

ОСОБЕННОСТИ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТИ ДВУХПОЛЮСНОЙ СИСТЕМЫ СИММЕТРИЧНЫХ С-ОБРАЗНЫХ ПОЛЮСОВ

Бранспиз Ю.А., д.т.н., доц.

Восточноукраинский национальный университет им. Владимира Даля

Украина, 91034, Луганск, кв. Молодежный, 20-А, ВНУ им. Владимира Даля, кафедра Электромеханики

E-mail: branspiz@snu.edu.ua

Поляченко Е.Ю.

Восточноукраинский национальный университет им. Владимира Даля

Украина, 91034, Луганск, кв. Молодежный, 20-А, ВНУ им. Владимира Даля, кафедра Компьютерные системы и сети, E-mail: polyachenko@snu.edu.ua, polyachenko@ Rambler.ru

Дранников А.А.

ОКП "ЛОТЭК"

Украина, 91000, Луганск, ул. Карла Маркса, 7, ОКП "ЛОТЭК", отдел Компьютерных технологий

E-mail: lotek@mail.ru

Показано, что при конформном отображении симметричных С-образных полюсов координаты соответствующих точек после отображения могут быть найдены из численного решения трансцендентного уравнения, одинакового за форму запису для симметричных крапок.

Показано, что при конформном отображении симметричных С-образных полюсов координаты соответственных точек после отображения могут быть найдены из численного решения трансцендентного уравнения, одинакового по форме запису для симметричных точек

ВВЕДЕНИЕ

Как показано в [1] расчет двухполюсной магнитной системы шкивных электромагнитных сепараторов, обладающих осевой симметрией (рис. 1, а), может быть осуществлен на основе предварительного расчета идентичной по граничным условиям плоскопараллельной двухполюсной магнитной системы, которая аналогична математической модели шкива (рис. 1, б). Соответствующая плоскопараллельная система (рис. 1, в) учитывает исходную геометрическую конфигурацию электромагнитного шкива, а также те граничные условия, которые имеют для него место, а именно: поверхность полюсов шкива эквипотенциальна так, что разность потенциалов между полюсами одинакова для осесимметричной и плоскопараллельной систем; линия, соответствующая цилиндрической поверхности между полюсами (как продолжение поверхности полюсов), является силовой линией магнитного поля. При этом плоскопараллельная система представляет собой два симметричных С-образных полюсов, для которых требуется определить распределение магнитного поля во внешней области.

С учетом принятых допущений указанная внешняя область есть, по сути, внешней областью соответствующего прямоугольника. Поэтому, учитывая, что в [2] приведено конформное отображение внешней области прямоугольника, позволяющее определять магнитное поле в этой области при заданных условиях на прямоугольнике (конфигурация эквипотенциальных и силовых линий) в данной работе рассматривается указанное конформное отображение применительно к принятой (рис. 1, в) конфигурации полюсов.

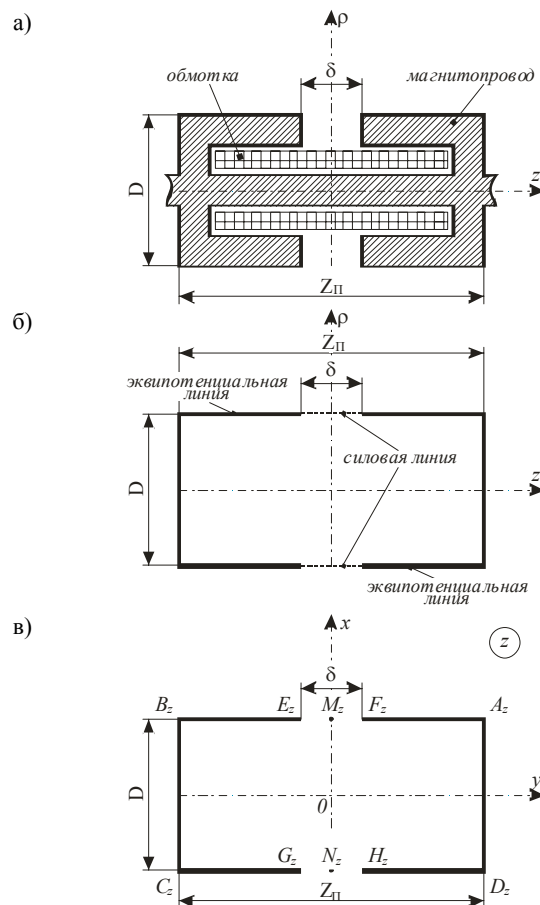


Рис. 1. Эскиз магнитной системы электромагнитного шкива (а) и его плоскомеридианная (б) и плоскопараллельная (в) математическая модель

ФУНКЦИЯ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Отобразим конформно внешнюю область Z прямоугольника $A_z B_z C_z D_z$ (рис. 1, в) на некоторую верхнюю полуплоскость t . В результате в отображенной области получаем магнитную систему двух пластин (рис. 2), которые соответствуют наружной поверхности полюсов электромагнитного шкива.

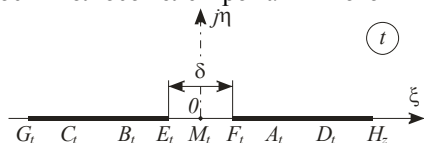


Рис. 2. Конформное отображение внешней области системы двух симметричных С-образных полюсов

В рассматриваемом случае функция отображения определяется уравнением Кристоффеля-Шварца [2, 3]

$$\frac{dz}{dt} = S \cdot \frac{\sqrt{(t-A_t) \cdot (t-B_t) \cdot (t-C_t) \cdot (t-D_t)}}{(t^2+1)^2}, \quad (1)$$

где S - некоторая константа отображения.

Так как начало координат области Z , для упрощения вида уравнения Кристоффеля-Шварца, помещено в центр симметрии прямоугольника $A_z B_z C_z D_z$ (рис. 1, в) и отображенные точки углов исходного прямоугольника в области t расположены симметрично на действительной оси, то примем для координат этих угловых точек (рис. 2) в области t , следующие соотношения: $A_t = -B_t$; $C_t = -D_t$. Кроме того, если принять, согласно [3], соотношение $C_t = -1/A_t$, и сделать замену переменной t на переменную

$$\tau = 2 \cdot \arctg(-t), \quad (2)$$

то интегрирование выражения (1) позволяет получить функцию конформного отображения $z = f(\tau)$, которую, с учетом соответствующих выражений для константы отображения из [3] и постоянной интегрирования из [2], можно записать в следующем виде (здесь Z_{II} - ширина шкива по полюсам, рис. 1)

$$z = \frac{1}{4} \cdot \frac{Z_{II}}{E(k) - (k')^2 \cdot K(k)} \times \left\{ e^{j\tau} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2 \cdot n - 1} \cdot \left[1 - e^{-j(2 \cdot n - 1)\tau} \right] \right\} + \frac{D}{2}, \quad (3)$$

где α - координата точки B_t (рис. 2), выраженная через новую переменную согласно соотношению (2), то есть $\alpha = 2 \cdot \arctg(-B_t)$; a_n - коэффициент ряда, задаваемый следующим рекуррентным соотношением

$$(n+1) \cdot a_{n+1} - 2 \cdot (n-1) \cdot \cos(2 \cdot \alpha) \cdot a_n + (n-2) \cdot a_{n-1} = 0$$

для которого члены с нулевым и единичным индексами равны соответственно $a_0 = 1$ и $a_1 = -\cos(2\alpha)$; $K(k)$, $E(k)$ и $K'(k)$, $E'(k)$ - полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем соответственно $k = \sin(\alpha)$ и $k' = \sqrt{1-k^2}$.

Как видно из приведенного, одним из основных параметров определяющих функцию конформного

отображения $z = f(\tau)$ по (3) является параметр α , который может быть найден по параметру k , учитывая их взаимную связь ($\alpha = \arcsin k$), из решения уравнения (обозначение геометрических размеров Z_{II} и D по рис. 1)

$$\frac{Z_{II}}{D} = \frac{E(k) - (k')^2 \cdot K(k)}{E'(k) - k^2 \cdot K'(k)}. \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ПОЛЮСОВ В ОТОБРАЖЕННОЙ ОБЛАСТИ

Полученную функцию отображения можно использовать для нахождения координат точек в области t , определяющих соотношение размеров в исходной полюсной системе (рис. 1, в) и в отображенной системе двух пластин (рис. 2) (точки E_z , F_z , G_z , H_z и соответствующие им точки E_t , F_t , G_t , H_t). Причем в силу принятой симметрии отображения соответствующих точек областей Z и t , достаточно по заданным координатам точек E_z и G_z в Z найти координаты E_t и G_t в t . Тогда координаты точек F_t и H_t , в силу указанной симметрии определяются через следующие равенства $F_t = -E_t$; $H_t = -G_t$.

Что же касается координат точек E_z и G_z , то в области Z они могут быть записаны как некоторые комплексные числа (рис. 1, в)

$$E_z = \frac{D}{2} + j \cdot \frac{\delta}{2}, \quad G_z = -\frac{D}{2} + j \cdot \frac{\delta}{2}, \quad (5)$$

которым, согласно (2), соответствуют действительные числа

$$\tau_E = 2 \cdot \arctg(-E_t), \quad \tau_G = 2 \cdot \arctg(-G_t), \quad (6)$$

определение которых можно осуществить соответственной подстановкой (5) и (6) в (3).

При этом получаются два неявных уравнения для определения τ_E и τ_G , то есть - для определения значений координат E_t и G_t , которые согласно (6) определяются через параметры τ_E и τ_G как

$$E_t = -\operatorname{tg} \frac{\tau_E}{2}, \quad G_t = -\operatorname{tg} \frac{\tau_G}{2}.$$

Отметим, что поскольку E_t и G_t - координаты точек на действительной оси в области t , то действительными будут также и параметры τ_E и τ_G по (6). При этом подстановка этих параметров в правую часть уравнения (3) дает в показателях степеней экспонент мнимое число (например, $e^{j\tau_E}$), что позволяет применить к этим экспонентам теорему Эйлера об экспоненте с мнимым показателем степени, заменив в (3) экспоненты следующими суммами

$$e^{j\tau_E} = \cos(\tau_E) + j \cdot \sin(\tau_E); \quad (7)$$

$$e^{j\tau_G} = \cos(\tau_G) + j \cdot \sin(\tau_G)$$

и

$$e^{-j(2 \cdot n - 1)\tau_E} = \cos((2 \cdot n - 1) \cdot \tau_E) - j \cdot \sin((2 \cdot n - 1) \cdot \tau_E);$$

$$e^{-j(2 \cdot n - 1)\tau_G} = \cos((2 \cdot n - 1) \cdot \tau_G) - j \cdot \sin((2 \cdot n - 1) \cdot \tau_G). \quad (8)$$

Таким образом, если подставить соответствующие координаты точек E_z и G_z по (5) в левую часть функции отображения (3), а параметры τ_E и τ_G по (6) подставить в правую часть функции отображения (3), то после представления соответствующих экспонент по (7) и (8) и приравнивания правой и левой мнимых частей можно получить для координат точек E_t и G_t следующее неявное уравнение

$$\frac{\delta}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{Z_{II}}{E(k) - (k')^2 \cdot k(k)} \times \left\{ \sin(\tau_{E,G}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2 \cdot n - 1} \cdot \sin((2 \cdot n - 1) \cdot \tau_{E,G}) \right\}, \quad (9)$$

которое имеет одинаковый вид для указанных точек, что и отражено в форме записи этого уравнения.

Для непосредственного численного решения уравнений (9) примем, что [4]:

- полный эллиптический интеграл первого рода может быть вычислен по аппроксимации многочленом:

$$K(k) = (a_0 + a_1 \cdot m_1 + a_2 \cdot m_1^2) + (b_0 + b_1 \cdot m_1 + b_2 \cdot m_1^2) \cdot \ln \frac{1}{m_1},$$

где $a_0 = 1,386294$, $a_1 = 0,1119723$, $a_2 = 0,0725296$,

$b_0 = 0,5$, $b_1 = 0,1213478$, $b_2 = 0,0288729$,

$$m_1 = (k')^2 = 1 - k^2;$$

- полный эллиптический интеграл второго рода может быть вычислен по аппроксимации многочленом

$$E(k) = (1 + a_1 \cdot m_1 + a_2 \cdot m_1^2) + (b_1 \cdot m_1 + b_2 \cdot m_1^2) \cdot \ln \frac{1}{m_1},$$

где $a_1 = 0,4630151$, $a_2 = 0,1077812$, $b_1 = 0,2452727$,

$b_2 = 0,0412496$, $m_1 = (k')^2 = 1 - k^2$.

При этом для вычисления полных эллиптических интегралов первого, второго рода с дополнительным модулем $K'(k)$ и $E'(k)$ в этих аппроксимациях следует положить $m_1 = k^2$.

Алгоритм самого решения представляет собой следующую процедуру:

- для заданного отношения Z_{II} к D по (4) определяется параметр k и соответствующий ему параметр $\alpha = \arcsin(k)$;

- по (9) подбирается значение τ_E или τ_G , которое удовлетворит (9) при заданном отношении $\frac{\delta}{Z_{II}}$.

При этом для решения уравнения (9) можно использовать метод половинного деления поскольку известен диапазон значений для τ_E и τ_G при изменении отношения $\frac{\delta}{Z_{II}}$ в очевидном диапазоне от 0 до 1.

А именно, учитывая изложенное выше, имеем:

- для τ_E диапазон изменения значений – $[0, \alpha]$;

- для τ_G диапазон изменения значений – $[\pi - \alpha, \pi]$.

Непосредственная реализация указанного алгоритма показала принципиальную возможность чис-

ленно решения уравнения (9) и наличия у него двух корней, соответствующих значениям τ_E или τ_G . При этом из расчетов получено, что зависимость $f(\tau)$, где $f(\tau)$ – правая часть уравнения (9), является симметричной относительно $\tau = \frac{\pi}{2}$ (рис. 3), что позволяет

записать следующее соотношение

$$\tau_G = \pi - \tau_E, \quad (10)$$

согласно которому при нахождении τ_E и τ_G достаточно найти лишь первый корень уравнения (9).

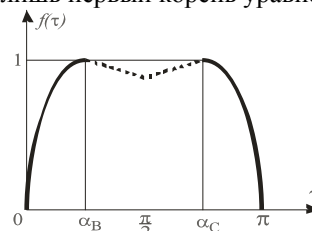


Рис. 3. Качественная зависимость правой части уравнения (9) от переменной τ

Таким образом, из решения уравнений (4) и (9) можно получить координаты точек определяющих размеры эквипотенциальных пластин симметричной двухполюсной системы (рис. 2), для которой известно распределение магнитного поля, что позволяет определить, в свою очередь, распределение магнитного поля в исходной системе (рис. 1, в). Реализация этого может рассматриваться как перспектива дальнейших исследований в данном направлении.

ВЫВОД

При конформном отображении симметричной системы двух С-образных полюсов координаты точек соответствия после отображения могут быть определены из решения трансцендентного уравнения, одинакового для симметричных точек.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бранспиз Ю.А., Ковалевский А.А. К расчету плоскомеридианных полей // Тез. докл. международной научно-методической конференции "Компьютерное моделирование" (г. Днепродзержинск, 29 июня – 1 июля 2000 г.). – Днепродзержинск: ДГТУ, 2000. – С. 25-26.
- [2] Бранспиз Ю.А. Расчет напряженности магнитного поля в рабочей зоне Ш-образного электромагнита // Техн. Электродинамика. – 1999. - №1. – С. 12-15.
- [3] Бинс К., Лоуренсон П. Анализ и расчет электрических и магнитных полей. М.: Энергия, 1970. – 376 с.
- [4] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 816 с.

Поступила 30.08.2005