УДК 612.315.57

КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТОКА ТЕРМОЭЛЕКТРОННОЙ ЭМИССИИ

Павленко Т.П., к.т.н., доц.
Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт"
Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21, НТУ "ХПИ", кафедра "Электрические аппараты"
тел. (057) 707-62-81

В работе рассмотрены соотношения для определения тока термоэлектронной эмиссии электронов, показаны условия, определяющие величину коммутирующего тока и катодного падения напряжения на основе решений уравнений электро - и массопереноса, а также дана оценка влияния на энергетический баланс катодного пятна при тормозном и рекомбинационном излучениях.

У роботі розглянути співвідношення, щодо визначення струму термоелектронної емісії електронів, засвідченні вимоги, щодо визначення комутаційного струму та катодного падіння напруги на основі рішення зрівнянь електро- та вагопереносу, а також дана оцінка впливу на енергетичний баланс катодного пятна при гальмовонаму та рекомбінаційному випромінюваннях.

Известные соотношения для тока термоэлектронной эмиссии, полученные Мэрфи и Гудлом при многочисленных упрощающих допущениях в силу большой погрешности применимы лишь для качественных оценок [1]. Именно этим обстоятельством объясняется существенное расхождение результатов расчетов Ли и экспериментов по плотности и ионной доли тока в катодных пятнах дуги [1. 2].

Как следует из этих данных, форма потенциального барьера близка к треугольной. Это является следствием того обстоятельства, что потенциальная функция $U(Z)$ в (16) [3] от поверхности катода, больших 1 - 2 A^0 является постоянной, а напряженность электрического поля в области туннельного перехода практически не меняется. Поэтому удобно аппроксимировать силовую функцию электрона на интервале туннельного перехода линейной так, чтобы площадь барьера осталась при этом неизменной. В этом случае фундаментальные решения уравнения Шриденгера с точностью до константы выражаются через функции Эйри, а соотношение для проницаемости барьера принимает вид:

$$D = \frac{4}{(A_1 + A_2)^2 + (A_3 - A_4)^2}, \qquad (1)$$

где $A_1 = 3^{-1/3} \cdot \Gamma(2/3) I_{-1/3} \cdot (2/3 \cdot z^{3/2}) \cdot \sqrt{z}$,

$$A_2 = 3^{1/3} \cdot \Gamma(4/3) \times$$

$$\times \{ \frac{\frac{I_{1/3}(2/3 \cdot z^{3/2})}{\sqrt{z}} + z(I_{4/3}(2/3 \cdot z^{3/2}) + I_{-2/3}(2/3 \cdot Z^{3/2}))}{2} \}$$

$$A_3 = \frac{3^{1/3} \cdot \partial(4/3)\sqrt{2m_e \cdot \varepsilon}}{(k \cdot \hbar) \cdot I_{1/3}(2/3 z^{3/2})\sqrt{z}},$$

$$A_4 = \frac{3^{-1/3} \cdot \partial(2/3) k \cdot \hbar}{\sqrt{2m_e} \cdot \varepsilon} \times$$

$$\times \{ \frac{\frac{I_{-1/3} \cdot (2/3 z^{3/2})}{\sqrt{z}} + z(I_{2/3} \cdot (\frac{2}{3} z^{3/2}) + I_{-4/3} \cdot (\frac{2}{3} z^{3/2}))}{2} \},$$

$\Gamma(x)$ - гамма-функция; $I_\nu(x)$ - модифицированная функция Бесселя порядка ν,

$$z = k \cdot (z_2 - z_1), \quad k = \sqrt[3]{\frac{2m_e \cdot A}{\hbar^2}},$$

$A \approx eE$ – параметр определяется из условия равенства площадей исходного криволинейного и треугольного барьеров. Подставим в (17) [3] выражение функции Ферми, получим:

$$f_F(\overline{p}) = \frac{2m_e^2}{h^3} \{1 + \exp[\frac{\varepsilon - \mu}{k_Б \cdot T}]\}^{-1},$$

учитывая, что химический потенциал электронного газа μ близок к уровню Ферми ε_F, находим окончательное расчетное выражение для плотности тока электронной эмиссии:

$$\delta_e = \delta_{Ae} + \delta_{Te}(1 + \eta), \qquad (2)$$

где δ_{Ae}- ток автоэлектронной эмиссии, определяемый по известной формуле Нордгейма [2]; δ_{Te} - ток термоавтоэлектронной эмиссии; $\Delta\varphi_ш$ - величина снижения потенциального барьера для классического электрона вследствие эффекта Шоттки; $\eta(T,E)$ - функция относительной доли туннельного тока:

$$\delta_{Te} = \frac{-4\pi \cdot m_e \cdot e \cdot (k_Б T)^2}{h^3 \exp\left(-e\left(w_{ек} - \Delta\varphi_ш\right)/k_Б T\right)},$$

$$\eta(T, E) = \int_0^{y_m} D(y) \cdot \exp(y) dy, \quad y_m = \frac{e \cdot (w_{ek} - \Delta\varphi_ш)}{k_Б T},$$

$$y = \frac{(e \cdot w_{ек} + \varepsilon_F - \varepsilon)}{k_Б \cdot T}.$$

Решение кинетических уравнений (13) и (14) [3] дает исчерпывающую информацию о процессах переноса в прикатодном слое. Однако, такая информация избыточна, поскольку на практике требуется знание только первых моментов распределения по скоростям.

Проинтегрировав соотношения (14) и (15) [3] по скоростям, получаем уравнение неразрывности для потока нейтралов и ионов:

$$\frac{d}{dz}(n\upsilon) = -\nu_i n, \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dz}(n_i\upsilon_i) = \nu_i n. \qquad (4)$$

Умножив (14) и (15) [3] на скорость υ и проинтегрируем, тогда с учетом (3) и (4) находим уравнения движения:

$$\upsilon \cdot \frac{d\upsilon}{dz} = \sigma_n \cdot n_i(\upsilon_i - \upsilon)\cdot|\upsilon_i - \upsilon|, \qquad (5)$$

$$\upsilon_i \cdot \frac{d\upsilon_i}{dz} = \frac{e \cdot n_i}{m}\cdot E - \sigma_n \cdot n(\upsilon_i - \upsilon)\cdot|\upsilon_i - \upsilon|. \qquad (6)$$

Система уравнений (3) - (6) решается с учетом (15) [3] . При непосредственных вычислениях удобно в (3) - (6) в качестве независимой переменной принять потенциал φ, тогда производные в (3) - (6) примут вид:

$$\frac{d}{dz}(n\upsilon) = E \cdot \frac{d(n\upsilon)}{d\varphi}, \quad \frac{d}{dz}(n_i\upsilon_i) = E \cdot \frac{d(n_i\upsilon_i)}{d\varphi},$$

К уравнениям переноса (3) - (6) следует добавить условия однозначности:

$$\upsilon(0) = \upsilon_0(\chi, T), \quad \upsilon_i(U_k) = 0,$$

$$n(0)\upsilon(0) = \frac{p_n(T)}{\sqrt{2\pi \cdot m \cdot k_Б \cdot T}}, \quad n_i = (U_k) = 0,$$

где $\upsilon_0(\chi,T)$ - среднестатистическая скорость отрыва нейтралов от поверхности катода.

При максвелловском распределении по скоростям

$$\upsilon_0 = \sqrt{\frac{k_Б \cdot T}{2\pi \cdot m}} \cdot u \cdot \exp(u) \cdot \{K_1(u) - K_0(u)\}, \quad u = \frac{m \cdot \chi}{2k_Б \cdot T},$$

где $K_0(u)$ и $K_1(u)$ - функции Макдональда нулевого и первого порядков.

Полный ток определяется как сумма электронного и ионного:

$$\delta = \delta_e + e \cdot n_i \cdot \upsilon_i.$$

Условие (12) [3], фиксирующее величину коммутируемого тока, дает уравнение для определения последнего неизвестного параметра - катодного падения напряжения:

$$-2\pi \cdot \int_0^\infty \delta(r,t)\cdot r \cdot dr = I. \qquad (7)$$

Расчет энергии тормозного и рекомбинационного излучения эмиссионных электронов проводим по оценке энергетического баланса катодного пятна тормозного и рекомбинационного излучения ускоренных в кнудсеновском слое эмиссионных электронов.

Уравнение энергии электрона, рассеиваемого на ионах положительного ствола дуги имеет вид:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2m_e}{m} \cdot \nu_m \cdot \varepsilon; \quad t > 0; \quad \varepsilon(0) = \frac{m_e \cdot \upsilon_e^2}{2},$$

где ε - энергия электрона; ν_m - эффективная частота кулоновских столкновений; υ_e - скорость электрона на выходе из кнудсеновского слоя.

Количество энергии, излучаемое электроном в 1 с в спектральный интервал dω во всех направлениях в результате торможения равно [2]:

$$dj_T(\varepsilon) = \hbar \cdot \omega \cdot n_i \cdot \upsilon \cdot d\sigma_\omega; \quad \upsilon < \sqrt{\frac{2\hbar \cdot \omega}{m_e}},$$

где $d\sigma_\omega = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{e^6}{m_e^2 \cdot c^3 \cdot \hbar \cdot \omega \cdot \upsilon^2} \cdot d\omega$ - сечение тормозного излучения; c - скорость света в вакууме; υ - абсолютная скорость электрона.

Интегрируя $dj_T(\varepsilon)$ в пределах допустимого спектрального интервала

$$0 < \omega < \frac{m\upsilon^2}{2\hbar}$$

находим мощность тормозного излучения:

$$j_T(\varepsilon) = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \frac{e^6}{m_e c^3 \hbar} n_i \upsilon$$

Полная энергия тормозного излучения определится в виде:

$$\varepsilon_*^T = \int_0^{t_0} j_T(\varepsilon) dt,$$

где t - время торможения.

Для вычисления ε_*^T следует определить временную зависимость ε(t) или υ(t).

По определению эффективной частоты столкновений имеем:

$$\sigma_m(\upsilon) \approx \pi \cdot r_0^2$$

где r_0 -характерный радиус кулоновского взаимодействия электрона с ионом:

$$r_0 = \frac{2e^2}{(m_e \cdot \upsilon^2)}.$$

С учетом приведенных соотношений уравнение энергии электрона запишется в виде:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{4\pi \cdot e^4 \cdot n_i}{m_e \cdot m \cdot \upsilon^2},$$

Решая уравнение находим:

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 \cdot \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{3}},$$

где $t_0 = \frac{m_e \cdot m \cdot \upsilon_0^3}{12\pi \cdot e^4 \cdot n_i}$,

Таким образом,

$$\varepsilon_*^T = \frac{3}{4} \cdot c_0 \cdot n_i \cdot \upsilon_0 \cdot t_0, \quad c_0 = \frac{8\pi \cdot e^6}{3\sqrt{3} \cdot m_e \cdot c^3 \cdot \hbar}.$$

Вычисляя числовые коэффициенты находим:

$$\varepsilon_*^T = 2{,}84 \cdot 10^{-21} \cdot A \cdot \upsilon_0^2 \cdot \varepsilon(0),$$

где A - массовое число ядра иона, следовательно, доля энергии тормозного излучения составляет:

$$F_{\Sigma}^{T} = 2{,}84 \cdot 10^{-21} \cdot A \cdot \upsilon_0^2.$$

На катод поступает половина энергии излучения, поэтому искомый коэффициент равен:

$$F_T \approx 1{,}42 \cdot 10^{-21} \cdot A \cdot \upsilon_0^2$$

Выразив начальную скорость на выходе из кнудсеновского слоя через катодное падение напряжения, получаем окончательное расчетное выражение:

$$F_T = 0{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot A \cdot U.$$

Проведем аналогичные выкладки для случая рекомбинационного механизма излучения.

В результате фотозахвата электронов со скоростями в пределах от υ до $\upsilon + d\upsilon$ на n - й энергетический уровень атомов в 1с в среднем на один электрон излучается энергия [1]:

$$I_{\omega n} = \hbar \cdot \omega \cdot n_i \cdot \sigma_{cn} \cdot \varphi(\upsilon) \cdot \upsilon \pm \cdot d\upsilon,$$

где σ_{cn} - сечение фотозахвата для однозарядных ионов:

$$\sigma_{cn} \approx \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{e^{10}}{c^3 \cdot \hbar^4 \cdot m_e \cdot \upsilon^2 \cdot \omega} \cdot n^{-3}, \quad n = 1,2,...$$

где $\varphi(\upsilon)$ - функция распределения электронов по скоростям, для рассматриваемого случая близка к дельта-функции:

$$\hbar\omega = |E_n| + \frac{m_e \cdot \upsilon^2}{2},$$

где E_n - энергия связанного состояния электрона в атоме для главного квантового числа n.

Интегрируя по скоростям электронов либо по всему возможному спектру излучения (с учетом $m \cdot \upsilon \cdot d\upsilon = \hbar \cdot d\omega$) и суммируя по n, находим мощность рекомбинационного излучения, приходящегося на один электрон:

$$j_p(\varepsilon) = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{e^{10} \cdot n_i}{c^3 \cdot \hbar^3 \cdot m_e \cdot \upsilon} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Полная энергия рекомбинационного излучения эмиссионного электрона составит в среднем:

$$\varepsilon_*^p = \int_0^{t_0} j_p(\varepsilon) \cdot dt = \frac{4e^6 \cdot S}{3\sqrt{3} \cdot c^3 \cdot \hbar^3} \cdot \frac{m}{m_e} \cdot \varepsilon(0),$$

где $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$.

Таким образом, находим соответствующий механизму рекомбинационного излучения коэффициент $F_p = 32{,}6 \cdot 10^{-5}$А.

Суммарная доля энергии эмиссионных электронов, поступающая в катодную область посредством излучения составит:

$$F = F_T + F_p = 10^{-5} \cdot A \cdot (0{,}5 \cdot U + 32{,}6).$$

Например, для меди: А=63,5; U=12 В, F=0,0245, что соответствует эквивалентному напряжению.

Для случая короткой дуги необходимо принять в расчет:

$$U = U_K + U_A + w_{eA}.$$

Таким образом, можно установить баланс энергии эмиссионных электронов и аналогично можно оценить энергию, излучаемую электронами на катод из прианодных областей.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lee T.H., Greenwood A. Theory for the cathode mechanism in metal vapour arcs. - "I. Appl. Phys.", 1961, vo1. 32, p. 916-924.

[2] Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1987, 592 с

[3] Т.П. Павленко. Анализ модели дугового разряда. Харьков.: Електротехника и электромеханика, №2, 2005

Поступила 11.01.2005