

## ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАБОЧИХ ПРОЦЕССОВ И ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРОННО-ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ

Канюк Г.И., к.т.н., доц., Шуванов А.Н., Близниченко Е.Н.

Украинская инженерно-педагогическая академия

Украина, 61003, Харьков, Университетская, 16, УИПА, кафедра "Тепловые энергетические установки"

тел. (0572) 20-64-03.

*Розроблені загальні принципи математичного моделювання робочих процесів та елементів електронно-гідравлічних слідкуючих систем. Описані загальні принципи які використовувались при розробці конкретних математичних моделей ЕГСС імітаційних динамічних стендів.*

*Разработаны общие принципы математического моделирования рабочих процессов и элементов электронно-гидравлических следящих систем (ЭГСС). Описанные общие принципы математического моделирования рабочих процессов и элементов ЭГСС использовались при разработке конкретных математических моделей ЭГСС имитационных динамических стендов.*

Электронно-гидравлическая следящая система (ЭГСС), являющаяся разновидностью общего класса мехатронных систем [1], представляет собой комплексное устройство, построенное на основе принципов и технических средств механики, гидравлики, электроники и кибернетики и органически сочетающее в себе соответствующие рабочие процессы и элементы.

При создании и исследовании ЭГСС необходимы различные виды математических моделей ее основных элементов и подсистем: задачи предварительного анализа и, особенно, синтеза ЭГСС требуют построения максимально упрощенных, но достаточно адекватных математических моделей; проверочные расчеты и окончательная оптимизация структуры и параметров системы выполняются на основе уточненных математических моделей, реализуемых на ЭВМ при помощи численных методов анализа (вычислительный эксперимент).

Несмотря на наличие большого количества работ в области математического описания [2-8] и моделирования рабочих процессов и элементов электрогидравлических систем, непосредственное использование известных математических моделей для разработки и исследования быстродействующих прецизионных ЭГСС не представляется возможным. Необходимы систематизация и обобщение математических моделей элементов и подсистем ЭГСС, а также дополнение и уточнение моделей отдельных элементов как по содержанию, так и по формам представления.

Для разработки обобщенных математических моделей ЭГСС необходима классификация их элементов и рабочих процессов, построенная по принципу: "физический процесс" – "группа элементов ЭГСС". Должны быть сформулированы общие уравнения основных физических процессов (механических, гидравлических, электрических, информационных) и конкретные частные комбинации этих общих уравнений, описывающие те или иные группы конструктивных элементов ЭГСС.

Для разработки достаточно адекватных математических моделей ЭГСС необходимы уточнение и конкретизация существующих математических моделей и их отдельных элементов, в частности - учет и способы конкретного математического описания сле-

дующих процессов:

- сил и моментов сухого и жидкостного трения в фрикционных парах гидродвигателей, насосов, механических передач, золотниковых пар, электромеханических преобразователей;
- нелинейных расходно-перепадных характеристик золотниковых распределителей и гидравлических линий;
- инерционных и волновых эффектов в длинных гидравлических линиях;
- статических нелинейных характеристик различных элементов (нечувствительность, ограничение перемещения подвижных элементов и уровней электрических управляющих сигналов, люфтов и гистерезисных эффектов в механических передачах и электромеханических преобразователях, характеристик датчиков, квантования электрических сигналов по времени и по уровню в электронных управляющих устройствах.

Наряду с разработкой полных и точных математических моделей ЭГСС, необходимых для выполнения проверочных динамических расчетов и окончательной параметрической оптимизации требуется также разработка упрощенных, но достаточно адекватных математических моделей различных уровней для выполнения предварительного статического и динамического анализа и для синтеза алгоритмов управления электрогидравлическими исполнительными механизмами.

ЭГСС представляет собой сложную динамическую систему, функционирование которой основано на эффективном сочетании механических, гидравлических, электрических и информационных процессов.

Механические процессы представляют собой механическое движение рабочих органов насосов, гидродвигателей, распределительных и регулирующих устройств, элементов объекта регулирования, сухое трение в опорах и фрикционных парах.

Гидродинамические процессы представляют собой движение рабочих жидкостей в каналах различной формы, в т.ч. в трубопроводах, в полостях насосов, гидродвигателей и регулирующих устройств, в зазорах между трущимися поверхностями, а также сжатие жидкостей и газов в полостях и каналах насосов, гидродвигателей, пневмогидроаккумуляторов.

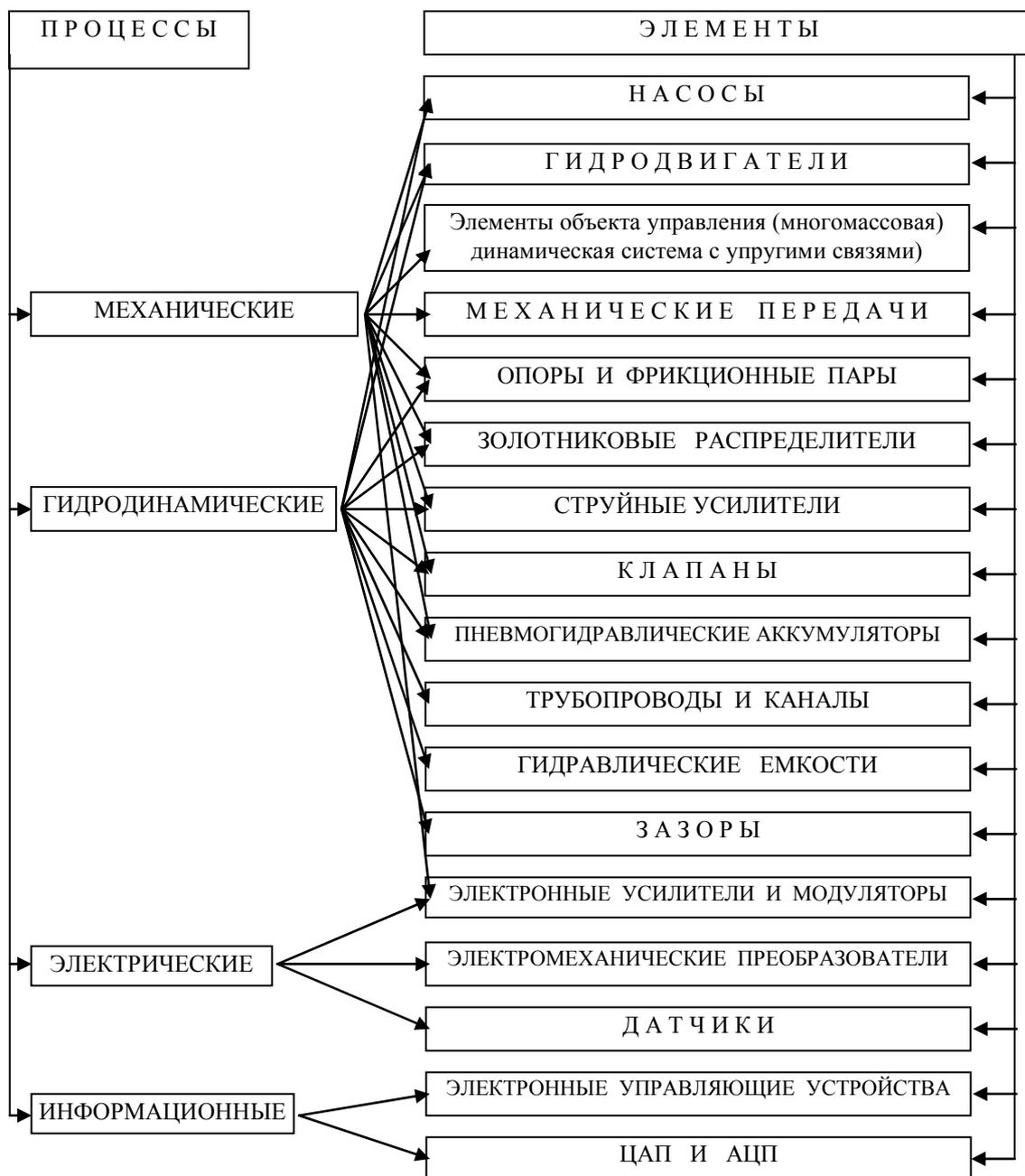


Рис. 1. Рабочие процессы и элементы ЭГСС

Электрические процессы представляют собой процессы изменения напряжения и тока в электрических цепях электромеханических преобразователей, датчиков и элементов системы управления.

Информационные процессы представляют собой процессы формирования, преобразования и передачи управляющих сигналов в элементах системы управления.

В структуре ЭГСС могут быть выделены следующие основные элементы:

- элементы объекта управления (обычно объект управления представляет собой многомассовую динамическую систему с упругими связями);
- насосы;
- гидродвигатели;
- механические передачи;
- опоры и фрикционные пары сухого трения;
- золотниковые распределители (сервоклапаны);

- струйные усилители;
- клапаны;
- пневмогидравлические аккумуляторы;
- трубопроводы и соединительные каналы;
- гидравлические емкости;
- зазоры (фрикционные пары жидкостного трения);
- электромеханические преобразователи;
- электронные усилители и модуляторы;
- датчики;
- электронные управляющие устройства (управляющие ЭВМ с алгоритмическим и программным обеспечением, устройства связи с объектами управления (аналогово-цифровые и цифроаналоговые преобразователи)).

Общая структура взаимосвязи между рабочими процессами и элементами ЭГСС представлена на рис. 1.

Механические процессы в ЭГСС представляют собой поступательные и вращательные (поворотные) механические перемещения элементов объектов регулирования, рабочих органов гидродвигателей (штоков гидроцилиндров и роторов гидромоторов), насосов, распределительных и регулирующих органов (золотников, клапанов, заслонок), сухое трение в опорах и фрикционных парах.

Для математического описания движения сложных динамических систем с различными видами перемещений и с большим числом степеней свободы целесообразно пользоваться уравнениями Лагранжа второго рода, число которых равно количеству степеней свободы (виртуальных перемещений) системы

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial E_n}{\partial \dot{X}_i} \right) - \frac{\partial E_n}{\partial X_i} + \frac{\partial \Pi_n}{\partial \Pi_i} = Q_i \quad (i=1, \dots, n), \quad (1)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial E_b}{\partial \dot{\theta}_j} \right) - \frac{\partial E_b}{\partial X_j} + \frac{\partial \Pi_b}{\partial \Pi_j} = Q_j \quad (j=1, \dots, m), \quad (2)$$

где  $X_i$  и  $\theta_j$  – поступательные (линейные перемещения) и вращательные (углы поворота) виртуальные перемещения системы.

Кинетическая энергия поступательного ( $E_n$ ) и вращательного ( $E_b$ ) движения элементов системы определяются выражениями

$$E_n = 0,5 \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot \dot{X}_i^2, \quad (3)$$

$$E_b = 0,5 \cdot \sum_{j=1}^m J_j \cdot \dot{\theta}_j^2. \quad (4)$$

где  $m_i$  и  $J_j$  – соответственно, массы и моменты инерции элементов.

Выражения для потенциальной энергии  $\Pi_n$  и  $\Pi_b$ , обусловленной упругими связями элементов, определяются суммами произведений сил упругости и крутящих моментов на соответствующие линейные ( $\Delta X_i$ ) или угловые ( $\Delta Q_j$ ) перемещения элементов (в свою очередь, силы упругости и крутящие моменты представляют собой произведения линейных ( $C_{л}$ ) или крутильных ( $C_{кр}$ ) жесткостей элементов на соответствующие изменения виртуальных перемещений), т.е.

$$\Pi_n = \sum_{i=1}^n C_{ли} \cdot \Delta X_i \cdot X_i, \quad (5)$$

$$\Pi_b = \sum_{j=1}^m C_{крj} \cdot \Delta X_j \cdot X_j, \quad (6)$$

Вычислив производные от потенциальной и кинетической энергии системы по обобщенным координатам ( $X_i, \theta_j$ ) и обобщенным скоростям ( $\dot{X}_i, \dot{\theta}_j$ ) и записав выражения для обобщенных сил  $Q_i, Q_j$ , действующих на каждом поступательном и вращательном возможном перемещении, из уравнений (1,2) можно получить конкретные уравнения движения любой сложной динамической системы.

Математическое описание гидродинамических процессов основано на общих уравнениях динамики сплошной среды:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{– уравнение сплошности (неразрывности)} \\ \text{потока} \\ \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0, \\ \text{– уравнение движения среды (уравнение} \\ \text{Навье – Стокса)} \\ \rho \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} = \rho \cdot \vec{f}_0 - \operatorname{grad}(P + \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \operatorname{div} \vec{u}) + 2 \cdot \operatorname{div}(\mu \cdot \varepsilon), \\ \text{– уравнение энергии} \\ \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} t) - \operatorname{div}(\rho \cdot C_p \cdot \vec{u} t) + \frac{dP}{d\tau} + \Phi. \end{array} \right. \quad (7)$$

$\vec{u}, P, t$  – скорость, давление и температура среды;  
 $\vec{f}_0$  – вектор плотности внешних объемных сил;  
 $\varepsilon$  – тензор скоростей деформаций;  
 $\Phi$  – диссипативная функция;  
 $\tau$  – время.

Здесь  $\rho, C_p, \mu, \lambda$  – плотность, удельная теплоемкость, динамический коэффициент вязкости и теплопроводности рабочей жидкости;

Для изотермического движения несжимаемой жидкости система уравнений (7) принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{u} = 0 \\ \rho \cdot \frac{d\vec{u}}{d\tau} = \rho \cdot \vec{f}_0 - \operatorname{grad} P + \mu \cdot \nabla^2 \cdot \vec{u}. \end{array} \right. \quad (8)$$

Решение прикладных задач, связанных с рассмотрением неустановившегося неадиабатического движения сплошных сред, встречает практически непреодолимые трудности. Поэтому в практических приложениях обычно используются квазистационарные одномерные модели неустановившихся потоков. При этом сжимаемость рабочих сред учитывается составляющими расходов жидкости, идущих на заполнение условных гидравлических емкостей (полостей):

$$Q_{сж} = \frac{V}{\chi} \cdot \frac{dP}{d\tau}, \quad (9)$$

где  $V$  – объем полости;  $\chi$  – адиабатический модуль упругости рабочей жидкости.

При принятых допущениях дифференциальное уравнение неразрывности сводится к уравнению баланса расходов, а дифференциальное уравнение движения жидкости (уравнение Навье-Стокса) – к уравнению Бернулли для неустановившегося потока жидкости, которое записывается для участков постоянного поперечного сечения (простых гидравлических линий):

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_1 \cdot u_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_2 \cdot u_2^2}{2 \cdot g} + \left( \lambda_{тр} \cdot \frac{l}{d} + \zeta_M \right) \cdot \frac{u_2^2}{2 \cdot g} + \alpha_0 \cdot \frac{l}{g} \cdot \frac{dU}{d\tau}, \quad (10)$$

или

$$P_1 - P_2 = \rho \cdot g \cdot (Z_1 - Z_2) + \frac{\rho \cdot Q^2}{2 \cdot S^2} \times \left[ (\alpha_1 - \alpha_2) + \left( \lambda_{тр} \cdot \frac{l}{d} + \zeta_M \right) \right] + \alpha_0 \cdot \frac{\rho l}{S} \cdot \frac{dQ}{d\tau} \quad (11)$$

Здесь  $U_1$  и  $U_2$ ,  $P_1$  и  $P_2$  – скорости и давление в выбранных сечениях потока;  $Q$  – расход жидкости;  $l$ ,  $d$  и  $S$  – длина, диаметр и площадь поперечного сече-

ния канала;  $\lambda_{тр}$  и  $\zeta_M$  – коэффициенты гидравлического трения и местного сопротивления.

В высоконапорных турбулентных потоках рабочих сред перепад давлений, обусловленный разностью геометрических уровней  $Z_1 - Z_2$  обычно пренебрежимо мал по сравнению с перепадом, обусловленным гидравлическими потерями трения и в местных сопротивлениях, а коэффициенты неравномерности распределения поля скоростей по сечению канала  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и коэффициент количества движения  $\alpha_0$  можно считать равными единице. В этом случае уравнение Бернулли принимает вид:

$$P_1 - P_2 = \left( \lambda \cdot \frac{l}{d} + \zeta_M \right) \frac{\rho \cdot Q^2}{2 \cdot S^2} + \alpha_0 \cdot \frac{\rho \cdot l}{S} \cdot \frac{dQ}{dt}. \quad (12)$$

При ламинарном движении рабочих жидкостей в малых зазорах и щелях скорость движения в поперечном направлении (по толщине слоя) пренебрежимо мала по сравнению со скоростями движения в других направлениях, а интенсивность изменения скорости по толщине слоя наоборот, значительно выше. Это позволяет перейти от общей системы уравнений динамики сплошной среды к системе уравнений Рейнольдса для смазочного слоя:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{u} = 0; \\ \frac{\partial P}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}. \end{cases} \quad (13)$$

Математические модели информационных процессов в системах управления ЭГСС могут быть построены на основе теории импульсных устройств [6] с использованием звеньев чистого запаздывания, имеющих передаточную функцию:

$$W(S) = \frac{X_{\text{вых}}(S)}{X_{\text{вх}}(S)} = l^{-TS}, \quad (14)$$

где  $T$  – время запаздывания, определяемое периодом квантования (периодом дискретности) элементов цифровых систем управления.

В непрерывной и дискретной временных областях математические модели звена запаздывания (14) соответственно имеют вид:

$$X_{\text{вых}}(t) = X_{\text{вх}} \cdot (t - T), \quad (15)$$

$$X_{\text{вых}}^*(k \cdot T) = X_{\text{вх}}^* \cdot [(k - 1) \cdot T]. \quad (16)$$

Описанные общие принципы математического моделирования рабочих процессов и элементов ЭГСС использовались при разработке конкретных математических моделей ЭГСС имитационных динамических стендов [9].

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мехатроника: Пер. с япон. / Исии Т., Симояма И., Иноуэ Х. и др. - М.: Мир, 1988. - 318 с.: ил.
- [2] Автоматизированное проектирование машиностроительного привода / И.И. Бажин, Ю.Г. Беренгард, М.М. Гайцори и др.; Под общей ред. С.А. Ермакова. - М.: Машиностроение, 1988. - 312 с.: ил.
- [3] Смирнова В.И., Разинцев В.И. Проектирование и расчет автоматизированных приводов. - М.: Машиностроение, 1990. - 368 с.: ил.
- [4] Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем. - М.: Машиностроение, 1976. - 424 с.: ил.
- [5] Устройства и элементы систем автоматического регулирования и управления. Техническая кибернетика. Книга 3. Исполнительные устройства и сервомеханизмы / П.В. Бирюков, А.Г. Боровков, Е.С. Блейз и др. Под ред. В.В. Солодовникова. - М.: Машиностроение, 1976. - 735 с.: ил.
- [6] Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем. - М.: Машиностроение, 1978. - 736 с.: ил.
- [7] Либерман К.Б. Опыт разработки оптимальных автоматических гидроприводов / О-во "Знание" РСФСР. ЛДНТП. - Сер. Автоматизация производства и управления на основе применения ЭВМ. - Л., 1989. - 24 с.: ил.
- [8] Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. - М.: Наука, 1989. - 304 с.: ил.
- [9] Канюк Г.И. Математическая модель электрогидравлического привода имитационного динамического стенда. - Харьков, "Вестник Харьковского государственного политехнического университета" Вып. 43 -1999. - с.25-37.

Поступила 30.09.2004