

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕКТОРНОГО МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛА В КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОМ АНАЛИЗЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

Пантелют М.Г., к.ф.-м.н., ст. науч. сотр., Шульженко Н.Г., д.т.н., проф.
Институт проблем машиностроения НАН Украины
Украина, 61046, Харьков, ул. Дм. Пожарского, 2/10
тел. (0572) 94-27-01, 95-95-46, факс (0572) 94-46-35, E-mail: SHULZH@ipmach.kharkov.ua

Наведено огляд та порівняльний аналіз основних постановок задач розрахунку нестационарних тривимірних електромагнітних полів методом скінчених елементів. Розглянуті постановки базуються на використанні векторного магнітного потенціалу та інших потенціалів електромагнітного поля. Проаналізовано переваги та недоліки різних постановок. Запропоновано критерії вибору постановок для скінченоелементного аналізу нестационарних тривимірних електромагнітних полів в електротехнічному та електроенергетичному устаткуванні різного призначення. Наведено міркування авторів з коректного вибору постановок для розробки на їх основі ефективного прикладного програмного забезпечення.

Приведен обзор и сравнительный анализ основных постановок задач расчета нестационарных трехмерных электромагнитных полей методом конечных элементов. Рассмотренные постановки базируются на использовании векторного магнитного потенциала и других потенциалов электромагнитного поля. Проанализированы преимущества и недостатки различных постановок. Предложены критерии выбора постановок для конечноэлементного анализа нестационарных трехмерных электромагнитных полей в электротехническом и электроэнергетическом оборудовании различного назначения. Приведены соображения авторов по корректному выбору постановок для разработки на их основе эффективного прикладного программного обеспечения.

ВВЕДЕНИЕ

Современное электротехническое и электроэнергетическое оборудование (вращающиеся электрические машины различных конструкций и назначения [1-3], трансформаторы [4], устройства для индукционного нагрева [5, 6], медицинское диагностическое оборудование [7] и др.) представляет собой сложные пространственные конструкции с существенно трехмерным распределением нестационарного электромагнитного поля. В связи с этим, разработка эффективных методик, численных алгоритмов и программного обеспечения для компьютерного моделирования нестационарных электромагнитных полей в трехмерной постановке является актуальной задачей теоретической электротехники и технической электродинамики. В последние годы для расчета двумерных [8-10] и трехмерных [1-7] электромагнитных полей все более широкое применение находит метод конечных элементов [11-13], являющийся одним из наиболее развитых и эффективных методов решения уравнений математической физики. Конечноэлементный анализ нестационарных трехмерных электромагнитных полей в проводящих средах (при наличии в них вихревых токов) базируется на обоснованном выборе постановки решаемой задачи. Постановка задачи расчета электромагнитного поля включает в себя [12, 14-16] величины, однозначно описывающие пространственное и временное распределение электромагнитного поля в рассматриваемой расчетной области, а также дифференциальные уравнения электромагнитного поля в терминах выбранных величин с соответствующими граничными условиями. Выбранная постановка должна обеспечивать однозначное решение соответствующих дифференциальных уравнений методом конечных элементов при минимальной размерности системы линейных алгебраических уравнений, что является важным условием разработки эффективного прикладного программного обеспечения.

Целью настоящей работы является сравнительный анализ основных постановок задач конечноэлементного анализа нестационарных трехмерных электромагнитных полей в проводящих средах при наличии вихревых токов и выбор постановок для решения прикладных задач.

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Математическое описание электромагнитных процессов в общем случае представляет собой систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме без учета токов смещения [12, 14]

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

дополненную материальными уравнениями, определяющими электрофизические свойства материалов [12, 14]:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}, \quad (2)$$

где \mathbf{H} – вектор напряженности магнитного поля; \mathbf{B} – вектор индукции магнитного поля; \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля; \mathbf{J} – вектор плотности токов проводимости; μ – магнитная проницаемость; γ – удельная электрическая проводимость. В общем случае, магнитная проницаемость μ может зависеть от напряженности магнитного поля \mathbf{H} [16, 17]. Явления магнитного гистерезиса и анизотропии магнитных свойств материалов не учитываются.

На рис. 1 схематически представлен общий случай расчетной области задачи расчета электромагнитных полей [14]. Расчетная область включает в себя:

- подобласть Ω_1 с отличной от нуля удельной электрической проводимостью и вихревыми токами (например, металлическое изделие, обрабатываемое в установке для индукционного нагрева [5, 6, 8-10], либо ротор синхронного турбогенератора в электромагнит-

ном поле токов обратной последовательности [18, 19]);

- подобласть без вихревых токов Ω_2 , которая может содержать токи сторонних источников (например, токи обратной последовательности в статоре турбогенератора [18, 19] либо токи в индукторе устройства для индукционного нагрева [5, 6, 8-10]).

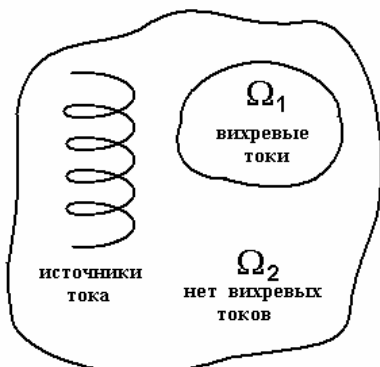


Рис. 1. Расчетная область задачи расчета электромагнитного поля

В [12, 14] приведены граничные условия для тангенциальной компоненты вектора \mathbf{H} , нормальной компоненты вектора \mathbf{B} , тангенциальной компоненты вектора \mathbf{E} и нормальной компоненты вектора \mathbf{J} для решения системы уравнений Максвелла (1) применительно к расчетной области (см. рис. 1). Система уравнений (1) и соответствующие граничные условия обеспечивают однозначность величин, описывающих электромагнитное поле (\mathbf{B} , \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{J}) [15], однако не обеспечивают [15] однозначность потенциалов, приведенных ниже.

ПОТЕНЦИАЛЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Решение большинства прикладных задач расчета электромагнитных полей методом конечных элементов выполняется с использованием представления распределений векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в виде функций потенциалов [12, 14-16]. Наибольшее распространение получили векторный магнитный потенциал \mathbf{A} и скалярный электрический потенциал V , которые определяются следующим образом [12, 14-16]:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A}; \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } V. \end{aligned} \quad (3)$$

Используются также векторный электрический потенциал \mathbf{T} и скалярный магнитный потенциал ψ [15, 16]:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \text{rot } \mathbf{T}; \\ \mathbf{H} &= \mathbf{T} - \text{grad } \psi. \end{aligned} \quad (4)$$

Дифференциальные уравнения, решения которых в общем случае описывают пространственное и временное распределение введенных потенциалов, имеют следующий вид [14-16]:

- для векторного магнитного потенциала \mathbf{A} и скалярного электрического потенциала V

$$\text{rot } \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} + \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \gamma \text{grad } V = 0 \quad \text{в подобласти } \Omega_1; \quad (5)$$

$$\text{rot } \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{J}_S \quad \text{в подобласти } \Omega_2, \quad (6)$$

где \mathbf{J}_S – вектор плотности тока стороннего источника.

- для векторного электрического потенциала \mathbf{T} и скалярного магнитного потенциала ψ

$$\text{rot } \rho \text{rot } \mathbf{T} + \mu \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \mu \text{grad } \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad \text{в подобласти } \Omega_1; \quad (7)$$

$$\text{div } \mu \text{grad } \psi = 0 \quad \text{в подобласти } \Omega_2. \quad (8)$$

Из выражений (3), (4) следует, что потенциалы электромагнитного поля в общем случае определены неоднозначно [12, 14-16]. Так, потенциалы

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)} &= \mathbf{A} + \text{grad } \chi; \\ V^{(1)} &= V - \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{aligned} \quad (9)$$

описывают то же самое электромагнитное поле, что и потенциалы \mathbf{A} и V . В выражениях (9) χ представляет собой произвольную скалярную функцию координат [12].

Таким образом, можно сказать, что имеет место произвол в определении величин \mathbf{E} и \mathbf{B} [12]. Это позволяет [12, 14, 15] определить дивергенцию векторного магнитного потенциала $\text{div } \mathbf{A}$ произвольным образом с целью максимально возможного упрощения дифференциального уравнения (5) для подобласти Ω_1 с вихревыми токами. Процедура наложения условия на дивергенцию векторного магнитного потенциала $\text{div } \mathbf{A}$ называется калибровкой [14, 15, 20, 21]. Наиболее распространенными калибровками, используемыми при решении задач расчета трехмерных электромагнитных полей, являются [12, 15]:

- калибровка Кулона

$$\text{div } \mathbf{A} = 0; \quad (10)$$

- калибровка Лоренца

$$V = -\frac{1}{\mu\gamma} \text{div } \mathbf{A}, \quad (11)$$

которая определяет дивергенцию векторного магнитного потенциала $\text{div } \mathbf{A}$ в терминах скалярного электрического потенциала V .

Однозначность векторных потенциалов (например, векторного магнитного потенциала \mathbf{A}) при решении конкретной задачи обеспечивается [14, 15] соответствующим выбором калибровки (10) или (11). Далее, однозначность величин, описывающих электромагнитное поле (\mathbf{B} , \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{J}), гарантирует единственность скалярных потенциалов (например, скалярного электрического потенциала V) с точностью до постоянной величины [14, 15]. Граничные условия для векторных потенциалов подробно описаны в [14, 15].

ОСНОВНЫЕ ПОСТАНОВКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕКТОРНОГО МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Рассмотрим наиболее распространенные постановки задач, основанные на использовании векторного магнитного потенциала \mathbf{A} и калибровок (10) или (11).

Использование калибровки Лоренца (11) позволяет записать дивергенцию векторного магнитного потенциала $\text{div } \mathbf{A}$ в терминах скалярного электрического потенциала V и, таким образом, полностью исключить скалярный электрический потенциал V из рассмотрения [12, 15, 22].

При использовании калибровки Лоренца (11) дифференциальное уравнение (5) для подобласти Ω_1 приобретает вид [15]

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \gamma \operatorname{grad} \frac{1}{\mu \gamma} \operatorname{div} \mathbf{A} + \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0. \quad (12)$$

При решении дифференциального уравнения (12) в качестве граничных условий задается нормальная или тангенциальная компонента векторного магнитного потенциала \mathbf{A} на границах расчетной области [15].

Преимуществом рассматриваемой постановки является отсутствие скалярного электрического потенциала V в дифференциальном уравнении (12). Указанное уравнение решается относительно трех компонент векторного магнитного потенциала \mathbf{A} (A_x, A_y, A_z), т.е. при трех неизвестных в узле каждого конечного элемента, в то время как уравнение (5) для подобласти Ω_1 в общем случае решается также относительно скалярного электрического потенциала V (четвертое неизвестное в узлах конечных элементов). Таким образом, использование калибровки Лоренца позволяет уменьшить размерность системы линейных алгебраических уравнений и тем самым снизить вычислительные затраты при решении прикладных задач.

В то же время, рассматриваемая постановка обладает недостатком, проявляющимся [14, 15] при применении метода Галеркина для решения соответствующих дифференциальных уравнений методом конечных элементов. Как показано в [14, 15], использование калибровки Лоренца в случае разрывной (различной в соседних конечных элементах) удельной электрической проводимости γ в подобласти Ω_1 приводит к несимметричной системе разрешающих уравнений метода конечных элементов. Попытки устранения указанной несимметрии приводят [14, 15] к разрывности скалярного электрического потенциала V , что противоречит условиям непрерывности тангенциальных компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{A} . Следовательно, данный недостаток ограничивает применение калибровки Лоренца в случае постоянной величины удельной электрической проводимости γ . При этом, скалярный электрический потенциал V может быть принят равным нулю [14, 22], вследствие чего калибровка Лоренца (11) становится эквивалентной калибровке Кулона (10).

Другие постановки, основанные на калибровке Лоренца [23], также обладают указанным недостатком и не могут быть обобщены на случай изменяющейся от элемента к элементу удельной электрической проводимости.

Представляется, что наряду с описанными постановками, можно применить еще один подход к получению дифференциальных уравнений электромагнитного поля с использованием калибровки Лоренца [22]. Учитывая, что

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla \frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{A},$$

уравнение (5) для подобласти Ω_1 можно записать в следующем виде [22]:

$$\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla \frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{A} - \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{div} \mathbf{A} + \gamma V \right). \quad (13)$$

Окончательно, при использовании калибровки Лоренца (11) уравнения электромагнитного поля приобретают вид [6, 22]

$$\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla \frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{A} \quad \text{в подобласти } \Omega_1; \quad (14)$$

$$\nabla \frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{A} + \mathbf{J}_S = 0 \quad \text{в подобласти } \Omega_2. \quad (15)$$

или, в других обозначениях,

$$\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right); \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) + \mathbf{J}_S = 0. \quad (17)$$

Как и уравнение (12), дифференциальные уравнения (14), (15) или (16), (17) решаются при трех неизвестных в узлах конечных элементов (A_x, A_y, A_z), что позволяет сохранить отмеченное выше преимущество калибровки Лоренца (снижение размерности системы линейных алгебраических уравнений и вычислительных затрат). При этом, вид уравнений (16), (17) обеспечивает, в отличие от уравнения (12), получение симметричной системы разрешающих уравнений метода конечных элементов. Представляется, что тем самым устраняется указанный выше недостаток калибровки Лоренца.

Проанализируем основные постановки задач конечноэлементного анализа нестационарных трехмерных электромагнитных полей в проводящих средах при наличии вихревых токов, основанные на калибровке Кулона (10). Основным отличием приведенных ниже постановок от рассмотренной ранее является использование совокупности нескольких (минимум двух) потенциалов для описания электромагнитного поля в расчетной области. При этом, в подобластях Ω_1 и Ω_2 в общем случае используются различные комбинации потенциалов электромагнитного поля.

1) постановка $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ [14]

Обозначение $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ показывает [14], что для описания электромагнитного поля в подобласти Ω_1 используются векторный магнитный потенциал \mathbf{A} и скалярный электрический потенциал V , а в подобласти Ω_2 – векторный магнитный потенциал \mathbf{A} .

В [14] доказана однозначность векторного магнитного потенциала \mathbf{A} при использовании данной постановки. При этом скалярный электрический потенциал V определяется с точностью до постоянной величины, которая может быть определена путем задания значения V в одной точке пространства [14].

При использовании рассматриваемой постановки уравнения электромагнитного поля приобретают следующий вид [14]:

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{grad} \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \mathbf{A} + \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \gamma \operatorname{grad} V = 0 \quad \text{в подобласти } \Omega_1; \quad (18)$$

$$\operatorname{div} (-\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \gamma \operatorname{grad} V) = 0 \quad \text{в подобласти } \Omega_1; \quad (19)$$

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{grad} \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \mathbf{A} = \mathbf{J}_S \quad \text{в подобласти } \Omega_2. \quad (20)$$

В [14] приведены граничные условия для решения дифференциальных уравнений (18)–(20).

Преимуществом постановки $\mathbf{A}, V - \mathbf{A}$ является [14, 15] формирование симметричной системы разрешающих уравнений метода конечных элементов в случае разрывной (т.е. изменяющейся от элемента к элементу) удельной электрической проводимости ма-

териала. Это позволяет с высокой точностью моделировать распределения электромагнитных полей в современном электротехническом оборудовании, содержащем множество конструктивных элементов, выполненных из различных материалов с существенно различающейся удельной электрической проводимостью. В качестве примера можно привести [19] стальной ротор синхронного турбогенератора с обмоточными пазы, заполненными медной обмоткой возбуждения, которая удерживается дюралюминиевыми либо титановыми пазовыми клиньями.

Недостатком рассматриваемой постановки является [15] необходимость решения дифференциальных уравнений (18)–(20) при четырех неизвестных в узле каждого конечного элемента (три компоненты векторного магнитного потенциала A (A_x, A_y, A_z) и скалярный электрический потенциал V) в подобласти Ω_1 и при трех неизвестных в узле (A_x, A_y, A_z) в подобласти Ω_2 . Это увеличивает вычислительные затраты при решении прикладных задач расчета электромагнитных полей и затрудняет создание эффективного прикладного программного обеспечения.

2) постановка $A, V - \psi$ [14]

Данная постановка позволяет [14, 15] уменьшить количество неизвестных в узлах конечных элементов в свободной от вихревых токов подобласти Ω_2 до одного (по сравнению с тремя неизвестными в постановке $A, V - A$) благодаря использованию скалярного магнитного потенциала ψ вместо векторного магнитного потенциала A в Ω_2 . Таким образом, постановка $A, V - \psi$ является более эффективной (с точки зрения вычислительных затрат) по сравнению с рассмотренной выше постановкой $A, V - A$, что особенно проявляется в случае задач со значительными подобластями без вихревых токов.

Однозначность векторного магнитного потенциала A при использовании данной постановки доказана в [14]. Скалярные потенциалы V и ψ определяются с точностью до постоянной величины, которая для скалярного электрического потенциала может быть выбрана путем задания значения V в одной точке пространства [14]. Для скалярного магнитного потенциала ψ указанная постоянная величина определяется путем использования граничного условия $\psi = 0$ [14] на внешней границе расчетной области (см. рис. 1).

При использовании рассматриваемой постановки решаются следующие уравнения электромагнитного поля [14]

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} A - \operatorname{grad} \frac{1}{\mu} \operatorname{div} A + \gamma \frac{\partial A}{\partial t} + \gamma \operatorname{grad} V = 0 \quad \text{в подобласти } \Omega_1; \quad (21)$$

$$\operatorname{div}(-\gamma \frac{\partial A}{\partial t} - \gamma \operatorname{grad} V) = 0 \quad \text{в подобласти } \Omega_1; \quad (22)$$

$$\operatorname{div} \mu \operatorname{grad} \psi = 0 \quad \text{в подобласти } \Omega_2. \quad (23)$$

с соответствующими граничными условиями [14].

Отметим, что в случае удельной электрической проводимости γ , постоянной в пределах всей подобласти Ω_1 , скалярный электрический потенциал V может быть принят равным нулю и исключен из рассмотрения [14, 15], вследствие чего рассматриваемая постановка $A, V - \psi$ переходит в постановку $A - \psi$ с

так называемым модифицированным векторным потенциалом [24, 25].

Рассматриваемая постановка $A, V - \psi$ с точки зрения вычислительных затрат является более эффективной по сравнению с постановкой $A, V - A$. Недостатком постановки $A, V - \psi$ является [15] невозможность ее использования для расчета электромагнитного поля в объектах с многосвязными проводящими конструктивными элементами (подобластями). Кроме того, постановка $A - \psi$, используемая в случае постоянной удельной электрической проницаемости, не может быть применена для решения задач расчета статических полей, поскольку в этом случае невозможно обеспечить однозначность потенциалов электромагнитного поля [14].

3) постановка $A, V - A - \psi$ [14, 26]

Данная постановка позволяет устранить один из недостатков рассмотренной выше формулировки $A, V - \psi$ (невозможность ее использования применительно к объектам с многосвязными проводящими подобластями) благодаря использованию векторного магнитного потенциала A вместо скалярного магнитного потенциала ψ в непроводящих отверстиях проводников [14, 15, 26]. Фактически, рассматриваемая постановка представляет собой [14] комбинацию постановок $A, V - A$ и $A, V - \psi$. К недостаткам постановки $A, V - A - \psi$ следует отнести увеличение (по сравнению с другими постановками, основанными на калибровке Кулона) размерности системы линейных алгебраических уравнений [14], а также ряд проблем при численной реализации алгоритма решения задачи [15].

Кроме приведенных выше, в литературе анализируются также некоторые другие постановки [15, 16, 27], например, постановки $T, \psi - \psi$ [15, 27] и $T, \psi - A - \psi$ [15] и др. Однако, постановки, подробно рассмотренные в настоящей статье, являются наиболее часто используемыми при решении прикладных задач расчета электромагнитных полей, в том числе с использованием коммерческого программного обеспечения. Так, лицензионное программное обеспечение OPERA-3d [28-30] компании Vector Fields Ltd (Оксфорд, Великобритания) использует для расчета нестационарных электромагнитных полей различные модификации постановки $A, V - \psi$. Примеры широкого использования других постановок, основанных на калибровке Кулона (10) и Лоренца (11), приведены, в частности, в работах [1, 14] и [3, 6], соответственно.

КРИТЕРИИ ВЫБОРА ПОСТАНОВОК

Приведенный выше анализ позволяет сформулировать следующие критерии для корректного выбора используемых постановок:

1) постановки должны обеспечивать однозначное решение дифференциальных уравнений электромагнитного поля методом конечных элементов;

2) используемые постановки должны быть предназначены для адекватного описания распределения электромагнитного поля в общем случае разрывной удельной электрической проводимости, изменяющейся от элемента к элементу;

3) реализуемые постановки должны приводить к минимальной размерности системы линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов.

СООТВЕТСТВИЕ ПОСТАНОВОК ПРЕДЛОЖЕННЫМ КРИТЕРИЯМ

Рассмотрим первый критерий для выбора постановок. Однозначность векторного магнитного потенциала A при использовании различных постановок, основанных на калибровках Лоренца и Кулона, доказана в [14, 15, 22]. Скалярные потенциалы V и ψ при использовании калибровки Кулона определяются с точностью до постоянной величины, которая для скалярного электрического потенциала V может быть выбрана путем задания значения V в одной точке пространства [14]. Для скалярного магнитного потенциала ψ указанная постоянная величина определяется путем использования граничного условия $\psi = 0$ [14] на внешней границе расчетной области (см. рис. 1). Таким образом, наиболее часто используемые постановки гарантируют однозначность решения дифференциальных уравнений электромагнитного поля методом конечных элементов.

Остановимся подробно на втором критерии для выбора постановок. Его выполнение необходимо для моделирования распределения электромагнитного поля в современном электротехническом оборудовании, содержащем множество конструктивных элементов, выполненных из различных материалов с существенно различающейся удельной электрической проводимостью γ .

Анализ, выполненный в настоящей работе, показывает, что основные постановки, построенные на калибровке Лоренца (11), не удовлетворяют рассматриваемому критерию.

В то же время, предлагаемый в данной работе подход к получению дифференциальных уравнений электромагнитного поля в виде (14), (15) или (16), (17) позволяет при использовании калибровки Лоренца сформировать симметричную систему разрешающих уравнений метода конечных элементов.

В литературе отсутствует строгое обоснование возможности использования уравнений (14), (15) или (16), (17) для адекватного описания распределения нестационарного трехмерного электромагнитного поля в общем случае разрывной удельной электрической проводимости, изменяющейся от элемента к элементу. Несмотря на это, данный подход достаточно широко используется при решении прикладных задач [3, 6, 12]. Это можно объяснить относительной простотой разработки и численной реализации алгоритма решения задачи методом конечных элементов. Каждое из дифференциальных уравнений в частных производных (16), (17) представляет собой [6] систему уравнений для трех компонент векторного магнитного потенциала $A (A_x, A_y, A_z)$. Например, для уравнения (16), описывающего распределение электромагнитного поля в подобласти Ω_1 , имеем следующую систему из трех уравнений:

$$\gamma \frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_x}{\partial z} \right); \quad (24)$$

$$\gamma \frac{\partial A_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_y}{\partial z} \right); \quad (25)$$

$$\gamma \frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right). \quad (26)$$

В отличие от других постановок, основанных на

калибровках Лоренца и Кулона, методика решения уравнений (24)-(26) методом конечных элементов не требует применения метода Галеркина, поскольку известен соответствующий функционал для каждого из уравнений. Отметим, что указанный функционал по своему виду аналогичен функционалу, соответствующему трехмерному нестационарному уравнению теплопроводности [8-11]. Таким образом, при реализации данного подхода уравнения (14), (15) или (16), (17) решаются относительно трех компонент векторного магнитного потенциала $A (A_x, A_y, A_z)$, т.е. при трех неизвестных в узле каждого конечного элемента, с симметричной системой разрешающих уравнений метода конечных элементов.

Авторы настоящей работы считают возможным применение описанного подхода для разработки прикладного программного обеспечения. Отсутствие в уравнениях (14), (15) членов, содержащих пространственные производные удельной электрической проводимости γ , может быть "компенсировано" при численном решении задачи с помощью достаточно мелкой разбивки расчетной области на конечные элементы.

Анализ постановок, основанных на калибровке Кулона (10), показывает, что описанные выше основные формулировки полностью удовлетворяют рассматриваемому критерию.

Выбор постановки в соответствии с третьим критерием позволит разработать эффективное прикладное программное обеспечение для компьютерного моделирования нестационарных трехмерных электромагнитных полей в сложных пространственных конструкциях современного электротехнического и электроэнергетического оборудования различного назначения. Рассмотрим основные постановки решения задач.

- использование калибровки Лоренца (11) позволяет полностью исключить из рассмотрения скалярный электрический потенциал V и скалярный магнитный потенциал ψ . Таким образом, уравнения электромагнитного поля в подобластях Ω_1 и Ω_2 решаются относительно трех компонент векторного магнитного потенциала $A (A_x, A_y, A_z)$, т.е. при трех неизвестных в узле каждого конечного элемента;

- постановка $A, V - A$ (калибровка Кулона): решение дифференциальных уравнений электромагнитного поля выполняется при четырех неизвестных в узле каждого конечного элемента (три компоненты векторного магнитного потенциала $A (A_x, A_y, A_z)$ и скалярный электрический потенциал V) в подобласти Ω_1 и при трех неизвестных в узле (A_x, A_y, A_z) в подобласти Ω_2 ;

- постановка $A, V - \psi$ (калибровка Кулона): уравнения решаются при четырех неизвестных в узле каждого конечного элемента (три компоненты векторного магнитного потенциала $A (A_x, A_y, A_z)$ и скалярный электрический потенциал V) в подобласти Ω_1 и при одном неизвестном в узле (скалярный магнитный потенциал ψ) в подобласти Ω_2 ;

- постановка $A, V - A - \psi$ (калибровка Кулона) представляет собой комбинацию формулировок $A, V - A$ и $A, V - \psi$ с соответствующим увеличением размерности системы линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов.

Следовательно, рассматриваемому критерию в

наибольшей степени удовлетворяют следующие постановки:

- постановка $A, V - \psi$, основанная на калибровке Кулона.

- постановка, основанная на калибровке Лоренца.

При этом, данное преимущество постановки $A, V - \psi$ проявляется [14, 15] в случае задач со значительными подобластями без вихревых токов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выполнен обзор основных постановок задач расчета нестационарных трехмерных электромагнитных полей методом конечных элементов. Проанализированы их преимущества и недостатки. Для разработки прикладного программного обеспечения выбраны две постановки, одна из которых основана на использовании калибровки Кулона, а другая - калибровки Лоренца. Выбранные постановки обеспечивают однозначное решение дифференциальных уравнений электромагнитного поля методом конечных элементов и приводят к минимальной размерности системы линейных алгебраических уравнений, что позволяет разработать эффективное программное обеспечение для решения прикладных задач.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Schmidt E., Traxler-Samek G., Schwery A. 3D nonlinear transient finite element analysis of eddy currents on the stator damping system of large hydro generator. – Proceedings of the 16th International Conference on Electrical Machines (ICEM'2004), Cracow, Poland, September 5-8, 2004. – 6 p.
- [2] Nakahara A., Takahashi K., Ide K., Kaneda J., Hattori K., Watanabe T., Mogi H., Kaido C., Minematsu E., Hanzawa K. Core loss in turbine generators: analysis of no-load core loss by 3D magnetic field calculation. – Proceedings of the 16th International Conference on Electrical Machines (ICEM'2004), Cracow, Poland, September 5-8, 2004. – 5 p.
- [3] Schlenk C., van Riesen D., Küest T., Henneberger G. Acoustic simulation of an induction machine with squirrel-cage rotor. – Proceedings of the 16th International Conference on Electrical Machines (ICEM'2004), Cracow, Poland, September 5-8, 2004. – 6 p.
- [4] Bíró O., Preis K., Buchgraber G. Finite element model to compute transformer losses. – Proceedings of the 11th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering, Seggau Castle, Austria, September 13-15, 2004. – P. 330–333.
- [5] Zgraja J., Kula P., Pacyniak T. Simulation of induction hardening of massive elements. – Proceedings of the 16th International Conference on Electrical Machines (ICEM'2004), Cracow, Poland, September 5-8, 2004. – 4 p.
- [6] Gong L., Unbehauen R. The 3-D computations of edge induction heating using semi-analytical method and FEM. – Electrical Engineering. – 1996, v. 79. – P.189–195.
- [7] Rausch M., Gebhardt M., Kaltenbaher M., Landes H. Magnetomechanical field computations of a clinical magnetic resonance imaging (MRI) scanner. – Proceedings of the 10th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering, Graz, Austria, September 16-18, 2002. – P. 151–156.
- [8] Gontarowsky P.P., Pantelyat M.G. Application of the finite element method to coupled eddy current, thermal and mechanical problems. – Proceedings of the 6th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering, Graz, Austria, September 1994. – P. 300–308.
- [9] Pantelyat M.G. Coupled electromagnetic, thermal and elastic-plastic simulation of multi-impulse inductive heating. – International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics. – 1998, v. 9. – P. 11 – 24.
- [10] Shulzhenko N.G., Gontarowsky P.P., Matyukhin Yu.I., Pantelyat M.G., Doležal I., Ulrych B. Finite element analysis of electromagnetic, thermal and stress-strain state of joints during induction heating-based assembly and disassembly. – Proceedings of the 11th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering, Seggau Castle, Austria, September 13-15, 2004. – P. 334–339.
- [11] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
- [12] Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. – М.: Мир, 1986. – 229 с.
- [13] Кулон Ж.-Л., Сабонадьер Ж.-К. САПР в электротехнике. – М.: Мир, 1988. – 208 с.
- [14] Bíró O., Preis K. On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents. – IEEE Transactions on Magnetics. – 1989, v. 25, No. 4. – P. 3145–3159.
- [15] Bíró O., Preis K. Finite element analysis of 3-D eddy currents. – IEEE Transactions on Magnetics. – 1990, v. 26, No. 2. – P. 418–423.
- [16] Bíró O., Preis K., Richter K.R. Various FEM formulations for the calculation of transient 3d eddy currents in nonlinear media. – IEEE Transactions on Magnetics. – 1995, v. 31, No. 3. – P. 1307–1312.
- [17] Pantelyat M.G. Numerical analysis of impulse electromagnetic fields in soft ferromagnetic materials. – International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics. – 1999, v. 10. – P. 185 – 192.
- [18] Bhargava S.C. Negative-sequence currents, losses and temperature rise in the rotor of a turbogenerator during transient unbalanced operation. – Electric Machines and Power Systems. – 1983, v. 8. – P. 155–168.
- [19] Шульженко Н.Г., Пантелят М.Г., Руденко Е.К., Петушкова С.А., Зозулин Ю.В. Влияние материала пазовых клиньев на распределение электромагнитного поля, плотности тока и потерь от токов обратной последовательности в роторе турбогенератора при двухфазном коротком замыкании. – Электротехника и электромеханика. – 2005, № 3. – С. 61–64.
- [20] Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
- [21] Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. – М.: Высшая школа, 1983. – 463 с.
- [22] Пантелят М.Г. Численное решение осесимметричных задач магнитотермомеханики: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1990. – 151 с.
- [23] Bíró O. Use of a two-component vector potential for 3-D eddy current calculations. – IEEE Transactions on Magnetics. – 1988, v. 24, No. 1. – P. 102–105.
- [24] Emson C.R.I., Simkin J. An optimal method for 3-D eddy currents. – IEEE Transactions on Magnetics. – 1983, v. 19, No. 11. – P. 2450–2452.
- [25] Rodger D., Eastham J.F. A formulation for low frequency eddy current solutions. – IEEE Transactions on Magnetics. – 1983, v. 19, No. 11. – P. 2443–2446.
- [26] Leonard P.J., Rodger D. Finite element scheme for transient 3-D eddy currents. – IEEE Transactions on Magnetics. – 1988, v. 24, No. 1. – P. 90–93.
- [27] Bíró O., Preis K., Buchgraber G., Ticar I. Thermal-electromagnetic coupling in FEM simulation of power transformers. – Proceedings of the 15th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (Compumag'2005), Shenyang, Liaoning, China, June 26-30, 2005. – 4 p.
- [28] www.vectorfields.com
- [29] Vector Fields Ltd, OPERA-3d User Guide, Version 9.0, Oxford, UK, May 2003.
- [30] Vector Fields Ltd, OPERA-3d Reference Manual, Version 10.5, Oxford, UK, November 2004.

Поступила 27.11.2006