УДК 621.3.01

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА БЕЗ СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦІАЛУ

Чабан В., д.т.н., проф.
Національний університет "Львівська політехніка", Ряшівський університет
E-mail: vtchaban@polynet.lviv.ua.

Переглядається теорія скалярного потенціалу в електродинаміці вихрових полів. Йому відводиться місце лише при описі електростатичних полів. Таке твердження збігається з чисто математичним підходом і не протирічить фізичній суті процесу, оскільки йдеться про величину, позбавлену, на відміну від векторного потенціалу вихрових полів, фізичного змісту. Запропонована теорія дає можливість не тільки глибше зрозуміти природу електромаґнетних явищ, але й спростити практичні розрахунки.

Пересматривается теория скалярного потенциала в электродинамике вихревых полей. Ему отводится место только при описании электростатических полей. Такое утверждение совпадает с чисто математическим подходом и не противоречит физической сущности процесса, поскольку речь идет о величине, лишенной, в отличие от векторного потенциал вихревых полей, физического содержания. Предложенная теория позволяет не только глубже понять природу электромагнитных явлений, но и упростить практические расчеты.

ВСТУП

Електродинаміка лінійних і нелінійних середовищ, що оперує векторами електромаґнетного поля, на даний час представляє собою струнку математичну теорію, позбавлену практично внутрішніх протиріч. У її основу покладено рівняння Максвелла, над якими всі наступні математичні перетворення здійснюються за суворими правилами диференціального числення. Дещо складніше у просторі потенціалів електромаґнетного поля, векторного і скалярного. Тут виникає певна неоднозначність у трактуванні співвідношення потенціалів і векторів електричного поля, яку кожен по-своєму старається розв'язати за допомогою так званої калібровки. Найвідоміша з них – калібровка Лоренца, але вона справедлива лише для лінійних ізотропних середовищ, а відтак не може претендувати на найвищу істину. Кожна калібровка підпорядковується основному критерію – максимально спростити рівняння електромаґнетного поля, а заодно отримати їх в естетично завершеному вигляді. Цей принцип спрацьовує і в інших випадках, наприклад, з усіх можливих виразів для густини електромаґнетної енерґії поля був вибраний саме той, що є найпростіший! З настанням часу комп'ютерних симуляцій електромаґнетних полів тут же додався ще один відтінок цього критерію – максимально спростити обчислювальний процес. Дана стаття є логічним продовженням багатьох робіт автора, наприклад [1]. Одержані результати дають можливість подивитися на природу електромаґнетизму під ще одним кутом зору, ближчим до дійсності.

Оскільки в розглядуваній задачі нелінійність, анізотропія середовища відіграють опосереднену роль, то щоб не ускладнювати аналіз, обмежимося лінійним, вдаючись до цих факторів хіба що епізодично. Рух середовища теж не відіграє тут особливої ролі.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Запишемо відомі рівняння Максвелла в нерухомому лінійному ізотропному середовищі

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}; \ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{H} - \boldsymbol{\delta}; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho; \ \mathbf{H} = \nu \cdot \mathbf{B}; \ \mathbf{D} = \varepsilon \cdot \mathbf{E}; \ \boldsymbol{\delta} = \gamma \cdot \mathbf{E} \tag{1}$$

де **H**, **E** – вектори напруженостей маґнетного й електричного поля, **B**, **D** - вектори маґнетної й електричної індукції; δ – вектор густини струму провідности; ρ - об'ємна густина ладунку; γ, ν, ε– електропровідність, релактивність і електрична проникність середовища, ∇ – оператор набла, t – час.

У зв'язку з трудністю визначення крайових умов розрахункові рівняння (1) записують стосовно одного з векторів **H**, або **E**, найчастіше **H**, бо для **E** знайти названі умови вдається в рідкісних випадках.

Якщо з (1) виключити всі вектори крім **H**, то одержимо згадані рівняння вектора напружености маґнетного поля

$$\frac{\varepsilon}{\nu} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} . \tag{2}$$

Якщо з (1) виключити усі вектори крім **E**, то одержимо згадані рівняння вектора напружености електричного поля

$$\frac{\varepsilon}{\nu} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} . \tag{3}$$

Нам невідомі обмеження, що накладаються на просторово-часовий розподіл векторного **A** і скалярного φ потенціалів, як, наприклад,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{4}$$

для вектора індукції маґнетного поля. Обмеження на кшталт калібровки поля не розв'язують проблеми. Єдине, що про вектор **A** можна сказати з впевненістю, так це те, що він є фізичною субстанцією [2], а вектори поля є його похідними. Що ж до скаляра φ, то в просторі вихрового поля йому ніхто не наважиться надати фізичного змісту.

Основні вектори поля знаходимо за просторово-часовим розподілом потенціалів

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} ; \quad \partial \mathbf{A}/\partial t = -\mathbf{E} - \nabla \varphi . \tag{5}$$

До першого виразу (5) приходимо безпосередньо з (4), оскільки той перетворює його в тотожність. До другого виразу (5) приходимо в результаті підстановки $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ в друге рівняння Максвелла (1)

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t\right) = 0 . \qquad (6)$$

Підроторний вираз у (6) визначається з точністю до ґрадієнта деякої скалярної функції $\nabla\varphi$, яка й одержала назву скалярного потенціалу. Але, оскільки це не є суворо визначена функція, то довелося накласти деяку довільну додаткову умову на співвідношення між обома потенціалами, названу калібровкою поля. Її, як було сказано вище, вибирають з умови максимального спрощення основних рівнянь поля й обов’язкової незмінности вимірних величин. Калібровка Лоренца, скориставшись перетвореннями векторного аналізу

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla^2 \mathbf{F} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) , \qquad (7)$$

уможливлює роторні операції замінити лапласіаном.

Так, підставляючи (5) у (1), за умови (7) одержуємо добре відомі рівняння у потенціалах електромаґнетного поля

$$\frac{\varepsilon}{\nu} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{A}; \quad \frac{\varepsilon}{\nu} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nabla^2 \varphi . \qquad (8)$$

Ці рівняння вражають своєю гармонією і красою. Отож, калібровка Лоренца, що надала цим рівнянням такої завершености, виглядає так

$$\frac{\gamma}{\nu} \cdot \varphi + \frac{\varepsilon}{\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} - 0 . \qquad (9)$$

Але вона виявилася непридатною для нелінійних середовищ, а в лінійних приводить до збільшення кількости диференціальних рівнянь (потрібних для обчислення φ). Тож у загальному випадку доцільно прийняти калібровку для нелінійних середовищ $\nabla\varphi = 0$, або ще простіше

$$\varphi = 0 . \qquad (10)$$

Саме такою її прийнято в [1], виходячи з найпростішого вигляду рівнянь електромаґнетного поля в нелінійних середовищах. Практика комп’ютерної симуляції квазістаціонарних електромаґнетних полів переконливо довела, що без скалярного потенціала можна обійтися в усіх без винятку випадках. Але це не означає, що в окремих задачах, наприклад, електростатики, він не може спрощувати розрахунки.

Згідно з (10) вирази (5) будуть

$$\partial \mathbf{A} / \partial t = -\mathbf{E}; \quad \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}. \qquad (11)$$

За умови (11) рівняння (8) спрощуються і набувають не менш естетичного вигляду

$$\frac{\varepsilon}{\nu} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \qquad (12)$$

Порівнюючи між собою вирази (2), (3), (12), бачимо, що вони повністю ідентичні, тому ми запишемо їх у загальному вигляді стосовно деякого абстрактного вектора $\mathbf{U}$

$$\frac{\varepsilon}{\nu} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{U} , \qquad (13)$$

де $\mathbf{U} = \mathbf{H}, \mathbf{E}, \mathbf{A}$.

Можна було б піддатися спокусі шукати для вектора $\mathbf{U}$ фізичне трактування, але така уніфікація не завжди має місце, наприклад, у нелінійних ізотропних, а відтак анізотропних середовищах.

Рівняння (13) вважатимемо основним розрахунковим рівнянням електромаґнетного поля в нерухомому лінійному ізотропному середовищі. Його оживляємо стосовно того чи іншого вектора, виходячи з таких міркувань:

– з кількости просторових компонентів того чи іншого вектора в даній системі координат;

– зі способу одержання крайових умов (першого, другого чи третього роду).

Рівняння (13) легко адаптувати на випадок рухомого середовища [3]

$$\varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} + \gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nu \nabla \times \nabla \times \mathbf{U} - \gamma\left(\mathbf{v} \cdot \nabla\right)\mathbf{U} - \varepsilon \cdot \left(\left(\mathbf{a} \cdot \nabla\right) \cdot \mathbf{U} - \left(\ddot{\mathbf{v}} \cdot \ddot{\nabla}\right) \cdot \mathbf{U}\right) \qquad (14)$$

де $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$ – вектори швидкостей і прискорень. Але перше рівняння (11) у цьому разі ускладниться

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{E} - \left(\mathbf{v} \cdot \nabla\right)\mathbf{A}. \qquad (15)$$

Щоб можна було записати (14) у символах операторів векторного аналізу, як це було зроблено в попередніх випадках, нам довелося взяти сміливість ввести в розгляд деякий вектор $\ddot{\mathbf{S}}$ щодо реального вектора $\mathbf{S}$ і деякий оператор $\ddot{\nabla}$ щодо відомого оператора ∇ [3]

$$\ddot{\mathbf{S}} = \mathbf{x}_0 \cdot S_x^2 + \mathbf{y}_0 \cdot S_y^2 + \mathbf{z}_0 \cdot S_z^2; \quad \ddot{\nabla} = \mathbf{x}_0 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{y}_0 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mathbf{z}_0 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (16)$$

оскільки відповідних засобів векторного аналізу на цей випадок немає.

Диференціальне рівняння (14) описує один з найскладніших електромаґнетних процесів, що відбуваються в лінійному ізотропному рухомому суцільному середовищі.

Запишемо (12) у загальному вигляді на випадок нелінійного анізотропного середовища [1]

$$\Xi^{\partial} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \Gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \times \mathrm{N} \nabla \times \mathbf{A} \qquad (17)$$

де N, Ξ^{∂}, Γ – матриці статичних релактивностей, диференціальних електричних проникностей і статичних електричних провідностей.

На підставі (17) у квазістаціонарному наближенні нами розв’язано цілу низку складних задач електродинаміки, наприклад, [4].

Як бачимо, права частина рівняння (17) не вписується в ліву частину співвідношення (7) із-за наявности в міжроторних операціях матриці статичних релактивностей N. Отже калібровка (9) губить сенс.

А тепер власне перейдемо до обґрунтування калібровки (10).

Перш ніж розглядати фізичний аспект проблеми, наведемо дві важливі теореми векторного аналізу.

Теорема 1. *Безвихрове векторне поле* $\mathbf{F}$ $(\nabla \times \mathbf{F} = 0)$ *в області V є таким тоді і тільки тоді, коли **F** є ґрадієнтом (*$\nabla\psi$*) деякої скалярної функції* ψ *у кожній точці області V.*

Теорема 2. *Векторне поле **F** називається соленоїдальним в області V, якщо в кожній точці області* $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. *Векторне поле є соленоїдальним тоді і тільки тоді, коли **F** є ротором* $\nabla \times \mathbf{A}$ *деякої векторної функції **A**, яка називається векторним потенціалом поля **F**.*

Перша теорема дає нам право в безвихрових електромаґнетних полях з успіхом користуватися поняттям скалярного потенціалу. Там, де $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ таким є електричний скалярний потенціал φ

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \tag{18}$$

а там, де $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, таким є маґнетний скалярний потенціал φ_m

$$\mathbf{H} = -\nabla\varphi_m. \tag{19}$$

Друга теорема дає нам право в соленоїдальному полі вектора $\mathbf{B}$ ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) скористатися векторним потенціалом $\mathbf{A}$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{20}$$

а в соленоїдальному полі вектора $\delta(\nabla \cdot \delta = 0)$ можемо скористатися іншим векторним потенціалом – вектором напружености маґнетного поля $\mathbf{H}$

$$\delta = \nabla \times \mathbf{H} \tag{21}$$

Вихрове поле вектора $\mathbf{E}$ в загальному випадку несоленоїдальне, тому розв'язок для нього не підлягає ні під першу, ні під другу теореми. Але ми його вже маємо у вигляді (5), або (11). Ми відстоюємо (11). А робимо це з таких міркувань.

1. З простору вихрових полів скалярний маґнетний потенціал φ_m витиснутий цілком. Хоча його завжди можна туди повернути. А зробити це можна подібно до (6), як це мало місце з електричним $\mathbf{E}$. Оскільки поле вектора $\mathbf{D}$ тепер соленоїдальне $(\nabla \cdot \mathbf{D} = 0)$, то згідно з другою теоремою можемо записати

$$\mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{R}\,, \tag{22}$$

де $\mathbf{R}$ – деякий вектор.

За умови (22) перше рівняння Максвелла у пустоті набуває вигляду

$$\nabla \times \left(\mathbf{H} - \partial\mathbf{R}/\partial t\right) = 0\,. \tag{23}$$

Звідки

$$\mathbf{H} = \partial\mathbf{R}/\partial t - \nabla\varphi_m. \tag{24}$$

2. Підставляючи (5) у перше рівняння Максвелла (1), одержимо

$$\varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nu\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \left(\gamma \cdot \nabla\varphi + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \nabla\varphi\right). \tag{25}$$

Якщо тепер здійснити розв'язку рівнянь векторного і скалярного потенціалів, як це зробив Лоренц, то мусимо прийняти

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi + \frac{\gamma}{\varepsilon}\nabla\varphi = 0. \tag{26}$$

У квазістаціонарному наближенні $\nabla\varphi = 0$ перетворює (26) у тотожність. А в загальному випадку його треба проінтнґрувати за часом

$$\nabla\varphi = \nabla\varphi(0) \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon} \cdot t\right). \tag{27}$$

За реальних значень ε і γ функція (27) загасає миттєво і ми знову приходимо до попереднього результату – $\nabla\varphi = 0$. У діелектричному середовищі ($\gamma = 0$) одержуємо, що $\nabla\varphi = \mathrm{const}$. Але немає підстав вважати, що діелектричне середовище, на відміну від діелектрично-провідного, зґенерує цей ґрадієнт. Тому логічно знову повернутися до попередньої умови, що $\nabla\varphi = 0$.

3. А тепер про чисто практичний підхід.

Нам не відомо ні одної практичної задачі з области комп'ютерної симуляції, де б хтось наважився інтеґрувати зайві рівняння скалярного потенціалу сумісно з рівняннями векторного потенціалу.

Нам не відомо ні одної практичної задачі, де б не можно було обійтися без скалярного потенціалу φ. А от таких, де тільки ним можна обійтися, окрім електростатики, немає. Покажемо це на двох найпростіших прикладах.

Розгляньмо крайову задачу для диференціальних рівнянь векторного потенціалу в круглому провіднику, по якому протікає постійний струм $i = I = \mathrm{const}$. У циліндричних координатах за умови $\mathbf{A} = \mathbf{z_0}A$ де z – аксіальна координата, рівняння (12) у квазістаціонарному наближенні разом з крайовою умовою буде

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\nu}{\gamma} \cdot \left(\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r}\right); \; -\frac{\partial A}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{i}{2\pi \cdot \nu \cdot R}, \tag{28}$$

де R – радіус провідника.

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$A = \frac{i}{\pi \cdot R^2} \cdot \left(\frac{r^2}{4\nu} - \frac{t}{\gamma}\right) \tag{29}$$

Застосувавши (11) до (29), одержимо очевидні результати

$$B = \frac{i}{2\pi \cdot \nu \cdot R^2}; \; E = \frac{i}{\pi \cdot \gamma \cdot R^2}. \tag{30}$$

Скалярний потенціал φ знаходимо на підставі (18), (30)

$$\varphi = \frac{i \cdot r}{\pi \cdot \gamma \cdot R^2}. \tag{31}$$

Але рівняння (8) на цей випадок ми записати не можемо, бо потенціал (31) взагалі позбавлений других просторових похідних.

А тепер вступимо до святині скалярного потенціалу – розглянемо сферично симетричне поле нерухомого точкового ладунку q.

Розв'язавши відповідну систему рівнянь

$$\nabla^2\varphi = 0; \quad E = -\nabla\varphi, \tag{32}$$

знайдемо

$$\varphi = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r}\,; \quad E = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}\,. \qquad (33)$$

Тепер постає резонне запитання, чи можна одержати вираз для E, оминаючи поняття потенціалу φ? Так. Для цього можна скористатися постулатом Максвелла (1)

$$\nabla \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{E} = \rho\,. \qquad (34)$$

Результат буде тим же. Але тепер прийдеться в загальному випадку розв'язати три скалярні рівняння вектора **E** замість одного для скаляра φ. Ось у чому перевага поняття електростатичного скалярного потенціалу. І тільки. Поза електростатикою він тільки приводить до ускладнення задачі. А чи можна на випадок електростатики записати рівняння векторного потенціалу? – Так. Підставляючи (11) у (34) за умови, що **E** не залежить від t матимемо рівняння

$$\nabla \cdot \varepsilon \cdot (\mathbf{A}/t) = \rho\,. \qquad (35)$$

Його корінь у нашому випадку (за умови $\rho = 0$)

$$A = -\frac{q \cdot t}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r}\,. \qquad (36)$$

Таким чином, векторний потенціал здатен взяти на себе функції скалярного навіть у електростатиці, а поза нею тим більше. Звичайно на практиці ніхто не буде користуватися рівнянням (35), бо є простіше (34).

4. Щоб глибше проникнути в проблему, звернемося до деяких положень квантової електродинаміки, де вектор **A** вперше здобув статус фізичного вектора. Це сталося в 1956 р. завдяки унікальному досліду американців Бома й Аронова по відхиленню електронів у зовнішньому полі вектора **A** тонкого соленоїда, де заздалегідь відсутнє поле вектора **B**. Відтоді поля векторів **H**, **B** і **E**, **D** розглядаються всього-на-всього його похідними, просторовими і часовими. Мало того, квантова електродинаміка будується на потенціалах. Спроби привнести туди вектори закінчилася, як відомо, невдачею.

Потенціали електромаґнетного поля були привнесені у хвильове (в нерелятивістському наближенні і без спіна) рівняння Шредингера для вільної частинки. Якщо наладована частинка масою m і ладунком q рухатиметься в електромаґнетному полі, то це рівняння набуває вигляду [2]

$$-\frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \cdot \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q \cdot \mathbf{A}\right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q \cdot \mathbf{A}\right) \cdot \psi - q \cdot \varphi \cdot \psi\,, \quad (37)$$

де ψ - хвильова функція; $\hbar$ – стала Планка; i – уявне число; $q \cdot \mathbf{A}$– потенціальна енерґія; її при потребі можна виразити і через похідні вектора **A**. Цікаво, що в переважній більшості важливих випадків скалярний потенціал випадає з рівнянь сам по собі. Так, для рівняння Шредингера окремої частинки важливим є імовірність її в деякому місці. Ця імовірність визначається квадратом абсолютної величини хвильової функції. Так ось у густині імовірности потенціал φ вже відсутній. Не спостерігаємо його і в динамічному імпульсі частинки $p = m \cdot \mathbf{v} + q \cdot \mathbf{A}$ і т.п. Існує рівняння для фотонної хвильової функції. І найцікавіше те, що воно збігається з рівняннями Максвелла для електромаґнетного поля, а хвильова функція виявляється звичайним векторним потенціалом **A**.

ВИСНОВКИ

1. Векторний потенціал на сьогодні є фундаментальним фізичним вектором електромаґнетного поля, який при потребі самотужки описує фізичний процес. Скалярні потенціали, електричний і маґнетний, є лише зручними засобоми опису статичних полів.

2. Фундаментальність вектора **A** підтверджується ще й тим, що тільки його рівняння в складних випадках (анізотропії, нелінійности, просторової багатовимірности) є найпростіші (див (14)).

3. Калібровка Лоренца справедлива лише для лінійних ізотропних середовищ. Єдина калібровка, яка спрощує рівняння електроманетного поля нелінійних середовищ, є та, що виключає з розгляду скалярний електричний потенціал, вона заодно максимально спрощує аналіз.

Одержані результати проливають світло на багато питань теорії електромаґнетного поля в нелінійних провідних, діелектричних і напівпровідних середовищах, але про це йтиметься мова в іншій публікації.

ЛІТЕРАТУРА

[1] *Чабан В.* Методи нелінійної електротехніки. – Львів: Вища школа, 1990, 168 с.

[2] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике, т. 6. – Москва: Мир, 1977, 350 с. і т. 8, 9, 524 с.

[3] *Чабан В.* Електродинаміка рухомих середовищ. – Технічні вісті, 2003/1(16), 2(17), с. 33-36.

[4] *Чабан В.Й., Ковивчак Я.В.* Полевая математическая модель турбогенератора в режиме холостого хода в фазных координатах. – Электричество, 2003, № 7, с. 53-57.

Надійшла 13.01.2004