

## КОЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНОГО ПОЛЯ

Чабан В., д.т.н., проф.

Національний університет "Львівська політехніка", Ряшівський університет,  
tel. +380677202181, E-mail: vtchaban@polynet.lviv.ua

*Показано, що в електромагнетному полі кінетичні енергія й коенергія, що задовольняє фізичному принципу найменшої дії у варіаційному інтегральному принципі Гамільтона-Остроградського, забезпечують однакові силові характеристики останнього.*

*Показано, что в электромагнитном поле кинетическая энергия и коенергия, что удовлетворяют принципу наименьшего действия в вариационном интегральном принципе Гамильтона-Остроградского, обеспечивают одинаковые силовые характеристики последнего.*

### ВСТУП

У зв'язку з уніфікацією методів математичного моделювання фізичних процесів щораз популярніша енергетичний підхід, за яким стоїть один з найуніверсальніших законів природи – принцип найменшої дії. В основі цього підходу лежить варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського, який використовує поняття кінетичної і потенціальної енергії. Ці поняття в електротехніці є відносні й залежать від вибору тих чи інших узагальнених координат і швидкостей. Але відмовлятися від природних величин було б принаймні нерозумно. Якщо йдеться конкретно про теорію електромагнетного поля, то узагальнені координати й швидкості тут природно вибирати за причетністю їх до його основного вектора електромагнетизму – вектор-потенціалу  $\mathbf{A}$ .

Основний вектор магнетного поля – вектор індукції  $\mathbf{B}$  – визначається просторовим розподілом вектора  $\mathbf{A}$ , а основний вектор електричного поля – вектор напруженості  $\mathbf{E}$  – його швидкістю

$$\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t; \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1)$$

відтак похідні вектори

$$\mathbf{D} = \varepsilon'(\mathbf{E})\mathbf{E}; \mathbf{H} = \nu'(\mathbf{B})\mathbf{B}, \quad (2)$$

де  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  – вектори електричної індукції й напруженості магнетного поля;  $\varepsilon'(\mathbf{E})$ ,  $\nu'(\mathbf{B})$  – матриці статичних електричних проникностей і релуктивностей середовища.

Тож, у теорії електромагнетного поля магнетну енергію слід трактувати як потенціальну, а електричну як кінетичну. У теорії кіл усе навпаки – електрична енергія визначається ладунками конденсаторів  $q$ , а магнетна – струмами котушок індуктивності, як швидкостями зміни ладунків  $i = dq/dt$ ,

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q; \oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = i. \quad (3)$$

Похідні величини знаходяться так

$$u = q/C'(q); \Psi = L'(i)i, \quad (4)$$

де  $u$ ,  $\Psi$  – напруга конденсатора й повне потокозчеплення котушки індуктивності;  $C'(q)$ ,  $L'(i)$  – статичні ємність конденсатора й індуктивність котушки.

### КІНЕТИЧНА ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНОГО ПОЛЯ

Енергії електричного і магнетного поля, зосереджені в об'ємі  $V$  області інтегрування, записують як

$$W_E = \int_V w_E dV; W_M = \int_V w_M dV, \quad (5)$$

де  $w_E$ ,  $w_M$  – густини електричної і магнетної енергій

$$w_E = \int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E} d\mathbf{D}; w_M = \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} d\mathbf{B}. \quad (6)$$

До виразів (5), (6) приходять зазвичай з рівнянь електромагнетного поля в нерухомому безвтратному середовищі, записаних у векторах

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}; \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}. \quad (7)$$

Помножимо перше з цих рівнянь скалярно на  $\mathbf{E}$ , а друге – на  $\mathbf{H}$  і додамо результати один до одного. Якщо тепер розглядати процес у деякому замкнутому об'ємі  $V$ , обмеженому замкнутою поверхнею  $S$ , то одержимо

$$-\int_V \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV = \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dS, \quad (8)$$

Ліва частина співвідношення (8) трактується як зменшення електромагнетної енергії  $\partial w/\partial t$  у деякому замкнутому об'ємі, а права свідчить, що вона тратиться на випромінювання.

Таким чином

$$dw = dw_E + dw_M = \mathbf{E} d\mathbf{D} + \mathbf{H} d\mathbf{B}. \quad (9)$$

Інтегруючи (9), приходимо до (6).

У випадку лінійного середовища вирази (6) спрощуються

$$w_E = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2}; w_M = \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{2}. \quad (10)$$

З позиції теорії поля величини (10) постульовані так: *електрична та магнетна енергії локалізовані в полі й розподілені за об'ємом з цілком певною густиною*. Відома спроба довести (10) [1], але вона не витримує критики. Вирази енергії поля постульовані, бо їх можна одержати багато, а який з них правильний встановити поки що неможливо, а ці є найпростіші.

Вирази (2) кажуть про те, що вектори  $\mathbf{E}$  й  $\mathbf{B}$  є основні вектори, а до  $\mathbf{D}$  й  $\mathbf{H}$  приходимо через параметри середовища. Це ще переконливіше підтверджує силова характеристика поля (сила Лоренца), яка відтворює результат експерименту

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (11)$$

де  $\mathbf{F}$  – вектор сили;  $\mathbf{v}$  – вектор швидкості.

За результатами найновіших досліджень [2-4] можна підійти до питання електромагнетної енергії дещо прискіпливіше. У [2, 3] показано, що на підставі енергетичного підходу рівняння (7) одержати неможливо, а лише рівняння вектор-потенціалу, а вже потім через заміни (1), (2) можна прийти й до (7). Енергетичний підхід значно ускладнюється у випадку нелінійних середовищ. Його вперше реалізовано в [3], але автору згідно з (1) довелося у виразі (6) відмовитися від поняття електричної енергії  $w_E$  на користь електричної кінетичної коенергії  $w_{EC}$

$$w_{EC} = \int_0^{\mathbf{E}} \mathbf{D} d\mathbf{E}, \quad (12)$$

подібно до того, як це зроблено в теорії електричних кіл [4], де автори скористались поняттям магнетної кінетичної коенергії.

Виникає резонне питання [3]: кінетична коенергія розрахункова величина, чи за нею криється глибокий фізичний зміст? – Перша відповідь напрошується сама собою: уже те, що такі універсальні закони фізики як закон збереження енергії й принцип найменшої дії, які стоять за принципом Гамільтона-Остроградського, не можуть провадити до фізичних законів природи, виходячи з енергетичних перетворень нефізичної величини. Але постарасмося в цьому розібратися дещо детальніше. Хоч ми й не отримаємо вичерпної відповіді, але дещо проллємо світло на проблему.

Для зручності обидві підінтегральні функції (6) і (12) запишемо в матричній формі

$$w_E = \int_0^{D_0} \mathbf{E}_{0t} d\mathbf{D}_0; \quad w_{EC} = \int_0^{E_0} \mathbf{D}_{0t} d\mathbf{E}_0, \quad (13)$$

де  $\lambda_0(\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{D}, \mathbf{E}) = (\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$  – колонки проекцій векторів електричного поля в декартових координатах.

Запишемо зв'язки обох колонок у вигляді

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{E}'\mathbf{E}_0; \quad d\mathbf{D}_0 = \mathbf{E}''d\mathbf{E}_0, \quad (14)$$

де  $\mathbf{E}', \mathbf{E}''$  – матриці статичних і диференціальних електричних проникностей [2]

$$\mathbf{E}' = \text{diag}(\varepsilon', \varepsilon', \varepsilon'), \quad \varepsilon' = \frac{D}{E}, \quad E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}, \quad (15)$$

$$\mathbf{E}'' = \frac{d\mathbf{E}'}{dE} \mathbf{E} + \mathbf{E}', \quad (16)$$

Матриця (16) заповнена, її елементи згідно з (15), (16) будуть

$$\varepsilon_{i,k} = (\varepsilon'' - \varepsilon')E_i E_k + \kappa_{ik} \varepsilon'; \quad \varepsilon'' = dD/dE, \quad (17)$$

причому  $\kappa_{ik}$  – символ Кронекера.

Надамо виразам (13) згідно з (14) вигляду

$$w_E = \int_0^{E_0} \mathbf{E}_{0t} \mathbf{E}'' d\mathbf{E}_0; \quad (18)$$

$$w_{EC} = \int_0^{E_0} (\mathbf{E}_{0t} \mathbf{E}'_t) d\mathbf{E}_0 \quad (19)$$

Як бачимо, вирази енергії й коенергії відрізняються лише матрицями електричних проникностей. У виразі енергії фігурує матриця диференціальних параметрів, а у виразі коенергії – матриця статичних.

В обох випадках – енергії й коенергії – силові характеристики електричного поля шукатимемо на підставі (5), (20) за просторовим градієнтом

$$\mathbf{F}_E = -\nabla \int_V \int_0^{E_0} \mathbf{E}_{0t} \mathbf{E}'' d\mathbf{E}_0 dV = -\int_V \int_0^{E_0} \nabla \mathbf{E}_{0t} \mathbf{E}'' d\mathbf{E}_0 dV; \quad (20)$$

$$\mathbf{F}_{EC} = -\nabla \int_V \int_0^{E_0} (\mathbf{E}_{0t} \mathbf{E}'_t) d\mathbf{E}_0 dV = -\int_V \int_0^{E_0} \nabla (\mathbf{E}_{0t} \mathbf{E}'_t) d\mathbf{E}_0 dV. \quad (21)$$

Покажемо, що вирази (20) і (21) приводять до того самого результату. Для чого достатньо довести рівність

$$\nabla (\mathbf{E}_{0t} \mathbf{E}'_t) = \nabla \mathbf{E}_{0t} \mathbf{E}'' . \quad (22)$$

Розпишемо ліву частину (22) так

$$\nabla (\mathbf{E}_{0t} \mathbf{E}'_t) = \nabla \mathbf{E}_{0t} \mathbf{E}'_t + \mathbf{E}_{0t} \nabla \mathbf{E}'_t . \quad (23)$$

причому

$$\nabla \mathbf{E}'_t = \nabla \mathbf{E}_{0t} \mathbf{E}'_t / d \mathbf{E}_{0t} . \quad (24)$$

Підставляючи (24) в (23) й беручи до уваги (16), одержимо

$$\nabla (\mathbf{E}_{0t} \mathbf{E}'_t) = \nabla \mathbf{E}_{0t} (\mathbf{E}'_t + \mathbf{E}_{0t} d\mathbf{E}'_t / d\mathbf{E}_{0t}) = \nabla \mathbf{E}_{0t} \mathbf{E}'' . \quad (25)$$

Якщо взяти до уваги, що згідно з (17):  $\mathbf{E}'_t = \mathbf{E}''$ , то рівність (22) доведено. Водночас звертаємо увагу, що в (16), (22) – (25) ми оперуємо не планарними, а об'ємними матрицями!

## КІНЕТИЧНА ЕНЕРГІЯ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНОГО КОЛА

У теорії кіл кінетичну енергію й коенергію записують у вигляді

$$W_M = \int_0^{\Psi_0} i_{0t} d\Psi_0, \quad W_{MC} = \int_0^i \Psi_{0t} di_0, \quad (26)$$

де  $i_0, \Psi_0$  – колонки струмів і потокозчеплень котушок індуктивності кола.

Рівняння зв'язку обох колонок будуть подібні до (14)

$$\Psi_0 = L' i_0; \quad d\Psi_0 = L'' di_0, \quad (27)$$

де  $L', L''$  – матриці статичних і диференціальних індуктивностей.

Силові характеристики шукатимемо з врахуванням (27) на підставі (5), (26), (27) за просторовим градієнтом

$$\mathbf{F}_M = -\nabla \int_0^{\Psi_0} i_{0t} L'' di_0 = -\int_0^{\Psi_0} \nabla i_{0t} L'' di_0, \quad (28)$$

$$\mathbf{F}_{MC} = -\nabla \int_0^i i_{0t} L'_t di_0 = -\int_0^i \nabla (i_{0t} L'_t) di_0. \quad (29)$$

Рівність

$$\nabla (i_{0t} L'_t) = \nabla i_{0t} L' . \quad (30)$$

доводиться аналогічно як і (22).

## ВИСНОВКИ

1. Кінетична енергія й коенергія в нелінійному середовищі не дорівнюють одна одній, так як підінтегральні вирази відрізняються матрицями параметрів – диференціальними й статичними. Але градієнти їхні є однакові! Отже й силові характеристики поля вони забезпечують однакові! А тому з точки зору практичних наслідків вони є взаємозамінні.

2. Оскільки кінетична коенергія в принципі Гамільтона-Остроградського єдина, що задовольняє енергетичному принципу найменшої дії, то її доцільно вважати також істинною енергетичною характеристикою поля. Але, щоб говорити про її фізичний зміст, поки що не достатньо наукових аргументів, а це значить, що питання залишається поки що далі відкритим.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Нетушил А.В., Поливанов К.М. Теория электромагнитного поля. – М.: Госэнергоиздат, 1956.
- [2] Чабан В. Электромагнетное поле. – Львів: вид-во Тараса Сороки, 2006, 396 с.
- [3] Чабан А. Математичне моделювання коливних процесів в електромеханічних системах. – Львів: Вид-во Тараса Сороки, 2007, 310 с.
- [4] Уайт Д., Вудсон Г. Электромеханическое преобразование энергии (пер. з англійської). – М.-Л.: Энергия, 1964. – 528 с.

Надійшла 14.04.2008