УДК 621.311.014

В.Е. Бондаренко, В.Ю. Веприк

УРАВНЕНИЯ И ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН В МОДЕЛЯХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ С УЗЛАМИ ДВИГАТЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Представлені рівняння елементів електричних систем з вузлами двигунового навантаження в диференціальній і дискретній формі у фазних координатах для моделювання перехідних процесів неявними методами чисельного інтегрування.

Представлены уравнения элементов электрических систем с узлами двигательной нагрузки в дифференциальной и дискретной форме в фазных координатах для моделирования переходных процессов неявными методами численного интегрирования.

Постановка проблемы. Математические модели систем электроснабжения с двигательной нагрузкой (ЭСДН) характеризуются тем, что в их состав могут входить, во-первых, как статические элементы, так и вращающиеся электрические машины, а во-вторых, множество элементов системы электроснабжения включает элементы как индуктивного, так и емкостного характера, с постоянными и переменными коэффициентами.

Наличие в системах ЭСДН одновременно статических элементов и вращающихся машин приводит к т ому, что дифференциальные уравнения переходных процессов имеют большой разброс собственных чисел матриц коэффициентов (жесткие уравнения), а наличие одновременно индуктивных и емкостных элементов приводит к тому, что при анализе сложных систем с учетом индуктивных и емкостных параметров уравнения переходных процессов становятся интегро-дифференциальными.

Анализ публикаций. В задачах моделирования переходных процессов в синхронных и асинхронных электрических машинах (ЭМ) в настоящее время широко используются уравнения Парка-Горева. Однако почти исключительное их применение для решения этих задач, как представляется, было связано сначала с ограниченными возможностями вычислительной техники, а затем – со сложившейся традицией [1, 2]. Переход к уравнениям Парка-Горева основан на линейном преобразовании, в результате которого получаются уравнения с постоянными коэффициентами [2]. Однако постоянство коэффициентов обеспечивается лишь при условиях, когда: 1)симметричны параметры ЭМ, 2)отсутствуют несимметричные элементы в сети, 3)сохраняется неизменной скорость вращения ЭМ. При невыполнении хотя бы одного из этих условий переменные коэффициенты сохраняются и в преобразованных уравнениях, поэтому переход к уравнениям Парка-Горева не дает каких-либо преимуществ.

Постановка задачи. Чтобы обеспечить точность моделирования и устойчивость вычислительных процессов численного интегрирования дифференциальных уравнений переходных процессов, снизить порядок системы при наличии емкостных элементов, при разработке математических моделей ЭСДН представляется целесообразным применение неявных методов численного интегрирования и уравнений в фазных координатах на основе так называемых дискретных математических моделей [3].

Дискретную математическую модель системы можно получить, если выполнить сначала аппроксимацию дифференциальных уравнений трехфазных элементов сети разностными уравнениями, а затем – формирование узловых уравнений системы на шаге. Способ аппроксимации зависит от принятого метода численного интегрирования. Так как отмеченные выше особенности многомашинных систем требуют применения неявных методов численного интегрирования, при разработке дискретных моделей статических элементов и вращающихся ЭМ в фазных координатах ниже в качестве исходного алгоритма принят один из неявных методов – неявный метод Эйлера.

Математические модели ЭМ для неявных методов численного интегрирования. Математические модели статических элементов систем ЭСДН получены в [3] путем аппроксимации исходных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}[L]_{ij}^{F}\frac{d}{dt}[i]_{ij}^{F}+[R]_{ij}^{F}[i]_{ij}^{F}=[u]_{i}^{F}-[u]_{j}^{F}\\ [C]_{i0}^{F}[u]_{i}^{F}+[G]_{i0}^{F}[u]_{i}^{F}=[i]_{i0}^{F}\end{gathered}\qquad(1)$$

на основе неявных формул Эйлера-Коши и представлены в форме, разрешенной относительно токов фаз $[i_{ij}]^{(k+1)},[i_{i0}]^{(k+1)}$:

$$\begin{gathered}[i]_{ij}^{(k+1)}=h([L]_{ij}+h[R]_{ij})^{-1}[\Delta u]_{ij}^{(k+1)}+\\ +([L]_{ij}+h[R]_{ij})^{-1}[L]_{ij}[i]_{ij}^{(k)}\\ [i]_{i0}^{(k+1)}=\frac{1}{h}([C]_{i0}+h[G]_{i0})[u]_{i0}^{(k+1)}-\frac{1}{h}[C]_{i0}[i]_{i0}^{(k)}\end{gathered}\qquad(2)$$

или, в более краткой форме,

$$\begin{gathered}[i]_{ij}^{(k+1)}=[Y]_{ij}[\Delta u]_{ij}^{(k+1)}+[J]_{ij}^{(k)}\\ [i]_{i0}^{(k+1)}=[Y]_{i0}[\Delta u]_{i0}^{(k+1)}+[J]_{i0}^{(k)}\end{gathered},\qquad(3)$$

где $[Y]_{ij},[Y]_{i0}$ - матрицы, определяемые соответственно продольными и поперечными параметрами участка трехфазной линии, $[J]_{ij}^{(k)},[J]_{i0}^{(k)}$ - векторы, зависящие от токов индуктивных и напряжений емкостных ветвей, определяемые на предыдущем шаге интегрирования. Уравнения (3), представляющие собой аппроксимацию дифференциальных уравнений участка трехфазной линии разностными уравнениями (дискретная математическая модель), разрешены относительно токов фаз на (k+1)-м шаге интегрирования, что позволяет включать их в систему узловых уравнений на шаге расчета. Уравнения ЭМ для включения их в модель системы должны быть представлены в такой же унифицированной форме.

Уравнения синхронных машин с учетом того, что матрицы ндуктивностей обмоток являются функциями углового положения ротора, можно представить в форме

$$\begin{bmatrix}L_S & L_{SR}\\ L_{RS} & L_{SR}\end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}i_S\\ i_R\end{bmatrix}+(\omega\begin{bmatrix}\frac{dL(\gamma)}{d\gamma}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}r_S & \\ & r_R\end{bmatrix})\begin{bmatrix}i_S\\ i_R\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_S\\ U_R\end{bmatrix};$$

и аналогично предыдущему перейти к разностной аппроксимации в соответствии с формулой Эйлера

$$\begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix}^{(k)} - h\left[L(\gamma)^{(k+1)}\right]^{-1}\left(\omega\left[\frac{dL(\gamma)^{(k+1)}}{d\gamma}\right]+\begin{bmatrix} r_S & \\ & r_R \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix}^{(k+1)}$$

$$+h\left[L(\gamma)^{(k+1)}\right]^{-1}\begin{bmatrix} u_S \\ u_R \end{bmatrix}^{(k+1)}.$$

Если перенести элементы, содержащие токи обмоток статора *is* и ротора *iR* на (k+1) - м шаге, в левую часть, то уравнения примут вид:

$$\left[A(\gamma)^{(k+1)}\right]\begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix}^{(k+1)} = h\left[L(\gamma)^{(k+1)}\right]^{-1}\begin{bmatrix} u_S \\ u_R \end{bmatrix}^{(k+1)} + \begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix}^{(k)}; \quad (4)$$

Умножив обе части уравнения (4) на обратную матрицу $\left[A(\gamma)^{(k+1)}\right]$, получим окончательно

$$\begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix}^{(k+1)} = \left[Y(\gamma)^{(k+1)}\right]\begin{bmatrix} u_S \\ u_R \end{bmatrix}^{(k+1)} + \begin{bmatrix} j_S \\ i_R \end{bmatrix}^{(k)}, \qquad (5)$$

где

$$\left[Y(\gamma)^{(k+1)}\right] = h\left[A(\gamma)^{(k+1)}\right]^{-1}\left[L(\gamma)^{(k+1)}\right]^{-1};$$

$$\begin{bmatrix} j_S \\ j_R \end{bmatrix} = \left[A(\gamma)^{(k+1)}\right]^{-1}\begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix}^{(k)};$$

$$\left[A(\gamma)^{(k+1)}\right] = [E] + h\left[L(\gamma)^{(k+1)}\right]^{-1}\left(\omega\left[\frac{dL(\gamma)^{(k+1)}}{d\gamma}\right]+\begin{bmatrix} r_S & \\ & r_R \end{bmatrix}\right).$$

Уравнения (5) являются дискретной моделью СМ, представлены в форме, удобной для включения их в модель системы и позволяют определить параметры режима СМ на шаге интегрирования по параметрам режима сети.

Полные уравнения АД в фазных координатах, как и уравнения СМ, имеют периодически изменяющиеся индуктивности. Переход к дискретным уравнениям для АД выполняется аналогично тому, как это было выполнено выше для СМ, поэтому ниже изложен кратко.

Уравнения электромагнитных переходных процессов АД в дифференциальной форме имеют вид

$$\begin{bmatrix} L_S & L_{SR} \\ L_{RS} & L_R \end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_S \\ iR \end{bmatrix} + \omega\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{d_{L_{SR}(\gamma)}}{d\gamma} \\ \dfrac{d_{L_{RS}(\gamma)}}{d\gamma} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} + \qquad (6)$$

$$+\begin{bmatrix} r_S & \\ & r_R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_S \\ 0 \end{bmatrix};$$

где

$$L_S = \begin{bmatrix} L_{11} & & \\ & L_{11} & \\ & & L_{11} \end{bmatrix}; L_R = \begin{bmatrix} L_{22} & & \\ & L_{22} & \\ & & L_{22} \end{bmatrix};$$

$$[L_{SR}] = L_{12}\left[C_\gamma\right]; [L_{RS}] = L_{21}\left[C_\gamma\right]^t;$$

-индуктивности (собственные и взаимные) обмоток статора и ротора,

$$\left[C_\gamma\right] = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \cos\left(\gamma+\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\gamma & \cos\left(\gamma+\frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\gamma+\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\gamma \end{bmatrix}.$$

или, в более компактной форме

$$\left[L_{\text{АД}}\right]\frac{d}{dt}[i] + \left(\omega\left[\frac{dL}{d\gamma}\right]+[R]\right)[i] = \begin{bmatrix} u_S \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Разрешив (7) относительно производных и выполнив разностную аппроксимацию аналогично уравнениям СМ, получим дискретные уравнения АД на шаге численного интегрирования:

$$\begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} A_S & A_{SR} \\ A_{Rs} & A_R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_S \\ i_R \end{bmatrix}^{(k)} + \begin{bmatrix} Y_S & Y_{SR} \\ Y_{RS} & Y_R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_S \\ 0 \end{bmatrix}^{(k)} + \qquad (8)$$

$$+\begin{bmatrix} Y_S & Y_{SR} \\ Y_{RS} & Y_R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_S \\ 0 \end{bmatrix}^{(k+1)};$$

Дискретные уравнения АД (8), как и (5) для СМ, позволяют определить параметры режима АД на шаге интегрирования по параметрам режима сети и представлены в форме, удобной для включения в модель системы.

При наличии периодически изменяющихся индуктивностей в (5), (8) матрицы параметров ЭМ необходимо вычислять и обращать на каждом шаге численного интегрирования. Для повышения эффективности вычислительных процедур матрицы индуктивностей (прямые и обратные) обмоток СМ и АД с помощью формул преобразования Парка-Горева можно представить в аналитической форме.

Переход от исходной матрицы индуктивностей обмоток СГ в фазных координатах

$$\left[L^F\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} L_{AA} & L_{AB} & L_{AC} & L_{Af} & L_{AD} & L_{AQ} \\ L_{BA} & L_{BB} & L_{BC} & L_{Bf} & L_{BD} & L_{BQ} \\ L_{CA} & L_{CB} & L_{CC} & L_{Cf} & L_{CD} & L_{CQ} \\ \hline L_{fA} & L_{fB} & L_{fQ} & L_f & L_{fD} & 0 \\ L_{DA} & L_{DB} & L_{DC} & L_{Qf} & L_D & 0 \\ L_{QA} & L_{QB} & L_{QC} & 0 & 0 & L_Q \end{array}\right]$$

выполняется с помощью прямой и обратной матриц преобразования Парка

$$[П] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\cos\gamma & \frac{2}{3}\cos\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & \frac{2}{3}\cos\left(\gamma+\frac{2\pi}{3}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}\sin\gamma & \frac{2}{3}\sin\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & \frac{2}{3}\sin\left(\gamma+\frac{2\pi}{3}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[П]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\left(\gamma+\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\gamma+\frac{2\pi}{3}\right) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Для получения матрицы индуктивностей во вращающейся системе координат $[L]^{\text{П}}$ нужно исходную матрицу $[L]^F$ умножить слева на матрицу $[П]$, а справа – на $[П]^{-1}$

$$\left[L^{\Pi}\right]=[\varPi]\left[L^{F}\right][\varPi]^{-1}. \quad (9)$$

Умножение слева матрицы $\left[L^{F}\right]$на матрицу $[\varPi]$ и полученной матрицы на $[\varPi]^{-1}$ дает матрицу индуктивностей в координатах d, q, 0:

$$\left[L^{\varPi}\right]=\begin{bmatrix} x_d & 0 & 0 & x_{ad} & x_{ad} & 0 \\ 0 & x_q & 0 & 0 & 0 & x_{aq} \\ 0 & 0 & x_0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}x_{ad} & 0 & 0 & x_f & x_{ad} & 0 \\ \frac{3}{2}x_{ad} & 0 & 0 & x_{ad} & x_D & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}x_{aq} & 0 & 0 & 0 & x_Q \end{bmatrix} \quad (10)$$

Все элементы матрицы $\left[L^{\varPi}\right]$ находятся по каталожным данным СГ, поэтому ее можно считать известной. По известной $\left[L^{\varPi}\right]$ можно найти, как это следует из (9), матрицу

$$\left[L^{F}\right]=[\varPi]^{-1}\left[L^{\varPi}\right][\varPi] \quad (11)$$

и ей обратную

$$\left[L^{F}\right]^{-1}=[\varPi]^{-1}\left[L^{\Pi}\right]^{-1}[\varPi]. \quad (12)$$

$$\left[L^{\varPi}\right]^{-1}=\begin{bmatrix} b_d & 0 & 0 & b_{df} & b_{dD} & 0 \\ 0 & b_q & 0 & 0 & 0 & b_{qQ} \\ 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{fd} & 0 & 0 & b_f & b_{fD} & 0 \\ b_{Dd} & 0 & 0 & b_{Df} & b_D & 0 \\ 0 & b_{Qq} & 0 & 0 & 0 & b_Q \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где

$$b_d=\frac{x_f x_D-x_{ad}^2}{\Delta d}; \qquad b_{df}=\frac{-x_{ad}x_D+x_{ad}^2}{\Delta d};$$

$$b_q=\frac{x_Q}{\Delta q}; \quad b_{qQ}=\frac{-x_{aq}}{\Delta q}; \quad b_0=\frac{1}{x_0};$$

$$b_{Qq}=-\frac{3}{2}\frac{x_{aq}}{\Delta q}; \quad b_Q=\frac{x_q}{\Delta q};$$

$$b_{fd}=-\frac{3}{2}\frac{x_{ad}x_D-x_{ad}^2}{\Delta d}; \quad b_f=\frac{x_d x_D-\frac{3}{2}x_{ad}^2}{\Delta d}; \quad (14)$$

Выполнив перемножение матриц $[\varPi]^{-1}$ и $\left[L^{\Pi}\right]^{-1}$ а затем умножение произведения $[\varPi]^{-1}\left[L^{\varPi}\right]^{-1}$ на матрицу $[\varPi]$ слева, получим обратную матрицу индуктивностей обмоток СМ.

Полученные выражения, в отличие от предложенных, например, в [4], не требуют предварительного вычисления элементов обратной матрицы при фиксированных значениях угла γ.

Преобразования Парка для асинхронных двигателей отличаются от преобразований для СМ тем [2], что для перехода от уравнений с периодическими коэффициентами к уравнениям с постоянными коэффициентами может быть выбрана любая система координатных осей, вращающаяся в пространстве с произвольной угловой скоростью.

Полученные аналитические выражения для элементов обратных матриц индуктивностей ЭМ и основанный на них алгоритм исключают необходимость формирования и обращения матриц $\left[L(\gamma)^{(k+1)}\right]$, что во-первых, позволяют снизить трудоемкость получения дискретных моделей и, во-вторых, что более существенно, уменьшить погрешности вычислений, возникающих при многократном повторении операции обращения матриц $\left[L^{F}(\gamma)\right]$, определитель которых имеет порядок 10^{-6} – 10^{-7} [10].

ВЫВОДЫ

1. Дифференциальные уравнения элементов ЭСДН и соответствующих трехфазных многополюсников представлены в форме дискретных уравнений, разрешенной относительно токов, что упрощает алгоритмизацию задачи формирования уравнений системы в целом.

2. Получены дифференциальные уравнения силовых трансформаторов в фазных координатах, отражающие все основные особенности их конструктивного исполнения (схему и группу соединения обмоток, режим нейтрали) как в дифференциальной, так и в дискретной форме с использованием методов неявного интегрирования.

3. Дискретизация и алгебраизация компонентных уравнений реактивных элементов позволяет перейти от задачи решения нелинейных интегро-дифференциальных систем уравнений к многократному решению линеаризованной системы алгебраических уравнений, что соответствует дискретизации математической модели анализируемой системы в отдельных точках рассматриваемой временной области.

4. Полученные с использованием преобразования Парка-Горева аналитические выражения для элементов обратных матриц индуктивностей синхронных и асинхронных двигателей позволяют исключить операции многократного их обращения в ходе численного интегрирования и уменьшить погрешности вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуревич Ю.Е., Либова Л.Е., Хачатрян Э.А. Устойчивость нагрузки электрических систем. М.: Энергоиздат., 1986.
2. Гамазин С.И., Садыкбеков Г.А. Переходные процессы в системах электроснабжения с двигательной нагрузкой. – Алма-Ата: Гылым, 1991, 301 с.
3. Веприк Ю.Н., Лебедка С.Н., Веприк В.Ю. Математическое моделирование переходных процессов в электрических сетях с изолированной нейтралью в фазных координатах. Электротехника и электромеханика. Ежекварт. Научно-практический журнал. Харьков: НТУ "ХПИ" - 2005. № 3. С. 74-77.
4. Коськин Ю.П., Смирнова Н.Н. Расчёт переходных процессов в автономных электроэнергетических системах. – Электричество, 1987, № 4.

Поступила 28.04.2009

Бондаренко Владимир Емельянович, д.т.н., проф.,
Веприк Владимир Юрьевич, инж.
Национальный технический университет
"Харьковский политехнический институт"
Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21, НТУ "ХПИ",
кафедра "Передача электрической энергии"
тел. (057) 707-62-46