УДК 621.3

МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ИХ СХЕМНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Канов Л.Н., к.т.н., доц.; Костюков В.В.
Севастопольский национальный технический университет
Украина, 99053, Севастополь, Стрелецкая бухта, СевНТУ,
кафедра "Судовые и промышленные электромеханические системы"
тел. (0692) 235-160

Запропонований ефективний чисельно-аналітичний метод моделювання нестаціонарних й перехідних режимів електротехнічних систем. Медод базується на використанні схемних коефіцієнтів і здатен для аналізу як лінійних, так і нелінійних систем. Описана методика обчислення схемних коефіцієнтів. Наведен приклад використання методу.

Предложен эффективный численно-аналитический метод моделирования нестационарных и переходных режимов электротехнических систем. Метод основан на использовании схемных коэффициентов и пригоден для анализа как линейных, так и нелинейных систем. Описана методика вычисления схемных коэффициентов. Приведен пример применения метода.

ВВЕДЕНИЕ

С развитием и усложнением электротехнических систем необходимость исследования переходных процессов приобретает все большее значение [1]. Из существующих методов выгодно выделяется классический метод расчета, основанный на непосредственном решении дифференциальных уравнений и имеющий прозрачный физический смысл [2, 3]. В то же время с усложнением исследуемых систем наметились затруднения в использовании этого метода, которые неоправданно сужают его применение. Речь идет об излишней громоздкости определения постоянных интегрирования в системах высокого порядка [3, 4], т.к. наряду с вычислением производных высокого порядка по переменным системы это требует многократного решения систем линейных алгебраических уравнений.

Статья посвящена разработке численно-аналитического метода моделирования переходных процессов в линейных и нелинейных электромеханических системах, который, сохраняя все достоинства классического анализа, позволил бы в какой-то мере обойти отмеченные затруднения. Метод основан на вычислении схемных коэффициентов, устанавливающих взаимную связь между переменными системы в переходном процессе [5] и на использовании этих коэффициентов для моделирования нестационарных и переходных режимов электротехнических систем.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Переходные процессы в линейной электротехнической системе описываются совокупностью дифференциальных и алгебраических уравнений. Ограничимся здесь случаем простых собственных чисел. В этих условиях каждая переменная имеет свободную составляющую в виде

$$x_{j\,\text{св}}(t)=\sum_{i=1}^{n}A_{ji}\exp(p_i t);\ j=1,2,...,m;\ i=1,2,...,n, \quad (1)$$

где $A_{i,j}$ – постоянные интегрирования; p_i – собственные числа; m – число переменных системы; n – порядок системы; $n \le m$.

Для установления связи между свободными составляющими переменных выделим в выражении (1) слагаемые, соответствующие, например, собственному числу p_1: $A_{j1}\exp(p_1 t);\ j=1,2,...,m$ и подставим их в упомянутую совокупность однородных уравнений системы. После выполнения операций дифференцирования и сокращения множителя $\exp(p_1 t)$ получаем линейную, однородную, алгебраическую систему уравнений относительно постоянных $A_{j,1}$. Примем одну из переменных за базовую, например, $x_1(t)$ и, удерживая $m-1$ уравнений, решим их относительно $A_{j,1};\ j=2,3,...,m$. Очевидно, найденные постоянные интегрирования являются функциями A_{11}. Тогда схемными коэффициентами по собственному числу p_1 назовем отношения $K_j(p_1)=\dfrac{A_{j1}(p_1)}{A_{11}}$: $j=2,3,...,m$. Таким образом, схемные коэффициенты позволяют выразить постоянные интегрирования всех переменных системы при собственном числе p_1 через соответствующую постоянную базовой переменной. Аналогичные действия выполняются и при получении схемных коэффициентов по другим собственным числам. В результате будут сформированы матрица схемных коэффициентов $\boldsymbol{K}$ и матрица $\boldsymbol{A}$ постоянных интегрирования переменных системы, упорядоченные по порядку собственных чисел и переменных системы:

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}1 & 1 & ... & 1\\ K_2(p_1) & K_2(p_2) & ... & K_2(p_n)\\ & & ... & \\ K_m(p_1) & K_m(p_2) & ... & K_m(p_n)\end{bmatrix}; \quad (2)$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ K_2(p_1)A_{11} & K_2(p_2)A_{12} & \dots & K_2(p_n)A_{1n} \\ & & \dots & \\ K_m(p_1)A_{11} & K_m(p_2)A_{12} & \dots & K_m(p_n)A_{1n}\end{bmatrix}. \quad (3)$$

Выражение (1) теперь может быть переписано в виде

$$x_{j\,\text{св}}(t)=\sum_{i=1}^{n}K_j(p_i)A_{1i}\exp(p_i t);$$

$$j=1,2,\dots,m;\ K_1(p_i)\equiv 1\,, \quad (4)$$

а вектор переменных системы дается уравнением

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{P}t}+\boldsymbol{X}_{\text{уст}}(t)\,, \quad (5)$$

где $\left[\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{P}t}\right]^T$ – вектор $\left[\exp(p_1 t),\exp(p_2 t),\dots,\exp(p_n t\right]$; $\boldsymbol{X}_{\text{уст}}(t)$ – установившиеся значения переменных.

Поставим задачу применения схемных коэффициентов для анализа переходных процессов в нелинейных системах на основе кусочно-линейной аппроксимации их характеристик.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Пусть в момент $t>t_i$ переменные системы соответствуют i-му участку кусочно-линейной аппроксимации нелинейной характеристики, t_i – момент выхода переменных на этот участок. Тогда вектор $\boldsymbol{X_i}(t)$ на основании (4) описывается выражением:

$$\boldsymbol{X}_i(t)=\boldsymbol{K_i}\boldsymbol{A}_{1i}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{t}-t_i)}+\boldsymbol{X}_{i\,\text{уст}}(t-t_i)\,,$$

где вектор $\left[\boldsymbol{A_{1i}}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{P}_i(t-t_i)}\right]^T=\big[A_{11i}\exp(p_{1i}(t-t_i)),$
$A_{12i}\exp(p_{2i}(t-t_i)),\dots,A_{1n\,i}\exp(p_{ni}(t-t_i))\big]$,

а индекс i указывает на принадлежность к i-му участку. Полагая $t=t_{i+1}$, получаем вектор переменных

$\boldsymbol{X}_i(t_{i+1})=\boldsymbol{K_i}\boldsymbol{A}_{1i}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{P}_i\Delta t_i}+\boldsymbol{X}_{i\,\text{уст}}(\Delta t_i)$,где $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$.

Момент t_{i+1} определяется переходом переменных системы на $i+1$-й участок характеристики. Пусть в этот момент переменные испытывают скачок, и их новые значения в момент $t_{i+1+}=t_{i+1}+0$ определяются функцией f_i

$$\boldsymbol{X}_i(t_{i+1+})=f_i[\boldsymbol{K_i}\boldsymbol{A}_{1i}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{P}_i\Delta t_i}+\boldsymbol{X}_{i\,\text{уст}}(\Delta t_i)]\,. \quad (6)$$

На $i+1$-ом участке процесс описывается выражением $\boldsymbol{X}_{i+1}(t)=\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{i}+1}\boldsymbol{A}_{1\,i+1}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{P}_{i+1}(\boldsymbol{t}-t_{i+1})}+\boldsymbol{X}_{i+1\,\text{уст}}(t-t_{i+1})$. В момент t_{i+1+} получаем

$$\boldsymbol{X}_{i+1}(t_{i+1+})=f_i[\boldsymbol{X}_i(t_{i+1})]=\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{i}+1}\boldsymbol{A}_{1\,i+1}+\boldsymbol{X}_{i+1\,\text{уст}}(0)]\,. \quad (7)$$

Сопоставляя выражения (6) и (7), определим вектор постоянных для базовой переменной на $i+1$-ом участке через значение этого вектора на i-ом участке:

$$\boldsymbol{A}_{1\,i+1}=\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{i+1}}^{\boldsymbol{-1}}\{f_i[\boldsymbol{K_i}\boldsymbol{A}_{1i}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{P}_i\Delta t_i}+\boldsymbol{X}_{i\,\text{уст}}(\Delta t_i)]-$$
$$-\boldsymbol{X}_{i+1\,\text{уст}}(0)\big\}. \quad (8)$$

На первом участке вектор постоянных определяется по значениям $\boldsymbol{X_1}(0),\boldsymbol{X_1}_{\text{уст}}(0)$.

Вполне аналогичные соотношения справедливы и для расчета переходных процессов в линейной системе, параметры которой скачкообразно меняются во времени. Тогда моменты t_i задаются заранее.

Обобщим предлагаемый метод на случай периодического режима, характеризующегося чередованием значений параметров системы. Пусть период состоит из двух интервалов: i и $i+1$. Тогда по аналогии с выражением (8) определим вектор постоянных интегрирования на $i+2$ интервале

$$\boldsymbol{A}_{1\,i+2}=\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{i}+2}^{\boldsymbol{-1}}\{f_{i+1}[\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{i}+1}\boldsymbol{A}_{1\,i+1}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{P}_{i+1}\Delta \boldsymbol{t}_{i+1}}+$$
$$+\boldsymbol{X}_{i+1\,\text{уст}}(\Delta t_{i+1})]-\boldsymbol{X}_{i+2\,\text{уст}}(0)\}\,.$$

Согласно условию периодичности это равенство можно записать в виде

$$\boldsymbol{A}_{1\,i}=\boldsymbol{K_i}^{\boldsymbol{-1}}\{f_{i+1}[\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{i}+1}\boldsymbol{A}_{1\,i+1}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{P}_{i+1}\Delta \boldsymbol{t}_{i+1}}+$$
$$+\boldsymbol{X}_{i+1\,\text{уст}}(\Delta t_{i+1})]-\boldsymbol{X}_{i\,\text{уст}}(0)\}\,. \quad (9)$$

Уравнения (8), (9) позволяют найти постоянные интегрирования для базовой переменной на двух интервалах периода. Аналогично можно выписать уравнения для постоянных в случае, когда период состоит из нескольких интервалов.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим переходный процесс включения электромагнита постоянного тока с пусковой и удерживающими обмотками [6], рис. 1. Число витков пусковой обмотки меньше числа витков удерживающей, поэтому при включении ток вначале протекает по пусковой обмотке, а в удерживающей наводится эдс, запирающая диод. По мере нарастания тока в пусковой обмотке эта эдс уменьшается, и диод открывается в момент t_1, когда $M\dfrac{di_n}{dt}=U$, где M – коэффициент взаимной индукции, U – напряжение сети.

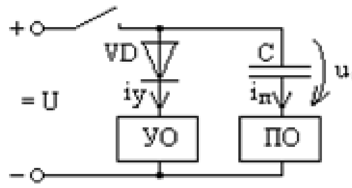

Рис. 1. Схема включения двухобмоточного электромагнита

До начала движения якоря пренебрежем изменением индуктивности и коэффициента взаимной индукции обмоток [6]. Таким образом, в рассматриваемой системе имеется один нелинейный элемент – диод VD, сопротивление которого в закрытом состоянии обозначим r_1, а в открытом – r_2; $r_1>>r_2$.

Система описывается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} & i_n r_n+L_n\frac{di_n}{dt}+M\frac{di_y}{dt}+u_c=U;\ C\frac{du_c}{dt}=i_n; \\ & M\frac{di_n}{dt}+(r_y+r_\partial)i_y+L_y\frac{di_y}{dt}=U \end{aligned}\right\},$$

где r_n,L_n,r_y,L_y – соответственно сопротивления и индуктивности пусковой и удерживающей обмоток; $r_n<r_y$; $L_n<L_y$; $r_\partial=r_1$ или $r_\partial=r_2$. Принимая за базовую переменную $i_n(t)$, получаем систему уравнений для определения схемных коэффициентов

$$\left.\begin{aligned} & r_n + pL_n + pMA_y + A_c = 0;\ pCA_c - 1 = 0; \\ & pM + (r_y + r_д)A_y + pL_y A_y = 0 \end{aligned}\right\},$$

из второго и третьего уравнения которой получаем схемные коэффициенты $K_c(p) = A_c = \dfrac{1}{pC}$; $K_y(p) = A_y = -\dfrac{pM}{pL_y + r_y + r_д}$. На первом участке с учетом нулевых начальных условий, постоянные интегрирования для базовой переменной $i_n(t)$ вычисляются по выражению:

$$\boldsymbol{A}_1 = -\boldsymbol{K}_1^{-1}\boldsymbol{X}_{1\,уст},$$

где $\boldsymbol{X}_{1\,уст}^T = \left[i_{n\,уст}; i_{y\,уст}; u_{c\,уст}\right] = \left[0; \dfrac{U}{r_1 + r_y}; U\right]$.

На втором участке при открытом диоде в соответствии с (8) $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{K}_2^{-1}\left[\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_1 e^{P_1 t_1} + \boldsymbol{X}_{1\,уст} - \boldsymbol{X}_{2\,уст}\right]$. Для нахождения постоянных интегрирования для $i_y(t), u_c(t)$ следует воспользоваться выражением (3).

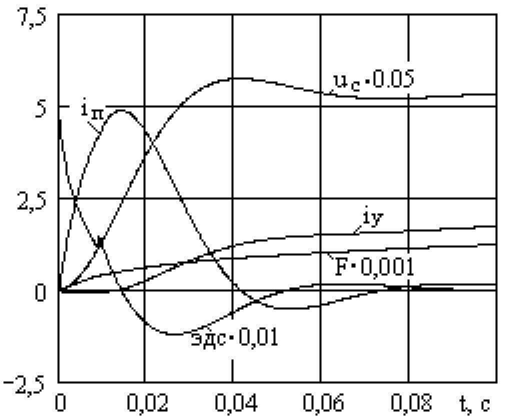

Рис. 2. Процесс включения электромагнита

На рис. 2 изображены результаты моделирования переходного процесса; графики построены по выражениям:

$$x_{j1}(t) = \sum_{i=1}^{3} A_{ji1}\exp(p_{i1}t) + x_{j1\,уст}(t)$$

при $0 \le t < t_1$;

$$x_{j2}(t) = \sum_{i=1}^{3} A_{ji2}\exp(p_{i2}(t - t_1) + x_{j2\,уст}(t - t_1) \text{ при}$$

$t \ge t_1$,

где индекс j пробегает значения 1, 2, 3 и $x_1 = i_n$, $x_2 = i_y$, $x_3 = u_c$. Моделирование выполнено при следующих типичных значениях параметров: $r_y = 50$ Ом, $L_y = 3{,}7$ Гн, $r_n = 10$ Ом, $L_n = 0{,}171$ Гн, $C = 100$ мкФ, $M = 0{,}5$ Гн, $r_1 = 1$ кОм, $r_2 = 1$ Ом. Собственные числа на интервалах: $P_1^T = [-502{,}9 \quad -31{,}466 \mp 66{,}824j]$; $P_2^T = [-52{,}739 \mp 82{,}1194j \quad -13{,}991]$, соответствующие матрицы схемных коэффициентов:

$$\boldsymbol{K_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0{,}31 & 6{,}9 \cdot 10^{-3} + 0{,}038j & 6{,}9 \cdot 10^{-3} - 0{,}038j \\ -1{,}988 & -5{,}768 + 12{,}249j & -5{,}768 - 12{,}249j \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{K_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0{,}144 + 0{,}019j & -0{,}144 - 0{,}019j & -9{,}13 \\ -5{,}537 + 8{,}621j & -5{,}537 - 8{,}621j & -71{,}475 \end{bmatrix};$$

момент открывания диода $t_1 = 8{,}895$ мс; векторы постоянных интегрирования по базовой переменной:

$$\boldsymbol{A}_1^T = [-0{,}709 \quad 0{,}355 \pm 4{,}381j];$$

$$\boldsymbol{A}_2^T = [1{,}989 \pm 3{,}101j \quad 0{,}167].$$

Из рисунка следует, что пусковой ток вместе с намагничивающей силой F, график которой показан уменьшенным в 10^3 раз, интенсивно нарастает. В момент t_1, когда график эдс снижается до значения U, переменные не претерпевают разрыва..

ВЫВОДЫ

Предложен численно-аналитический метод определения постоянных интегрирования в выражениях для моделирования переходных процессов в нелинейных и нестационарных электротехнических системах. Метод основан на схемных коэффициентах и вычислении на их основе полных матриц постоянных интегрирования на каждом линейном участке системы. Достоинством метода является возможность получения аналитических выражений переменных на каждом линейном участке и оценка влияния каждого собственного числа в формировании переходного процесса. Определение постоянных интегрирования не сопровождается вычислением производных от переменных системы в начальный момент времени. Дальнейшим перспективным направлением является разработка методики применения схемных коэффициентов для анализа качества переходных процессов в линейных и нелинейных электротехнических системах.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Куликов Ю.А. Переходные процессы в электрических системах. – М.: Мир: ООО "Изд-во АСТ", 2003. – 283 с.

[2] Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Т.2. / К.С.Демирчян, Л.Р.Нейман, Н.В.Коровкин и др. – СПб.: Изд-во "Питер", 2003. – 576 с.

[3] Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи.–М.:Изд-во "Гардарики", 2000. – 638 с.

[4] Кузовкин В.А. Теоретическая электротехника. – М.: Изд-во "Логос", 2005. – 480 с.

[5] Костюков В.В. Связь между постоянными интегрирования при анализе переходных процессов в линейных электрических цепях // Вестник СевГТУ. Вып: 55 Механика, энергетика, экология: Сб. научн. тр.; Севастоп. нац. техн. ун-т. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2004. – С. 80 -86.

[6] Переходные процессы в электрических машинах и аппаратах и вопросы проектирования / О.Д.Гольдберг, О.Б.Буль, И.С. Свириденко и др. – М.: Высш. шк., 2001. – 512 с.

Поступила 30.05.2006