

## РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ УСИЛИЙ В ИНДУКЦИОННОЙ ИНДУКТОРНОЙ СИСТЕМЕ С НЕФЕРРОМАГНИТНЫМИ МАССИВНЫМ ЭКРАНОМ И ЛИСТОВОЙ ЗАГОТОВКОЙ

*Стаття присвячена роботі індукційній індукторній системі з неферромагнітними масивним провідним екраном і тонкостінною листовою заготовкою в низькочастотному режимі діючих полів. Отримані аналітичні залежності для розрахунку основних характеристик електродинамічних процесів. Показано, що інтегральна в часі дія сил тяжіння має кумулятивний характер, а величина інтегральної дії сил відштовхування прагне до нуля.*

*Статья посвящена работе индукционной индукторной системы с неферромагнитными массивным проводящим экраном и тонкостенной листовой заготовкой в низкочастотном режиме действующих полей. Получены аналитические зависимости для расчёта основных характеристик электродинамических процессов. Показано, что интегральное во времени действие сил притяжения имеет кумулятивный характер, а величина интегрального действия сил отталкивания стремится к нулю.*

### ВВЕДЕНИЕ

**Постановка проблемы.** Исследования индукционной системы с тонкостенным вспомогательным экраном, расположенным компланарно листовой заготовке, в низкочастотном режиме действующих магнитных полей выполнены в [1].

**Анализ основных достижений и публикаций.** Вопросам, связанным с магнитно-импульсной обработкой металлов достаточно много внимания уделялось в середине прошлого века, но в основном они касались мощных источников и накопителей энергии. По исчерпанию данного технического ресурса, работы в этом направлении практически прекратились, но остался еще целый спектр вопросов, которые ждут своего решения. Одним из которых является работа индукционной индукторной системы с неферромагнитными массивным проводящим экранами и тонкостенной листовой заготовкой в низкочастотном режиме действующих полей.

Априорные физические соображения приводят к выводу о целесообразности использования массивного проводящего вспомогательного экрана, в специальной полости на граничной поверхности которого со стороны листовой заготовки располагается цилиндрический виток индуктора [2]. Назначение массивного проводящего экрана, в первую очередь, состоит в концентрации магнитного поля витка в пространстве между ним и металлом листовой заготовки.

**Цель настоящей работы** – получение решений для расчёта электродинамических усилий, возбуждаемых в индукционной индукторной системе с одновитковым цилиндрическим соленоидом, неферромагнитными массивным проводящим экраном и тонкостенной листовой заготовкой в низкочастотном режиме действующих магнитных полей.

### РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ УСИЛИЙ

Расчётная модель, принятая для анализа электромагнитных процессов, показана на рис. 1 ( $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$  – направляющие орты цилиндрической системы координат).

При решении поставленной задачи примем следующие допущения.

- Массивный экран – 2 и заготовка – 3 выполнены из металла электропроводностью  $\gamma$ , расстояние между ними –  $h$ , поперечные размеры достаточно велики.

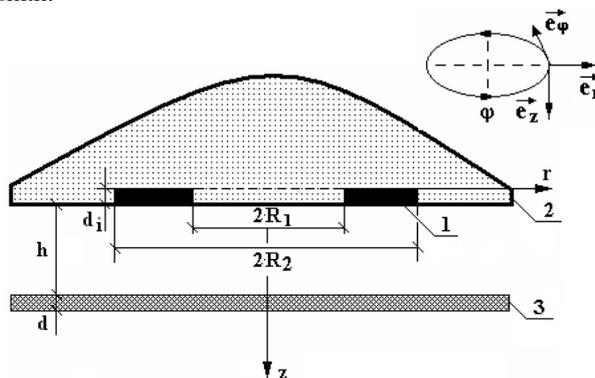


Рис. 1. Расчётная модель индукционной индукторной системы

- Цилиндрический виток индуктора – 1 с внутренним радиусом –  $R_1$ , внешним –  $R_2$  и высотой –  $d_i$  изолирован и располагается в пазу на граничной поверхности экрана – 2 со стороны тонкостенной листовой заготовки толщиной  $d$ . Собственно металл витка не оказывает никакого влияния на протекающие электромагнитные процессы.

- Амплитудно-временные параметры тока индуктора  $I(t)$  таковы, что справедливо квазистационарное приближение по Ландау [1, 3].

- Имеет место аксиальная симметрия, так что  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ , ( $\varphi$  – азимутальный угол).

Уравнения Максвелла для возбуждаемых составляющих вектора электромагнитного поля ( $E_\varphi \neq 0, H_{r,z} \neq 0$ ), преобразованные по Лапласу с учётом нулевых начальных условий, имеют вид [3]:

$$\left[ \frac{\partial H_r(p, r, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_z(p, r, z)}{\partial r} = j_\varphi(p, r, z); \right. \quad (1)$$

$$\left. \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi(p, r, z)) = -\mu_0 \cdot p \cdot H_z(p, r, z); \right. \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial E_\varphi(p, r, z)}{\partial z} = \mu_0 \cdot p \cdot H_r(p, r, z); \right. \quad (3)$$

где  $p$  – параметр преобразования Лапласа;

$$E_\varphi(p, r, z) = L\{E_\varphi(t, r, z)\};$$

$$H_{r, z}(p, r, z) = L\{H_{r, z}(t, r, z)\};$$

$$j_\varphi(p, r, z) = L\{j_\varphi(t, r, z)\};$$

$\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума.

В общем случае плотность тока в правой части уравнения (1) записывается в виде:

$$j_\varphi(p, r, z) = (p \cdot \varepsilon_0 + \gamma) \cdot E_\varphi(p, r, z) + j_{\varphi i}(p, r, z), \quad (4)$$

где  $j_\varphi(p, r, z)$  – плотность стороннего тока в индукторе,  $j_{\varphi i}(p, r, z) = j(p) \cdot f(r) \cdot \eta(z + d_i)$ ,

$$j(p) = \frac{I(p)}{(R_2 - R_1) \cdot d_i}; \quad f(r) - \text{функция радиального}$$

распределения тока в витке индуктора;  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума.

При решении поставленной задачи в принятой модели расчёта следует выделить области с однородными электрофизическими характеристиками:

а) проводящее полупространство массивного экрана с индуктором,  $z \in (-\infty, 0)$ ;

б) пространство между экраном и листовой заготовкой,  $z \in (0, h)$ ;

в) область листовой заготовки,  $z \in [h, (h + d)]$ ;

г) свободное полупространство с внешней стороны металлических листов,  $z \in [(h + d), \infty]$ .

Для каждой выделенной области с помощью дифференциальной системы (1 – 3) и выражения (4) в рамках принятых допущений следует записать уравнения для азимутальной компоненты напряжённости электрического поля  $E_\varphi(p, r, z)$ . Эти уравнения с помощью интегрального преобразования Фурье-Бесселя (Условие ограниченности радиального распределения  $E_\varphi(p, r, z)$  при  $r = 0$  и  $r = \infty$  удовлетворяет интегральное преобразование Фурье-Бесселя:

$$E_\varphi(p, r, z) = \int_0^\infty E_\varphi(p, \lambda, z) \cdot J_1(\lambda \cdot r) \cdot \lambda \cdot d\lambda,$$

где  $J_1(\lambda \cdot r)$  – функция Бесселя первого порядка.) переводятся в пространство, где им будут соответствовать обыкновенные линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

Опуская промежуточные математические выкладки, выпишем общие интегралы этих уравнений, удовлетворяющие условию ограниченности по переменной  $z$ .

а) В проводящем полупространстве вне индуктора с экраном,  $z \in (-\infty, 0)$ :

$$E_\varphi^{(1)}(p, \lambda, z) = C(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda)z} + \frac{K(p, \lambda)}{q^2(p, \lambda)} \eta(z + d_i) \times \\ \times (ch(q(p, \lambda)(z + d_i)) - 1), \quad (5)$$

$$H_r^{(1)}(p, \lambda, z) = \frac{q(p, \lambda)}{p \cdot \mu_0} [C(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda)z} + \\ + \frac{K(p, \lambda)}{q^2(p, \lambda)} \eta(z + d_i) \cdot sh(q(p, \lambda)(z + d_i))], \quad (6)$$

где  $C(p, \lambda)$  – произвольная постоянная интегрирования,  $q(p, \lambda) = \sqrt{\lambda^2 + p \cdot \mu_0 \cdot \gamma}$  – волновое число в металле с удельной электропроводностью  $\gamma$ ,

$$K(p, \lambda) = \mu_0 \cdot p \cdot j(p) \cdot f(\lambda); \quad f(\lambda) = \int_0^\infty f(r) \cdot J_1(\lambda \cdot r) \cdot r \cdot dr,$$

б) В пространстве между экраном и листовой заготовкой,  $z \in (0, h)$ :

$$E_\varphi^{(2)}(p, \lambda, z) = D_1(p, \lambda) \cdot e^{\lambda \cdot z} + D_2(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda \cdot z}, \quad (7)$$

$$H_r^{(2)}(p, \lambda, z) = \frac{\lambda}{p \cdot \mu_0} [D_1(p, \lambda) \cdot e^{\lambda \cdot z} - D_2(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda \cdot z}], \quad (8)$$

где  $D_{1,2}(p, \lambda)$  произвольные постоянные интегрирования,

в) в области металла листовой заготовки,  $z \in [h, (h + d)]$ :

$$E_\varphi^{(3)}(p, \lambda, z) = A_1(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda)(z-h)} + \\ + A_2(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda)(z-h)}, \quad (9)$$

$$H_r^{(3)}(p, \lambda, z) = \frac{q(p, \lambda)}{p \cdot \mu_0} [A_1(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda)(z-h)} - \\ - A_2(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda)(z-h)}], \quad (10)$$

где  $A_{1,2}(p, \lambda)$  – произвольные постоянные интегрирования,

г) в свободном полупространстве с внешней стороны листовой заготовки,  $z \in [(h + d), \infty]$ :

$$E_\varphi^{(4)}(p, \lambda, z) = B(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda \cdot (z - (h+d))}, \quad (11)$$

$$H_r^{(4)}(p, \lambda, z) = -\frac{\lambda}{p \cdot \mu_0} B(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda \cdot (z - (h+d))}, \quad (12)$$

где  $B(p, \lambda)$  – произвольная постоянная интегрирования.

Из условия непрерывности касательных компонент напряжённости можно получить систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных произвольных постоянных интегрирования в выражениях для  $E_\varphi(p, \lambda, z)$  и  $H_r(p, \lambda, z)$ .

1)  $z = 0$ ,

$$\left\{ \begin{aligned} & C(p, \lambda) - \frac{K(p, \lambda)}{q^2(p, \lambda)} \cdot [ch(q(p, \lambda)d_i) - 1] = \\ & = D_1(p, \lambda) + D_2(p, \lambda); \\ & C(p, \lambda) + \frac{K(p, \lambda)}{q^2(p, \lambda)} \cdot sh(q(p, \lambda)d_i) = \\ & = \frac{\lambda}{q(p, \lambda)} \cdot D_1(p, \lambda) - D_2(p, \lambda); \end{aligned} \right. \quad (13)$$

$$2) z = h,$$

$$\begin{cases} D_1(p, \lambda) \cdot e^{\lambda h} + D_2(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda h} = A_1(p, \lambda) + A_2(p, \lambda); \\ D_1(p, \lambda) \cdot e^{\lambda h} - D_2(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda h} = \frac{q(p, \lambda)}{\lambda} \times \\ \times (A_1(p, \lambda) - A_2(p, \lambda)); \end{cases} \quad (14)$$

$$3) z = (h + d),$$

$$\begin{cases} A_1(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda)d} + A_2(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda)d} = B(p, \lambda); \\ \frac{q(p, \lambda)}{\lambda} \cdot (A_1(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda)d} - A_2(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda)d}) = \\ = -B(p, \lambda). \end{cases} \quad (15)$$

В низкочастотном режиме [1]:

$$|p\mu_0\gamma| \rightarrow 0, \quad q(p, \lambda) \approx \lambda.$$

В этом случае, как следует из систем линейных алгебраических уравнений (13 – 15),

$$\begin{cases} A_1(p, \lambda) = D_1(p, \lambda) = 0, \\ C(p, \lambda) = \frac{K(p, \lambda)}{2\lambda^2} \cdot (1 - e^{\lambda d_i}), \\ A_2(p, \lambda) = \frac{K(p, \lambda)}{2\lambda^2} \cdot e^{-\lambda h} \cdot (1 - e^{\lambda d_i}) \end{cases}, \quad (16)$$

Подставляя  $C(p, \lambda)$  в (5), умножая полученный результат на удельную электропроводность  $\gamma$  и выполняя обратные преобразования Фурье-Бесселя и Лапласа получаем, что в экране возбуждается вихревой ток с плотностью:

$$j_{\varphi}^{(1)}(\varphi, r, z) = j_m \cdot \frac{dj(\varphi)}{d\varphi} \cdot \left( \frac{\omega\tau}{d_i \cdot d^2} \right) \cdot \int_0^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\lambda} \cdot J_1(\lambda, r) \times \\ \times \left( \frac{1 - e^{\lambda d_i}}{2} e^{\lambda z} + \eta(z + d_i) \cdot [ch(\lambda \cdot (z + d_i)) - 1] \right) \cdot d\lambda, \quad (17)$$

где  $j_m = \frac{I_m}{(R_2 - R_1) \cdot d_i}$  – линейная плотность тока в витке индуктора;  $j(\varphi)$  – зависимость тока индуктора от фазы –  $\varphi = \omega t$ ,  $\omega$  – круговая частота;  $\tau = \mu_0 \cdot \gamma \cdot d^2$  – характерное время диффузии поля в проводящий слой с удельной электропроводностью  $\gamma$  и толщиной  $d$ .

Интегрируя выражение (17) по переменной  $z \in (-\infty, 0)$ , находим линейную плотность тока, индуцированного в металле массивного экрана. После введения новых обозначений, удобных для проведения практических вычислений, получаем окончательно, что

$$j_{\varphi}^{(1)}(\varphi, r) = j_m \cdot (\omega\tau) \cdot \left( \frac{d}{d_i} \right) \cdot \left( \frac{dj(\varphi)}{d\varphi} \right) \cdot \int_0^{\infty} \frac{F(x)}{x^2} \times \\ \times \left[ \left( \frac{1 - e^{-x \cdot \frac{d_i}{d}}}{2} \right) + \left( sh \left( x \cdot \frac{d_i}{d} \right) - \left( x \cdot \frac{d_i}{d} \right) \right) \right] \cdot J_1 \left( x \cdot \frac{r}{d} \right) dx, \quad (18)$$

где  $x = \lambda \cdot d$  – безразмерная переменная интегрирования,

$$F(x) = \int_{x \cdot \frac{R_1}{d}}^{x \cdot \frac{R_2}{d}} f(y) \cdot y \cdot J_1(y) \cdot dy.$$

Аналогичным образом найдём ток, индуцированный в металле листовой заготовки.

$A_{1,2}(p, \lambda)$  подставим в выражение (9) и помножим результат на удельную электропроводность  $\gamma$ . После обратных интегральных преобразований получаем, что заготовке возбуждается вихревой ток с плотностью:

$$j_{\varphi}^{(3)}(\varphi, r, \zeta) = j_m \cdot \frac{dj(\varphi)}{d\varphi} \cdot \left( \frac{\omega\tau}{2 \cdot d_i \cdot d^2} \right) \cdot \int_0^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\lambda} \cdot J_1(\lambda, r) \times \\ \times e^{-\lambda h} \cdot (1 - e^{\lambda d_i}) \cdot e^{-\lambda \zeta} \cdot d\lambda, \quad (19)$$

где  $\zeta \in [0, d]$  – переменная, связанная с толщиной собственно листовой заготовки.

Интегрируя выражение (19) по  $\zeta \in [0, d]$ , найдём линейную плотность тока, индуцированного в заготовке:

$$j_{\varphi}^{(3)}(\varphi, r) = j_m \cdot \left( \frac{\omega\tau}{2} \right) \cdot \left( \frac{d}{d_i} \right) \cdot \frac{dj(\varphi)}{d\varphi} \times \\ \times \left[ \int_0^{\infty} \frac{F(x)}{x^2} \cdot e^{-x \cdot \frac{h}{d}} \left( 1 - e^{-x \cdot \frac{d_i}{d}} \right) \cdot (1 - e^{-x}) \cdot J_1 \left( x \cdot \frac{r}{d} \right) dx \right]. \quad (20)$$

Проанализируем полученные результаты.

В первую очередь уберём малозначимые факторы. Положим, что толщина витка индуктора достаточно мала, так что  $d_i \rightarrow 0$ .

После выполнения простейших и очевидных предельных переходов сравним между собой формулы для плотностей токов, индуцированных в металле массивного экрана (17) и металле листовой заготовки (19). Очевидно, что их пространственно-временные распределения идентичны с точностью до множителя  $e^{-\lambda h}$ , количественно характеризующего удаление заготовки от источника поля – индуктора на расстояние  $h$ . При  $h \rightarrow 0$  (зазор отсутствует) выражение (19) переходит в (17).

Формулы для линейных плотностей тока в экране (18) и листовой заготовке (20) также идентичны с точностью до множителя  $(1 - e^{-\lambda d})$ , определяющего зависимость тока от толщины заготовки –  $d$ . При  $d \rightarrow \infty$  (заготовка достаточно массивна) выражение (20) переходит в (18).

С физической точки зрения установленная идентичность пространственно-временных зависимостей индуцированных токов означает идентичность протекающих электромагнитных процессов в экране и заготовке.

Перейдём к определению силовых показателей.

В соответствии с законом Ампера о проводниках с токами (18) и (20) записываем формулу для распределённой силы притяжения, действующей на листовую заготовку при жёстко фиксированном экране:

$$P_{attr.}(\varphi, r) = P_m^{(1)} \cdot \left( \frac{dj(\varphi)}{d\varphi} \right)^2 \cdot \Phi_1(r), \quad (21)$$

$$\text{где } P_m^{(1)} = \left( \frac{\mu_0 \cdot J_m^2}{2} \right) \cdot \left( \omega \cdot \tau \cdot \frac{d}{d_i} \right)^2,$$

$$\Phi_1(r) = \left( \frac{r}{h} \right) \cdot \left[ \int_0^\infty \frac{F(x)}{x^2} \cdot \left( \frac{1 - e^{-x \cdot \frac{d_i}{d}}}{2} \right) + \left( sh \left( x \cdot \frac{d_i}{d} \right) - \left( x \cdot \frac{d_i}{d} \right) \right) \cdot J_1 \left( x \cdot \frac{r}{d} \right) dx \right] \times \left[ \int_0^\infty \frac{F(x)}{x^2} \cdot e^{-x \cdot \frac{h}{d}} \left( 1 - e^{-x \cdot \frac{d_i}{d}} \right) \cdot \left( 1 - e^{-x} \right) \cdot J_1 \left( x \cdot \frac{r}{d} \right) dx \right].$$

Вычислим силу магнитного давления на листовую заготовку в зоне витка индуктора.

$A_{1,2}(p, \lambda)$  подставим в выражение (10) и перейдем в пространство оригиналов относительно интегральных преобразований. Получим выражение для радиальной компоненты напряженности магнитного поля в металле листовой заготовки.

$$H_r^{(3)}(t, r, \zeta) = \frac{j_m}{2} \cdot \frac{1}{d_i} \cdot j(\varphi) \cdot \int_0^\infty f(\lambda) \cdot e^{-\lambda h} \cdot \left( 1 - e^{-\lambda d_i} \right) \times e^{-\lambda \zeta} d\lambda. \quad (22)$$

Помножим  $\mu_0$  на (22). Результат помножим на индуцированный ток (19) и проинтегрируем по переменной  $\zeta \in [0, d]$ .

В конечном итоге после тождественных преобразований и введения переменных, аналогичных принятым в формуле (21), находим силу магнитного давления на листовую заготовку.

$$P_{rep}(\varphi, r) = P_m^{(2)} \cdot \left( j(\varphi) \cdot \frac{dj(\varphi)}{d\varphi} \right) \cdot \Phi_2(r), \quad (23)$$

$$\text{где } P_m^{(2)} = \left( \frac{\mu_0 \cdot J_m^2}{2} \right) \cdot \frac{\omega \cdot \tau}{2} \left( \frac{d}{d_i} \right)^2,$$

$$\Phi_2(r) = \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty \frac{F(x)}{x} \cdot e^{-x \cdot \frac{h}{d}} \left( 1 - e^{-x \cdot \frac{d_i}{d}} \right) \cdot J_1 \left( x \cdot \frac{r}{d} \right) \right] \times \left[ \frac{\left( 1 - e^{-(x+y)} \right)}{(x+y)} \cdot \left[ F(y) \cdot e^{-y \cdot \frac{h}{d}} \left( 1 - e^{-y \cdot \frac{d_i}{d}} \right) \cdot J_1 \left( y \cdot \frac{r}{d} \right) \cdot dy dx \right] \right].$$

Относительно возбуждаемых электродинамических усилий в рассмотренном варианте индукторной системы, зависимости (21) и (23) позволяют сформулировать следующие качественные утверждения:

- временная зависимость силы притяжения определяется квадратом производной тока индуктора, что означает постоянство её направленности по отношению к обрабатываемому объекту,
- вычисление импульса силы показывает, что

$$S_{attr} = \int_0^\infty P_{attr}(t, r) dt \sim \int_0^\infty \left( \frac{dj(t)}{dt} \right)^2 dt > 0, \text{ что в свою оче-}$$

редь означает кумулятивный характер деформаций в период действия импульса,

- сила отталкивания есть осциллирующая функция времени, что означает переменную направленность этой силы в течение периода действия, импульс силы  $S_{rep}$ , вычисленный как несобственный интеграл по  $t \in (0, \infty)$ , стремится к нулю, что в конечном итоге означает отсутствие отталкивания в зоне витка индуктора либо достаточно малую амплитуду действующих сил,

## ВЫВОДЫ

1. Получены аналитические зависимости для расчёта основных характеристик электродинамических процессов в индукционной индукторной системе с неферромагнитными массивным экраном и тонкостенной листовой заготовкой в низкочастотном режиме действующих полей.

2. Показано, что вектор возбуждаемых сил притяжения характеризуется постоянным направлением (к индуктору), в то время как направление вектора сил отталкивания имеет осциллирующий характер (отталкивание сменяется притяжением и т.д.).

3. Получено, что интегральное во времени действие сил притяжения имеет кумулятивный характер, а величина интегрального действия сил отталкивания стремится к нулю.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батыгин Ю.В., Бондаренко А.Ю., Чаплигин Е.А. Электродинамические процессы в цилиндрической индукционной индукторной системе для магнитно-импульсного притяжения листовых заготовок // *Авіаційно-космічна техніка і технологія* 2007, №11 (47), С. 109-117.
2. Патент України на корисну модель №31751. Спосіб магнітно-імпульсної обробки металевих заготовок методом притягання до индуктора // Батигін Ю.В., Бондаренко О.Ю., Чаплигин С.О., опубл. 25.04.2008. Бюл. №8, 2008р.
3. Батыгин Ю.В., Лавинский В.И., Магнитно-импульсная обработка тонкостенных металлов. Харьков: Изд. "МОСТ-Торнадо". 2002 – 284 с.

Поступила 07.04.2009

Батыгин Юрий Викторович, д.т.н., проф.

Гнатов Андрей Викторович, к.т.н., с.н.с.

Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

61002, Харьков, ул. Петровского, 25, ХНАДУ,

кафедра "Автомобильная электроника"

тел. (8-057) 700-38-52, E-mail: batygin48@mail.ru,

kalfifus@yandex.ru