінитися, і струм перестав би бути постійним. Тому що розподіл зарядів стаціонарний, то поле їх повинне бути тотожно з електростатичним полем відповідно розподілених нерухомих зарядів. Отже, лінійний інтеграл вектора напруженості електричного поля постійних струмів у провідному середовищі уздовж якого-небудь довільного замкнутого контуру, тобто циркуляція даного вектора по будь-якому замкнутому

путі дорівнює нулю ( $\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$ ). Крім того, вектор напруженості цього поля може бути виражений через градієнт потенціалу ( $\mathbf{E} = -\text{grad}\phi$ ) [1].

Та обставина, що в даній точці простору одні елементи заряду завдяки наявності струму переміняються іншими, не може позначатися на напруженості електричного поля, оскільки щільність зарядів у кожній точці простору, відповідно до одного з основних постулатів теорії електричного поля, залишається постійною. Тому, стаціонарне поле постійних струмів у провідному середовищі, як і електростатичне поле в діелектричному середовищі, є потенційним полем.

По своїй природі електростатичне поле й електричне поле постійного струму в провідному середовищі різні. Проте, між двома полями можна провести певну формальну аналогію.

Електростатичне поле в областях, не зайнятих зарядами, задовольняє рівнянню Лапласа. Електричне поле постійного струму в провідному середовищі поза сторонніми джерелами також задовольняє рівнянню Лапласа. В обох полях мають справу з вектором напруженості поля  $\mathbf{E}$ . Вектору електричної індукції  $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$  електростатичного поля можна зіставити вектор щільності струму  $\boldsymbol{\delta} = \gamma \mathbf{E}$  провідного середовища, а потоку вектора електричної індукції  $\Psi_{\text{ел}} = \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S}$  – потік вектора

щільності електричного струму  $I = \oint_S \boldsymbol{\delta} d\mathbf{S}$ .

Подібні й граничні умови: на поверхні розподілу двох діелектриків  $E_{1t} = E_{2t}$  і  $D_{1n} = D_{2n}$ , а на границі розподілу двох провідних середовищ із різною провідністю  $E_{1t} = E_{2t}$  й  $\delta_{1n} = \delta_{2n}$ .

Якщо два поля задовольняють тому самому рівнянню  $\nabla^2 \phi = 0$  Лапласа й у них виконуються тотожні граничні умови для подібних величин, то при однаковій формі граничних поверхонь на підставі теореми одиничності рішення можна констатувати, що сукупність силових і еквіпотенційних ліній у цих двох полях (тобто картина поля) буде однаковою [2].

Ця формальна аналогія між електростатичним полем у діелектрику й електричному полі в провідному середовищі дозволяє зробити припущення, що механічний прояв стаціонарного електричного поля також повинне описуватися законом зворотних квадратів.

Відповідно до однієї з найважливіших теорем електростатики теореми Гауса потік вектора електричної індукції крізь будь-яку замкнуту поверхню дорівнює алгебраїчній сумі вільних зарядів, що перебувають усередині цієї поверхні. Заряди, відповідно до постулату Максвелла можуть бути як статичними, так і змінними в часі [3], тобто теорема Гауса залишається справедливою для будь-якого електричного поля, зв'язаного або не пов'язаного з нерухомими або як завгодно рушійними зарядами [1].

Тому що вектору електричної індукції  $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$  електростатичного поля діелектрика відповідає вектор щільності струму  $\boldsymbol{\delta} = \gamma \mathbf{E}$  електричного поля провідного середовища, то стаціонарне електричне поле, створене точковими зарядами, що змінюються в часі з постійною швидкістю ( $dq/dt = \text{const}$ ), може бути описано вираженням:

$$\oint_S \gamma \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{dq}{dt}. \quad (1)$$

Для знаходження напруженості електростатичного поля, створюваної точковим зарядом  $dq/dt$ , що змінюється в часі, в точці, вилученої на відстань  $r$  від заряду проведемо через дану точку сферичну поверхню радіусом  $r$ , вважаючи, що заряд  $dq/dt$  перебуває в центрі цієї сфери, і застосуємо до цієї сфери теорему Гауса. При цьому, у силу симетричного розташування всіх точок сферичної поверхні щодо заряду числове значення напруженості поля в різних точках цієї поверхні буде однаковим.

Зчитасмо, що елемент поверхні сфери  $d\mathbf{S}$ , перпендикулярний до поверхні сфери й спрямований у бік

зовнішньої (стосовно об'єму усередині поверхні) нормалі в кожній точці сферичної поверхні збігається по напрямку з вектором напруженості  $\mathbf{E}$  стаціонарного електричного поля. Кут між даними векторами дорівнює нулю. Якщо врахувати, що числове значення напруженості  $E$  у всіх точках сфери те саме ( $E = \text{const}$ ), то  $\gamma$  можна винести з-під інтеграла [2]:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\gamma} \frac{dq}{dt},$$

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S E dS \cos 0^\circ = E \oint_S dS = E 4\pi r^2,$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\gamma} \frac{dq}{dt}.$$

Отже, модуль вектора напруженості, створюваний точковим зарядом  $dq/dt$ , що рухається, на відстані  $r$  від нього визначається виразом:

$$E = \frac{1}{4\pi\gamma r^2} \frac{dq}{dt}. \quad (2)$$

Таким чином, вектор напруженості може бути знайдений співвідношенням:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\gamma r^2} \frac{dq}{dt} \mathbf{r}_0, \quad (3)$$

де  $\mathbf{r}_0$  – одиничний вектор по напрямку  $E$ .

Напруженість електричного поля  $\mathbf{E}$  є векторна величина, чисельно рівна силі, що діє на заряд по величині рівній одиниці, визначеної за умови, що внесений у дану точку поля заряд не спотворив поля, що існує до внесення цього заряду.

У випадку електростатичного поля в діелектрику ця сила створюється нерухомим у просторі й незмінним у часі зарядом  $q$  і дорівнює:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_a r^2} \mathbf{r}_0.$$

В електричному полі в провідному середовищі сила, що діє на нерухомий заряд по величині рівній одиниці, створюється зарядженою часткою, що рухається:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\gamma r^2} \frac{dq}{dt} \mathbf{n}_\delta.$$

Якщо закону зворотних квадратів для електростатичного поля в діелектрику відповідає вираження:

$$\mathbf{F} = q_1 \mathbf{E} = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_a r^2} \mathbf{r}_0,$$

де ( $q_1$  і  $q$  – точкові заряди, нерухомі в просторі й незмінні в часі), то для стаціонарного електричного поля в провідному середовищі сила взаємодії нерухомого й рухомого точкових зарядів описується формулою:

$$\mathbf{F} = q_1 \mathbf{E} = \frac{q_1}{4\pi\gamma r^2} \frac{dq}{dt} [\mathbf{r}_0 [\mathbf{n}_\delta \mathbf{r}_0]], \quad (4)$$

де:  $\mathbf{r}_0$  – одиничний вектор, спрямований по лінії, що з'єднує заряди,  $\mathbf{n}_\delta$  – одиничний вектор по напрямку вектора щільності струму  $\delta$ .

Таким чином, нерухомий у просторі й незмінний у часі точковий заряд  $q_1$  і заряджена елементарна частка  $dq/dt$ , що рухається, взаємодіють один з одним із

силою  $\mathbf{F}$ , величина якої прямо пропорційна їхньому добутку, обернено пропорційна квадрату відстані  $r$  між цими зарядами й залежить від питомої провідності середовища взаємодії.

Тому що вираження (4) описує взаємодію нерухомого заряду й заряду, що рухається, то сила  $\mathbf{F}$  їхньої взаємодії характеризується не тільки електростатичною складовою, визначеною для фіксованого моменту часу, але й напруженістю магнітного поля, створюваною зарядом, що змінюється в часі. Тому напрямок сили  $\mathbf{F}$  взаємодії визначається подвійним векторним добутком одиничних векторів  $\mathbf{r}_0$  і  $\mathbf{n}_\delta$ :

$$[\mathbf{r}_0 [\mathbf{n}_\delta \mathbf{r}_0]],$$

де:  $\mathbf{r}_0$  – одиничний вектор, спрямований по лінії, що з'єднує заряди,  $\mathbf{n}_\delta$  – одиничний вектор по напрямку вектора щільності струму  $\delta$ .

Електростатична складова взаємодії зарядів, що визначається для фіксованого моменту часу, спрямована по прямій, що з'єднує дані заряди. У той час як напрямок електродинамічної складової цієї взаємодії (напруженості магнітного поля), створюваної зарядом, що змінюється в часі, визначається правилом право ходового гвинта.

Переконалися у вірності встановленого співвідношення (4) дозволяють аналітичні перетворення, здійснювані над теоремою Гауса й вираженням, що зв'язує діелектричну проникність речовинного середовища з її питомою провідністю.

#### Закінчення у наступному номері

*Придубков Павло Якович, к.т.н., доц.*  
Національний технічний університет  
"Харківський політехнічний інститут"  
кафедра "Електротехніка та електричні машини"  
Україна, 61002, Харків, ул. Фрунзе 21

*Хоменко Ігор Васильович, к.т.н., доц.*  
Національний технічний університет  
"Харківський політехнічний інститут"  
кафедра "Передача електричної енергії"  
Україна, 61002, Харків, ул. Фрунзе 21

*P.Y.Pridubkov, I.V. Khomenko*

#### **Interaction of mobile and immobile charges in a stationary field of conducting medium.**

Interactions of immobile point charges in the electric field of a dielectric and elementary currents in the magnetic field of a magnetic medium are considered. Maxwell postulate is analyzed in the stationary field of a conducting medium, analytical expression for the strength created by motive charges of the stationary field is specified. It is determined that analyzed interaction of mobile and immobile charges in the stationary field is inversely proportional to squared distance between them.

**Key words – mobile and immobile charges, interaction, stationary field, conducting medium, analysis.**