

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.07.040>

УДК 539.3

**В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: vfmeish@gmail.com

## Нестационарні хвильові процеси в системі сферична оболонка — двошарове ґрунтове середовище

*Представлено членом-кореспондентом НАН України І.С. Чернишенком*

*Розглядаються нестационарні процеси розповсюдження сферичних хвиль в системі сферична оболонка — двошарове ґрунтове середовище. Кожний шар ґрунтового середовища описується в рамках поведінки трикомпонентного ґрунтового середовища, згідно з рівняннями механіки суцільних середовищ. Для чисельного розв'язку вказаних задач використовується скінченно-різницева схема Мак-Кормака. Наведені закономірності розповсюдження хвиль тиску у вказаній системі.*

**Ключові слова:** сферична оболонка, двошарове ґрунтове середовище, сферичні хвилі, нестационарні процеси, чисельні методи.

В даній роботі розглядаємо задачу динамічної поведінки системи сферична оболонка — двошарове ґрунтове середовище при дії на неї імпульсного навантаження. Наведемо рівняння коливань сферичної оболонки та ґрунтового середовища. Для розв'язку вихідної задачі побудуємо чисельний алгоритм, що базується на скінченно-різницевій апроксимації вихідних рівнянь по просторовій та часовій координатах. Запропонуємо чисельні результати для випадку динамічної поведінки системи сферична оболонка — двошарове ґрунтове середовище при розподіленому імпульсному навантаженні.

**Постановка задачі.** Розглядається задача взаємодії сферичної порожнини, підкріпленої сферичною оболонкою радіуса  $R$  з двошаровим ґрунтовим середовищем. Кожний шар ґрунту являє собою трикомпонентне середовище, що складається із газоподібної, рідкої та твердої компонент із відповідними параметрами. Внутрішнє імпульсне навантаження  $P_3(t)$  прикладається до внутрішньої поверхні сферичної оболонки. Рівняння коливань замкнутої сферичної оболонки радіуса  $R$  товщиною  $h$  мають вигляд [1]

$$\rho_{sh} h \ddot{u}_3 = -\frac{T_{11}}{R} - \frac{T_{22}}{R} + P_3(t) - P_r(t), \quad (1)$$

$$T_{11} = \frac{Eh\nu}{1-\nu^2} \frac{u_3}{R^2}, \quad T_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{u_3}{R^2},$$

© В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, 2018

де  $u_3$  – переміщення точок серединної поверхні оболонки;  $P_3(t)$  – навантаження на внутрішню поверхню сферичної оболонки;  $P_r(t)$  – тиск ґрунту на оболонку;  $\rho_{sh}, E, \nu$  – фізико-механічні параметри матеріалу оболонки ( $\rho_{sh}$  – густина матеріалу оболонки).

Кожний шар ґрунту описується рівнянням стану трикомпонентного середовища (водонасиченого ґрунту) згідно з моделлю В.М. Ляхова [1–3]

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{V}{V_0} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \frac{V_i}{V_{i0}}, \quad (2)$$

де вводяться такі позначення:  $\alpha_i$  – вміст по об'єму компонент;  $\rho_{i0}$  – густина;  $V_{i0}$  – їх питомий об'єм;  $c_{i0}$  – швидкість звуку в компонентах при атмосферному тиску  $P_0$ ;  $i$  – номер компоненти (1 – повітря, 2 – рідина, 3 – тверді частинки). При тиску  $P = P_0$  густина середовища  $\rho_0$  та питомий об'єм  $V_0$  визначаються за формулами

$$\rho_0 = \frac{1}{V_0} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \rho_{i0}, \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1.$$

При тиску  $P$  параметри компонент шарів позначимо  $V_i, \rho_i, c_i$ , а середовища в цілому –  $V$  і  $\rho$ . Густина середовища при тиску  $P$  складається із початкової густини  $\rho_0$  та членів, обумовлених стисненням кожної з компонент.

Рівняння стиснення нелінійного пружного багатокомпонентного середовища записуються у вигляді

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{V}{V_0} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[ \frac{\gamma_i(P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-\chi_i}, \quad \chi_i = \frac{1}{\gamma_i}, \quad (3)$$

де  $\gamma_i$  – показник ізентропи  $i$ -ї компоненти.

Перевагою цієї моделі є її простота, можливість запису залежності швидкості звуку та швидкості хвилі від тиску у вигляді простих співвідношень. Швидкість звуку при тиску  $P$  визначається із умови

$$c = \left( \frac{dP}{ds} \right)^{1/2}$$

і має вигляд

$$c = \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[ \frac{\gamma_i(P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-\chi_i}}{\left\{ \rho_0 \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{\rho_{i0} c_{i0}^2} \left[ \frac{\gamma_i(P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-\chi_i - 1} \right\}^{1/2}}. \quad (4)$$

Рух двошарового ґрунтового середовища для випадку розповсюдження сферичних хвиль описується системою рівнянь в ейлерових координатах для кожного шару [4]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2(\rho U^2 + P)] - \frac{2}{r} P = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2(\rho U)] = 0,$$

де  $r$  – просторова координата;  $t$  – часова координата;  $U$  – швидкість;  $\rho$  – густина;  $P$  – тиск.

Відповідно для кожного шару записуються рівняння стану:

$$F(P, \rho) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[ \frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-1/\gamma_i} - \frac{\rho_0}{\rho} = 0. \quad (6)$$

В подальшому розглядається нестационарна поведінка двошарового середовища при визначених початкових умовах. Припускається, що до внутрішньої поверхні підкріплюючої оболонки з радіусом  $r_0 = R$  порожнини прикладається навантаження  $P_3(t)|_{r=R}$ .

Зв'язаність задачі взаємодії сферична оболонка – ґрунтове середовище забезпечується завданням умов непроникності на деформовану поверхню контакту оболонка – ґрунтове середовище

$$\dot{u}_3 = U_r,$$

де  $U_r$  – швидкість границі ґрунтового середовища на контактї.

Граничні умови на межї підкріплена порожнина – ґрунтове середовище при  $t > 0$  обчислюються виходячи із рівнянь руху першого шару середовища – рівняння (1), (5) та (6).

**Чисельний алгоритм.** Алгоритм розв'язку задачі про поведінку двошарового ґрунтового середовища при навантаженні замкненої підкріпленої сферичної порожнини нестационарним навантаженням  $P_3(t)|_{r=R}$  базується на використанні скінченно-різницевої схеми предиктор – коректор Мак-Кормака [1–5].

На кроці предиктор різницевї рівняння мають вигляд:

$$\tilde{\rho}_k = \rho_k^n - \frac{\tau}{r_k^2} \left[ \frac{(r^2 \rho^n U^n)_{k+1} - (r^2 \rho^n U^n)_k}{\Delta r} \right], \quad (7)$$

$$(\tilde{\rho} \tilde{U})_k = (\rho^n V^n)_k - \frac{\tau}{r_k^2} \left\{ \frac{[r^2 \rho (U^2 + P)^n]_{k+1} - [r^2 (\rho U^2 + P)^n]}{\Delta r} - 2P_k^n r_k \right\},$$

$$F(\tilde{P}_k, \tilde{\rho}_k) = 0.$$

На кроці коректор рівняння записуються наступним чином:

$$\rho_k^{n+1} = 0,5 \left\{ \rho_k^n + \tilde{\rho}_k - \frac{\tau}{r_k^2} \left[ \frac{(r^2 \tilde{\rho} \tilde{U})_k - (r^2 \tilde{\rho} \tilde{U})_{k-1}}{\Delta r} \right] \right\}, \quad (8)$$

$$(\rho U)_k^{n+1} = 0,5 \left\{ (\rho^n U^n)_k + (\tilde{\rho}^n \tilde{U}^n)_k - \frac{\tau}{r_k^2} \left[ \frac{[r^2 (\tilde{\rho} \tilde{U}^2 + \tilde{P})^n]_k - [r^2 (\tilde{\rho} \tilde{U}^2 + \tilde{P})^n]_{k-1}}{\Delta r} - 2\tilde{P}_k r_k \right] \right\},$$

$$F(P_k^{n+1}, \rho_k^{n+1}) = 0.$$

Для знаходження шуканих величин на поверхні контакту сферична оболонка – ґрунтове середовище використовується наступна процедура.

Рівняння руху оболонки (1) представимо у вигляді

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} = H, \quad H = \frac{1}{\rho_{sh}} \left[ -\frac{\sigma_{11}}{R} - \frac{\sigma_{22}}{R} + \frac{P_3(t) - P_0}{h} \right]. \quad (9)$$

На кроці предиктор рівняння (9) апроксимуємо наступними співвідношеннями:

$$\tilde{V}_0 = V_0^n + \tau H_0(t^n), \quad (10)$$

де

$$H_0(t^n) = \frac{1}{\rho_{sh}} \left[ -\frac{\sigma_{11}^n}{R} - \frac{\sigma_{22}^n}{R} + \frac{P_3(t^n) - P_0^n}{h} \right].$$

Величини  $\tilde{\rho}_0, \tilde{P}_0$  визначаються за формулами:

$$\tilde{\rho}_0 = \rho_0^n - \frac{\tau}{r_0^2} \left[ \frac{-3r_0^2(\rho_0^n V_0^n) + 4r_1^2(\rho_1^n V_1^n) - r_2^2(\rho_2^n V_2^n)}{2\Delta r} \right], \quad (11)$$

$$F(\tilde{P}_0, \tilde{\rho}_0) = 0.$$

На кроці коректор для апроксимації рівнянь (9) використовуються скінченно-різницеві співвідношення вигляду:

$$V_0^{n+1} = 0,5[V_0^n + \tilde{V}_0 + \tau H_1(t^{n+1})], \quad (12)$$

де

$$H_1(t^{n+1}) = \frac{1}{\rho_{sh}} \left[ -\frac{\sigma_{11}^{n+1}}{R} - \frac{\sigma_{22}^{n+1}}{R} + \frac{P_3(t^{n+1}) - \tilde{P}_0}{h} \right].$$

Величини  $\rho_0^{n+1}$  і  $P_0^{n+1}$  знаходяться за наступними формулами:

$$\rho_0^{n+1} = 0,5 \left\{ \rho_0^n + \tilde{\rho}_0 - \frac{\tau}{r_0^2} \left[ \frac{-3r_0^2(\tilde{\rho}_0 \tilde{V}_0) + 4r_1^2(\tilde{\rho}_1 \tilde{V}_1) - r_2^2(\tilde{\rho}_2 \tilde{V}_2)}{2\Delta r} \right] \right\}, \quad (13)$$

$$F(P_0^{n+1}, \rho_0^{n+1}) = 0.$$

Для розрахунку тиску  $P$  по заданих значеннях густини  $\rho$  використовується ітераційна процедура Ньютона–Рафсона. Враховуючи, що різницева схема Мак-Кормака є явною, то при розрахунках застосовувалася умова різницевої стійкості

$$(|V| + c)\tau / \Delta r < 1,$$

де значення  $c$  відповідає локальній швидкості звуку – формула (4).

**Чисельні результати.** Розглядається сферична підкріплена порожнина в двошаровому ґрунтовому середовищі при внутрішньому, імпульсному навантаженні  $P_3(t)$  – рівняння (1), (5) та (6). Відповідні різницеві рівняння – (7) – (13). Розрахунки проводили для сталеві оболонки з радіусом  $R = 0,1$  м; товщиною  $h = 0,01$  м. Модуль Юнга матеріалу оболонки  $E = 210$  ГПа, коефіцієнт Пуассона –  $\nu = 0,3$ ; густина матеріалу  $\rho_{sh} = 7880$  кг/м<sup>3</sup>. Осесиметричне імпульсне навантаження  $P_3(t)$  задавали у вигляді:

$$P_3(t) = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

де  $T$  – час навантаження;  $A$  – амплітуда навантаження;  $\eta(t)$  – функція Хевісайда. При розрахунках покладали  $A = 10$  МПа;  $T = 50$  мкс.

Задачу розв'язували для двох типів двошарових водонасичених ґрунтів. Характеристики компонент шарів ґрунтів наступні: 1) повітря –  $\rho_1 = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>;  $c_1 = 330$  м/с;  $\gamma_1 = 1,4$ ;

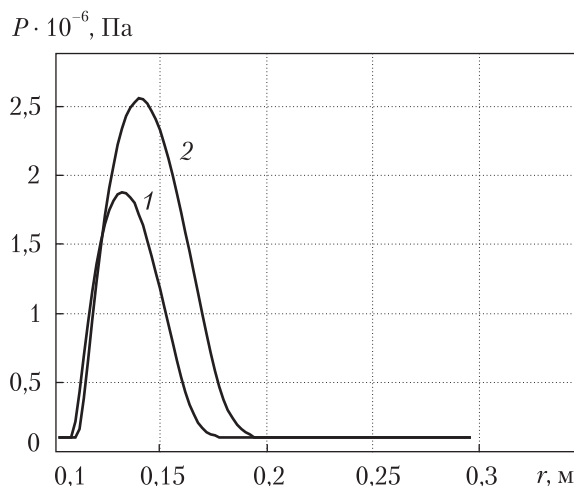


Рис. 1

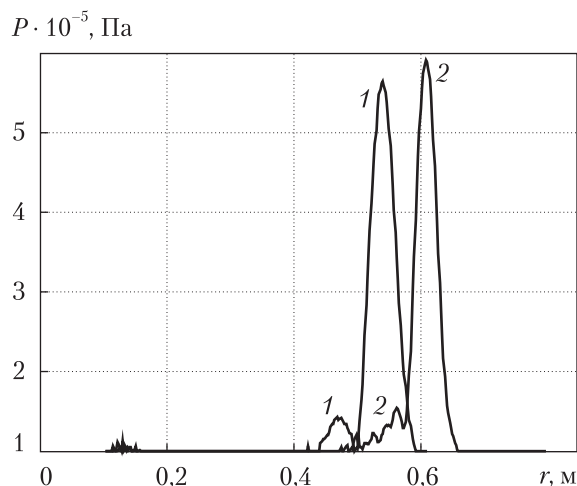


Рис. 2

2) вода —  $\rho_2 = 10^3 \text{ кг/м}^3$ ;  $c_2 = 1500 \text{ м/с}$ ;  $\gamma_2 = 7$ ; 3) твердий компонент —  $\rho_3 = 2650 \text{ кг/м}^3$ ;  $c_3 = 4500 \text{ м/с}$ ;  $\gamma_3 = 4$ . Розрахунки проводили на просторовому інтервалі  $R \leq r \leq 20R$ . Границю розділу ґрунтових середовищ покладали в точці  $r = 5R$ . В першому варіанті розрахунків приймали наступні характеристики шарів ґрунту: перший шар —  $\alpha_1 = 0$ ;  $\alpha_2 = 0,7$ ;  $\alpha_3 = 0,3$  (менш щільне середовище), другий шар —  $\alpha_1 = 0$ ;  $\alpha_2 = 0,3$ ;  $\alpha_3 = 0,7$  (більш щільне середовище). У другому варіанті розрахунків розглядалося проходження хвиль із більш щільного середовища в менш щільне з вказаними вище характеристиками.

На рис. 1 наведено результати розрахунків для хвилі тиску по просторовій координаті  $r$  для вказаних вище двох варіантів ґрунтових середовищ в момент часу  $t = T$ . Крива 1 відповідає першому варіанту (перший шар — менш щільне середовище, в порівнянні з другим шаром), крива 2 — другому варіанту (перший шар — більш щільне середовище). Отримані результати відповідають дійсним фізичним міркуванням. Хвиля тиску для другого варіанта має більшу швидкість і більшу амплітуду в порівнянні з першим варіантом. Також на рис. 1 можна відслідкувати процес зниження амплітуд тиску вхідних хвиль у відповідні середовища через наявність підкріплюючої сферичної оболонки в сферичній порожнині. Вхідна хвиля при  $t = 0$  має амплітуду  $A = 10^7 \text{ Па}$ , при  $t = T$  крива 1 відповідає  $A = 1,8 \text{ МПа}$ , крива 2 —  $A = 2,56 \text{ МПа}$ .

На рис. 2 наведено аналогічні результати розрахунків для  $t = 6,5T$ , коли хвилі тиску пройшли границю розділу ґрунтових середовищ при  $r = 5R$ . Позначення кривих відповідають позначенням на рис. 1. Як бачимо, для обох випадків при проходженні границі розділу з'являються хвилі відбиття. Також ці результати відповідають дійсним фізичним закономерностям. Можна провести аналіз падіння (див. рис. 1 і 2) амплітуд відповідних хвиль. Бачимо, що при  $t = T$  (див. рис. 1)  $A_1 = 1,8 \text{ МПа}$ ,  $A_2 = 2,56 \text{ МПа}$ . При  $t = 6,5T$  (див. рис. 2)  $A_1 = 0,564 \text{ МПа}$ ,  $A_2 = 0,59 \text{ МПа}$ . Подальші розрахунки по часовій координаті показали, що падіння амплітуд хвиль для обох випадків відбуваються за експоненціальним законом. Зокрема, одним із елементів новизни розглянутої задачі є дослідження падіння амплітуд хвиль тиску для двошарового ґрунтового середовища з різними фізико-механічними параметрами шарів.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Головка К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках. Киев: Изд.-полиграф. центр “Киевский ун-т”, 2012. 541 с.
2. Ляхов В.М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. Москва: Недра, 1982. 288 с.
3. Лучко И.А., Плаксий В.А., Ремез Н.С. и др. Механический эффект взрыва в грунтах. Киев: Наук. думка, 1989. 232 с.
4. Рожественский Б.Л., Яненко Н.И. Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. Москва: Наука, 1978. 688 с.
5. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. Москва: Мир, 1991. 552 с.

Надійшло до редакції 22.12.2017

REFERENCES

1. Golovko, K. G., Lugovoi, P. Z. & Meish, V. F. (2012). Dynamics of inhomogeneous shells under nonstationary loads. Kyiv: Publ. Center “Kyiv University” (in Russian).
2. Lyakhov, V. M. (1982). Waves in soils and porous multicomponent media. Moscow: Nedra (in Russian).
3. Luchko, I. A., Plaksii, V. A., Remez, N. S. etc. (1989). Mechanical effect of the explosion in soils. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
4. Rozhdestvensky, B. L. & Yanenko, N. I. (1978). Systems of quasilinear equations and their application to gas dynamics. Moscow: Nauka (in Russian).
5. Fletcher, K. (1991). Computational methods in the dynamics of liquids. Vol. 2. Moscow: Mir (in Russian).

Received 22.12.2017

*В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш*

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев  
E-mail: vfmeish@gmail.com

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМЕ  
СФЕРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА – ДВУХСЛОЙНАЯ ГРУНТОВАЯ СРЕДА

Рассматриваются нестационарные процессы распространения сферических волн в системе сферическая оболочка – двухслойная грунтовая среда. Каждый слой грунтовой среды описывается в рамках поведения трехкомпонентной грунтовой среды, согласно уравнениям механики сплошных сред. Для численного решения указанных задач используется конечно-разностная схема Мак-Кормака. Приведены закономерности распространения волн давления в указанной системе.

**Ключевые слова:** сферическая оболочка, двухслойная грунтовая среда, сферические волны, нестационарные процессы, численные методы.

*V.F. Meish, Yu.A. Meish*

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev  
E-mail: vfmeish@gmail.com

NONSTATIONARY WAVE PROCESSES  
IN THE SPHERICAL SHELL–TWO-LAYER SOIL MEDIUM SYSTEM

Nonstationary processes of propagation of spherical waves in the spherical shell–two-layer soil medium system are considered. Each layer of the soil medium is described within the framework of the behavior of a three-component soil medium, according to the equations of continuum mechanics. To solve these problems, the Mac-Cormack finite-difference scheme is used. The regularities of propagation of pressure waves in this system are given.

**Keywords:** spherical shell, two-layer soil medium, spherical waves, nonstationary processes, numerical methods.