УДК.621.313

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ НЕКОРРЕКТНОСТЯХ В ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ОСНОВАХ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Кузьмин В. В., д.т.н., проф.
НИИ "Электротяжмаш"
Украина, 61055, Харьков, пр-т Московский, 299
тел. (0572) 95-66-81, e-mail: vvq@ukr.net

Виконано аналіз причин найбільш типових затруднень та нестиковок у сучасних теоретичних основах електротехніки, на базі якого показано, що у більшості випадків своїми коренями вони ідуть у некоректність використання сучасного математичного апарату.

Выполнен анализ причин наиболее типичных затруднений и нестыковок в современных теоретических основах электротехники, на базе которого показано, що в большинстве случаев своими корнями они уходят в некорректности использования современного математического аппарата.

ВВЕДЕНИЕ

По мере развития прикладной электротехники и расширения экспериментального арсенала к настоящему времени накопилось непозволительно много проблем, не имеющих решения в рамках классической теории электричества [1].

Отчасти причиной такого положения является то, что многие построения в теории электричества носят чисто эмпирический, феноменологический характер, за которым не просматривается никакого физического смысла. Как справедливо отмечал Р. Фейнман, в физике наблюдается перманентная подгонка математических уравнений под свежие данные физического эксперимента.

С другой стороны, в процессе такой "подгонки" часто допускается "фривольное" отношение к канонам современной математики.

Рассмотрению этой стороны проблемы и посвящена настоящая статья.

СКАЛЯРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

По сложившейся практике электрических измерений интегральных величин состояния электрических устройств и их элементов результаты этих измерений выражаются скалярными величинами, значение которых могут быть изображены положительными или отрицательными числами [2]. В соответствии с теорией действительных чисел равенство

$$X = -Y \tag{1}$$

означает только то, что числа X и Y – противоположные (по расположению на оси действительных чисел). И никаких признаков "направленности" эти числа нести не могут.

К сожалению, большинство упомянутых выше интегральных скалярных величин в теории электромагнетизма обретается путём линейного или объёмного интегрирования скалярных произведений полевых (истинных) векторов

$$E, B, j, A,$$

в результате чего рождаются чисто скалярные величины

$$U, \Phi, I, \varepsilon,$$

которым в дальнейших разделах ТОЭ авторы пытаются придать "псевдовекторный" характер, на почве чего и возникает целый ряд физически бессодержательных и ошибочных концепций.

К их числу относится, например, продолжающаяся до сих неверная трактовка того факта, что при холостом ходе генераторной ветви э. д. с. ε равна напряжению на зажимах U_0, в то время как в [3] показано, что эти величины суть числа противоположные, т. е.

$$U_0=-\varepsilon, \tag{2}$$

как в цепях постоянного, так и переменного тока.

Вторым камнем преткновения в этом направлении, который до последнего времени порождал споры и дискуссии является интегральный закон Фарадея

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}. \tag{3}$$

Доходило даже до того, что на заседании МЭК обсуждался вопрос об изменении знака в правой части (3).

Если в подобном скалярном соотношении, связывающем силу F с изменением энергии W электромеханической системы при перемещении её элементов в направлении q

$$F=-\frac{\partial W}{\partial q} \tag{4}$$

переход к векторному изображению F осуществляется простым домножением на единичный орт $\boldsymbol{e}_q$

$$\boldsymbol{F}=F\cdot\boldsymbol{e}_q, \tag{5}$$

ибо производная всегда отыскивается при положительном приращении dq, то в (3) производная по времени не несёт в себе никакой связи с пространственными координатами.

И если в простейших случаях (виток постоянного тока) направление Φ и ε отыскивается с помощью "правила винта" и закона Ленца, то в более сложных ситуациях (цепи переменного тока) отыскание амплитудно-фазных соотношений на базе (3) при нарушении соотношения (2) и привели к той неразберихе в проблеме "выбора условно положительных направлений", которая составила предмет многолетних бесплодных дискуссий на страницах журнала "Электричество" и ряда других научно-технических изданий. Ключ к решению этой проблемы нами дан в [3].

Универсальным соотношением, регулирующим направленность интегральных параметров ε и Φ является исходное векторное соотношение

$$E=-\frac{\partial A}{\partial t}. \tag{6}$$

ВЕКТОРНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Следующая разновидность математических некорректностей в ТОЭ заключается в неверной трансформации скалярных уравнений в векторные.

Дело в том, что скалярному равенству

$$X=Y;\ |X|=|Y| \qquad (7)$$

в принципе, соответствует бесконечное множество соотношений между векторами с равными модулями. В коллинеарном варианте их остаётся только два

$$X=Y \text{ и } X=-Y. \qquad (8)$$

Даже если с соблюдением физического смысла первому варианту последнего соотношения можно поставить в соответствие (7), а второму – (1), то в случае уравнений, связывающих три интегральных скалярных параметра, ситуация осложняется. Так буквальная трансформация уравнения баланса напряжений в ветви постоянного тока

$U=E-IR$ для генеративной и

$U=E+IR$ для диссипативной ветви (9)

в векторные соотношения для цепей переменного тока

$$\bar{U}=\bar{E}-\bar{I}Z$$
$$\bar{U}=\bar{E}+\bar{I}Z \qquad (10)$$

и породила поток неувязок при построении векторных диаграмм трансформаторов и электрических машин.

В [3] нами показано, что исходному набору скалярных уравнений (9) соответствует не 2, а 4 векторных уравнений, из которых лишь одно является универсальным

$$\bar{E}+\bar{U}=\bar{I}Z, \qquad (11)$$

как для ветвей постоянного, так и переменного тока. При этом в подавляющем большинстве случаев вектора $\bar{E}$ и $\bar{U}$ направлены в противоположные стороны в соответствии с (2), а не в одну и ту же сторону, как это принято изображать в современной научно-технической литературе.

Далее, с самого начала изложения метода векторных диаграмм для изображения синусоидальных э.д.с., напряжений и токов с помощью вращающихся векторов [4] не акцентируется специфичность такого подхода.

Во-первых, несмотря на достаточно обширный класс векторов в эвклидовом пространстве [2], рассматриваемый в классической математике и содержащий специфические разновидности "скользящих", "связанных" и "свободных" векторов, "изображающие" векторы выходят за рамки этих категорий и потому требуют более чёткого определения. Эта группа векторов представляет собой совокупность "связанных" и синхронно вращающихся векторов, преобразующих временные зависимости параметров электрической цепи в пространственные изображения в плоскости чертежа. При этом связь между последними даётся в виде проекций вращающихся векторов на выделенную ось (чаще всего - вертикальную). Не напрасно в довоенной литературе на каждой векторной диаграмме указывались направление и частота вращения диаграммы (ω) относительно проекционной оси. В немецкой литературе чаще встречается использование вращения проекционной оси.

То, что для рассмотрения амплитудно-фазовых соотношений вращение диаграммы останавливается, требует специальных оговорок, позволяющих избежать принципиальных ошибок при использовании векторных диаграмм.

Во-вторых, в рассматриваемом классе "изображающих" векторов (для моногармонических функций) определено только две операции:

- сложение векторов,
- умножение вектора на скаляр.

Вот примеры некорректностей, допускаемых при пользовании векторными диаграммами.

Цитируем [4]: "разделив все стороны треугольника [напряжений] на *I*, получаем треугольник сопротивлений, катетами которого являются активное и реактивное сопротивление, а гипотенузой – эквивалентное полное сопротивление. …. Разделив все стороны треугольника [токов] на *U*, получаем треугольник проводимостей…." В предыдущем издании [5] содержится следующий дополнительный комментарий: "изображение сопротивлений векторами имеет смысл лишь при неподвижной, невращающейся векторной диаграмме…" и предлагается ввести соответствующие обозначения изображающих векторов $\overline{Z}$ и $\overline{Y}$.

В классе изображающих векторов цитируемые сентенции представляют собой полную бессмыслицу, осложняющую формирование физически содержательных представлений у студентов по следующим причинам.

1. Деление треугольника напряжений на *I* даёт новый треугольник напряжений при единичном значении тока, а отнюдь не треугольник сопротивлений.

2. Активное, реактивное и полное сопротивления – суть чисто скалярные величины, не имеющие никакого отношения к изображающим векторам.

3. Даже второе слагаемое в (10) представляет собой весьма условную конструкцию, ибо умножение вектора $\bar{I}$ на активное сопротивление (т.е. на скаляр) – допустимая операция в классе изображающих векторов, а операция умножения на реактивное сопротивление, как умножение на скаляр с поворотом на прямой угол выходит за рамки определений.

Отмеченные недостатки отчасти сглаживаются и оправдываются упрощением расчетных процедур при использовании комплексного метода, где в классе комплексных чисел допускается умножение (и деление) комплексных изображений.

Но и в этом случае следует подчёркивать, что, к примеру, деление комплексного напряжения $\dot{U}$ на комплексный ток $\dot{I}$ даёт комплексное сопротивление $\dot{Z}$, которое в отличие от упомянутых параметров цепи есть <u>неподвижное</u> комплексное число.

А вот, как нами показано в [6], умножение комплексного тока $\dot{I}$ на сопряженное комплексное напряжение $\dot{U}$ (или наоборот) есть операция незаконная, ибо сопряженные комплексные величины вращаются в обратную сторону (с частотой - ω), что физически совершенно необоснованно.

Вследствие этого также лишено физического смысла соотношение. Связывающее активную *P*, реактивную *Q* и полную *S* мощности

$$S=P+jQ. \qquad (12)$$

О ВИХРЕВОМ ХАРАКТЕРЕ МАГНИТНОСТИ ПОЛЯ

В современной электротехнике почему-то укоренилось ложное, математически некорректное представление о характере магнитного поля.

Цитируем [7]: "магнитное поле, в отличие от электростатического, есть поле вихревое, в том смысле, что дивергенция его всюду равна нулю. Такие поля называются также соленоидальными".

Равенство нулю дивергенции означает только то, что линии поля имеют замкнутый характер, например, концентрических окружностей. Но вихревой характер векторное поле имеет только тогда, когда его ротация отлична от нуля. А это в любом магнитном поле наблюдается только при

$$\mathrm{rot}H=j, \qquad (13)$$

т.е. в проводниках с током. В остальном же пространстве, представляющем область исследований и инженерных расчётов плотность тока равна нулю, а поэтому и ротация поля оказывается нулевой – никаких вихрей там нет.

"Соленоидальным" же называется [2] безвихревое поле с нулевой дивергенцией.

Далее, если ротация поля равна нулю, то это вовсе не означает, что само поле нулевое. К такому ложному выводу часто приходят авторы при анализе явлений электромагнитной индукции, когда при нулевом значении индукции B из уравнения Максвелла

$$\mathrm{rot}E=-\frac{\partial B}{\partial t}=0 \qquad (14)$$

делается ложный вывод о том, что напряжённость поля E также равна нулю ("парадокс трансформатора"). Отнюдь нет – её, эту напряжённость, легко отыскать по (6). Хотя при выводе последней следует иметь в виду, что из равенства

$$\mathrm{rot}X=\mathrm{rot}Y \qquad (15)$$

вовсе не следует однозначно, что

$$X=Y.$$

Этот нюанс и служит до сих пор почвой для безуспешных поисков "ненулевой составляющей А" в целях решения парадоксов, связанных с наблюдаемыми силовыми эффектами поля при $B = 0$ (например – эффект Ааронова-Бома).

ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ СТОКСА

В соответствии с канонами математики [2] формула Стокса

$$\oint_C \mathrm{V}d\mathrm{r} = \int_s \mathrm{rotV}d\mathrm{S} \qquad (16)$$

справедлива при условии существования и непрерывности как самой функции $\boldsymbol{V}$ так и её частных производных первого порядка.

В [8] нами показано, что для длинного соленоида (длина $2H$, диаметр $2R$), обтекаемого током с поверхностной плотностью i радиальное распределение векторного потенциала A имеет вид:

$$A\varphi=\mu_0\, iX/2(X<R), \qquad (17)$$
$$A\varphi=\infty(X=R),$$
$$A\varphi=\mu_0\, i\, R^2/2X(X>R),$$

а частные производные составляют:

$$X\frac{\partial A_\varphi}{\partial X}=\mu_0\, i/2(X>R),$$

$$X\frac{\partial A_\varphi}{\partial X}=-\mu_0\, iR^2/2X^2(X>R). \qquad (18)$$

Как следует из приведённых соотношений векторный потенциал A имеет разрыв в точке $X=R$ как самой функции, так и её первой частной производной. Вследствие этих нарушений обязательных условий непонятно, почему незаконное применение формулы Стокса даёт верный практический результат как внутри соленоида, так и вне него.

Аналогичная ситуация складывается и при анализе магнитного поля длинного проводника с током, имеющего реальные размеры поперечного сечения. При круглом поперечном сечении (радиуса R) разрыв самой функции H на границе проводника исчезает, но ситуация с первой производной остаётся той же, что и в предыдущем случае. Опять мы имеем аналогичное нарушение условий применения формулы Стокса при выводе закона полного тока.

Наверное, дело в том, что классическая математика не рассматривает векторных полей в областях, содержащих их источники (поверхностные и объёмные). Не случайно в [7] приходится вводить понятие "поверхностных" операций ротации и дивергенции в зонах стыка разнородных областей с источниками, хотя сам термин "поверхностные" в приложении к операциям "объёмного дифференцирования", к которым относится ротация и дивергенция, является некорректным.

ВЫВОДЫ

С учётом изложенных примеров становится очевидной необходимость проведения дополнительных работ по устранению имеющихся противоречий между канонами классической математики и положениями теоретической электротехники.

Это потребует как более корректного изложения ряда подходов в теоретической электротехнике, так и, возможно, развития новых направлений в математике.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кузьмин В.В. Проблемы современной электротехники на пути создания новых источников энергии // "Электротехника и электромеханика", 2005, № 2.

[2] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (пер. с англ.). – М: "Наука", 1970.

[3] Кузьмин В.В., Шпатенко Т.В. Об ошибках, допущенных при постановке проблемы выбора условно положительных направлений. // "Электротехника и электромеханика", 2004, № 4.

[4] Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. – Л.: "Энергоиздат", 1981.

[5] Калантаров П.Л., Нейман Л.Р. Теория цепей переменного тока. – М. – Л., ГЭИ, 1959.

[6] Бондаренко Ю.Н., Кузьмин В.В., Шпатенко Т.В. Компенсация и учёт реактивной мощности в энергосистемах – проблемы теории и практики // "Гидроэнергетика Украины", 2004, № 2.

[7] Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М: "Наука", 1976.

[8] Кузьмин В.В., Шпатенко В.С. К проблеме "нелокального действия магнитного поля" на обмотки электрических машин. В сб. "Материалы международной научно-технической конференции 19-23 сентября 2005 г.", Севастополь, изд. СевНТУ.

Поступила 14.10.2005