

УДК 532.536

## ЭФФЕКТ ЧИСЛА ПРАНДТЛЯ НА ТЕПЛООБМЕН В КРУГЛОМ ПОРИСТОМ МИКРОКАНАЛЕ

Ковецкая Ю.Ю.

Институт технической теплофизики НАН Украины, ул. Желябова 2а, Киев 03057, Украина

Представлены результаты исследования процесса теплообмена при смешанной конвекции в вертикальном круглом микроканале, заполненном пористым средовищем. Дана оценка эффекта числа Прандтля при различных комбинациях значений чисел Кнудсена и Рэлея на профили температуры и коэффициент теплоотдачи.

Представлены результаты исследования процесса теплообмена при смешанной конвекции в вертикальном круглом микроканале, заполненном пористой средой. Дана оценка эффекта числа Прандтля при различных комбинациях значений чисел Кнудсена и Рэлея на профили температуры и коэффициент теплоотдачи.

The results of studying the heat transfer process into mixed convection in a vertical circular microchannel occupied porous medium were presented. There is an estimation of Prandtl number effect on the temperature profiles and the heat transfer coefficient for various combinations of the values of the Knudsen and Rayleigh numbers.

Библ. 10, рис. 3.

**Ключевые слова:** микроканал, смешанная конвекция, теплообмен.

$A$  – градиент температуры на стенке;  
 $c$  – теплоемкость при постоянном давлении;  
 $G$  – массовый расход;  
 $g$  – гравитационное ускорение;  
 $K$  – проницаемость;  
 $L$  – длина свободного пробега;  
 $p$  – давление;  
 $q$  – тепловой поток;  
 $T$  – температура;  
 $u$  – осевая составляющая скорости;  
 $r, z$  – цилиндрические координаты;  
 $\alpha$  – коэффициент теплопроводности;  
 $\beta$  – коэффициент температурного расширения;  
 $\gamma$  – коэффициент вязкого скольжения;  
 $\mu$  – динамическая вязкость;

$\rho$  – плотность;  
 $\phi$  – относительная температура.

**Безразмерные величины:**

$Da$  – число Дарси;  
 $E$  – параметр градиента давления;  
 $Kn$  – число Кнудсена;  
 $M$  – параметр, учитывающий пористость среды;  
 $Nu$  – число Нуссельта;  
 $Pr$  – число Прандтля;  
 $R$  – безразмерная осевая координата;  
 $Ra$  – число Рэлея;  
 $U$  – безразмерная осевая скорость;  
 $\Theta$  – безразмерная температура.

**Введение**

В последние годы одним из наиболее динамично развивающихся научно-технических направлений является создание бытовых и промышленных микро-размерных устройств. В связи с этим становится очевидным необходимость изучения физики процессов в микроканалах и микропористых средах. Исследование теплообмена и гидродинамики потока в микроканалах с пористой средой проводятся для обеспечения надежности теплообменного оборудования в таких отраслях как теплоэнергетика, микроэлектроника, биология, биомедицина и т.д. [1-3].

Микроканалами принято считать каналы, один из характерных размеров которых (например, диаметр цилиндрического канала) имеет порядок меньше сотни микрон. В этих условиях течение имеет свои особенности. Характер микропроцессов в них зависит не только от эффектов разреженности, что является результатом уменьшения плотности, но и в большей степени зависит от уменьшения линейных масштабов.

Число Кнудсена ( $Kn$ ) является характерным параметром течения газа в микромасштабных порах. Он определяется как отношение молекулярной длины свободного пробега газа к характерной длине пористой среды. С физической точки зрения число Кнудсена описывает влияние проскальзывания на стенке канала, включая скачок скорости и температуры на стенке. Согласно [4] при моделировании систем в диапазоне  $10^{-3} \leq Kn \leq 10^{-1}$  возникает так называемый режим с проскальзыванием, где уравнение Навье-Стокса решается с использованием граничных условий проскальзывания на стенках.

Проблемы теплопередачи комбинированной свободной и вынужденной конвекции в пористой среде изучались на протяжении многих лет. Обширное исследование, связанное с этим вопросом, можно найти в литературе [5, 6]. П. Гарг [7] изучил влияние чисел Грасгофа, Прандтля, параметра проницаемости на профили скорости и температуры, коэффициенты трения и теплоотдачи вдоль пористой поверхности вертикальной пластины.

Существует много работ по смешанной конвекции в микроканалах различных геометрий в чистой среде [8, 9]. В этих статьях представлены результаты исследования смешанной конвекции с граничными условиями скольжения в вертикально расположенном плоском и круглом микроканалах. В результате решения задачи даются соотношения, позволяющие оценивать профили скорости и температуры, а также число Нуссельта как функции чисел Кнудсена, Рэлея и Прандтля.

В статье [10] исследованы процессы теплообмена и гидродинамики при смешанной конвекции в плотном микроканале, заполненном пористой средой. Дана оценка влияния чисел Кнудсена, Рэлея и параметра  $M$ , учитывающего пористость среды на коэффициент теплоотдачи.

Настоящая работа посвящено численному исследованию эффекта числа Прандтля на теплофизические характеристики потока при различных значениях чисел Кнудсена и Рэлея.

### Основные уравнения

В настоящей работе исследуются процессы теплообмена при смешанной конвекции в вертикальном круглом пористом микроканале, радиусом  $r_0$ . Вынужденное движение потока направлено снизу вверх. Рассмотрим особенности процессов теплообмена с проскальзыванием в пористой среде, используя двумерную постановку задачи.

#### Для моделирования процесса были сделаны следующие предположения:

Рассматривается стационарная задача в случае полностью развитого течения. Для учёта свободной конвекции используется подход Буссинеска, согласно которому изменение плотности учитывается только при вычислении подъёмной силы в уравнении (1). Задача описывается модифицированным уравнением Навье-Стокса, Фурье-Кирхгофа и уравнением неразрывности. Уравнение движения отличается от классического тем, что оно содержит член, учитывающий линейное сопротивление Дарси.

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\mu}{K} u + \rho g \beta (T - T_w), \quad (1)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Математическая модель для задач теплообмена в таком канале дополнена граничным условием, описывающим постоянный градиент температуры  $A$  на стенке вдоль оси  $z$ , т.е.,  $T_w = Az$ . Это граничное условие соответствует постоянному тепловому потоку на стенке. Поскольку температура стенки изменяется линейно, а форма профиля температуры потока в поперечном сечении канала (т.е. вдоль радиуса  $r$ ) не зависит от продольной

координаты  $z$  для полностью развитого ламинарного течения, то этот профиль температуры также изменяется линейно. Отсюда следует, что разность температур стенки и потока не зависит от координаты  $z$ , т.е.

$$T(z, r) - T_w = T(z, r) - Az = \phi(r). \quad (4)$$

Граничные условия задаются в виде

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0, \quad (5)$$

$$u = -\gamma L \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \phi = -\frac{\gamma L}{Pr} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = r_0. \quad (6)$$

Введем безразмерные величины

$$r = \frac{r}{r_0}, \quad U = \frac{u}{E}, \quad \theta = \frac{\alpha \phi}{Ar_0^2 E}, \quad Da = \frac{K}{r_0^2}, \quad M = (Da)^{-1/2}, \quad (7)$$

$$E = \left( -\frac{dp}{dx} \right) \frac{r_0^2}{\mu}, \quad Ra = \frac{g \beta \rho r_0^4 A}{\alpha \mu}, \quad Pr = \frac{\mu}{\alpha \rho}. \quad (8)$$

Далее проведем процедуру обезразмеривания системы уравнений (1) и (2). Используя (7) и (8), уравнения (1) и (2) можно переписать в виде:

$$\left( \frac{d^2 U}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dU}{dR} \right) + Ra \theta - MU = -1, \quad (9)$$

$$\left( \frac{d^2 \theta}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\theta}{dR} \right) - U = 0. \quad (10)$$

Преобразуя граничные условия (5) и (6) к безразмерной форме, получим

$$\frac{dU}{dR} = 0, \quad \frac{d\theta}{dR} = 0 \quad \text{при} \quad R = 0, \quad (11)$$

$$U = -Kn \frac{dU}{dR}, \quad \theta = -\frac{Kn}{Pr} \frac{d\theta}{dR} \quad \text{при} \quad R = 1 \quad (12)$$

где  $Kn = \gamma L/a$  - число Кнудсена.

### Результаты расчёта

На основе предложенной математической модели были проведены численные расчёты в программной среде «Comsol multiphysics». Результаты этих расчетов позволили выявить эффект числа Прандтля на профили температуры и коэффициенты теплоотдачи в микроканале, заполненном пористой средой. Расчеты проводились при постоянном значении числа Дарси ( $M = 5$ ).

На рис. 1 показано влияние значения числа Прандтля при двух значениях числа Кнудсена на профили температуры при  $Ra = 10$ .

Из рисунка 1, а видно, что при течении без проскальзывания на стенке ( $Kn = 0$ ) влияние числа Прандтля не наблюдается. Увеличение числа Кнудсена влечет за собой увеличение скачка температуры на стенке, и

его величина зависит от числа Прандтля. Для более высоких чисел Прандтля скачок температуры ослабевает (рис.1, б), что следует из граничных условий (12). Это

ослабление температурного скачка является нелинейным. Расчёты показали, что для чисел  $Pr > 5$  величина температурного скачка остаётся неизменной.

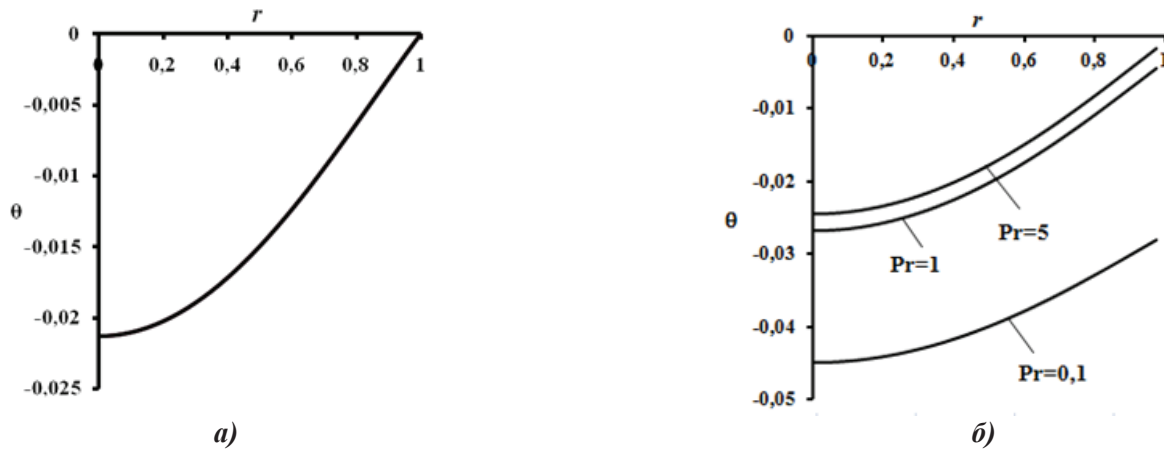


Рис. 1. Распределение профилей температуры в круглом пористом микроканале для различных значений чисел Прандтля при: а)  $Kn = 0$ ; б)  $Kn = 0, 1$ .

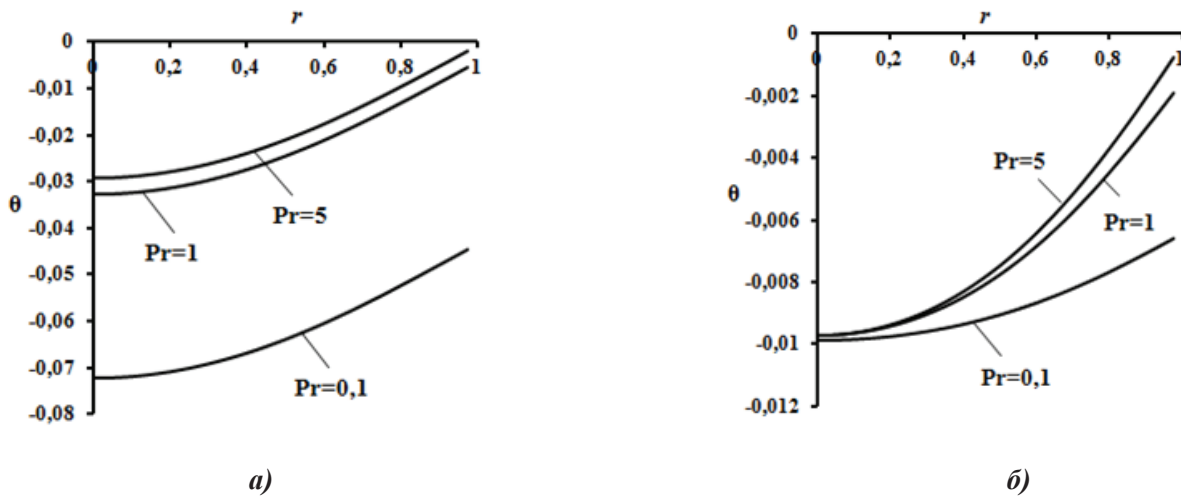


Рис. 2. Распределение профилей температуры в круглом пористом микроканале для различных значений чисел Прандтля при: а)  $Ra = 0,0001$ ; б)  $Ra = 100$ .

На рис. 2 показан эффект числа Прандтля при двух значениях чисел Рэлея на профили температуры при постоянном значении числа Кнудсена  $Kn = 0,1$ . При  $Ra = 100$  (рис. 2, б) влияние свободной конвекции на теплообмен становится преобладающим, причём максимальное влияние чисел Прандтля наблюдается на стенке, что вызвано восходящими конвективными потоками от горячей стенки, а минимальное – в центре канала. Увеличение числа Прандтля также приводит к выравниванию профиля температуры, скачок на стенке нивелируется, что связано с уменьшением плотности среды вблизи стенки.

Величина безразмерных параметров существенно влияет на коэффициент теплоотдачи. Локальный тепло-

вой поток на стенке можно записать как

$$q_w = \frac{Gc_p}{\Pi} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (13)$$

Учитывая линейное распределение температуры (4), из уравнения (13) можно получить:

$$\frac{q_w r_0}{(T_m - T_w)\alpha c_p \rho} = \frac{Au_m r_0^2}{\alpha(T_m - T_w)}, \quad (14)$$

где

$$u_m = \frac{1}{2r_0^2} \int_0^{r_0} ur dr, \quad T_m = \frac{\int_0^{r_0} uT dr}{\int_0^{r_0} u dr} \quad (15)$$

– среднерасходная скорость и средняя температура. – число Нуссельта и  
 Уравнение (14) можно переписать как:

$$Nu = \frac{1}{\Theta_m}, \quad (16)$$

где

$$\Theta_m = \frac{\int_0^1 \theta UR dR}{\int_0^1 UR dR}. \quad (18)$$

$$Nu = \frac{q_w 2r_0}{(T_m - T_w) \alpha c_p \rho} \quad (17)$$

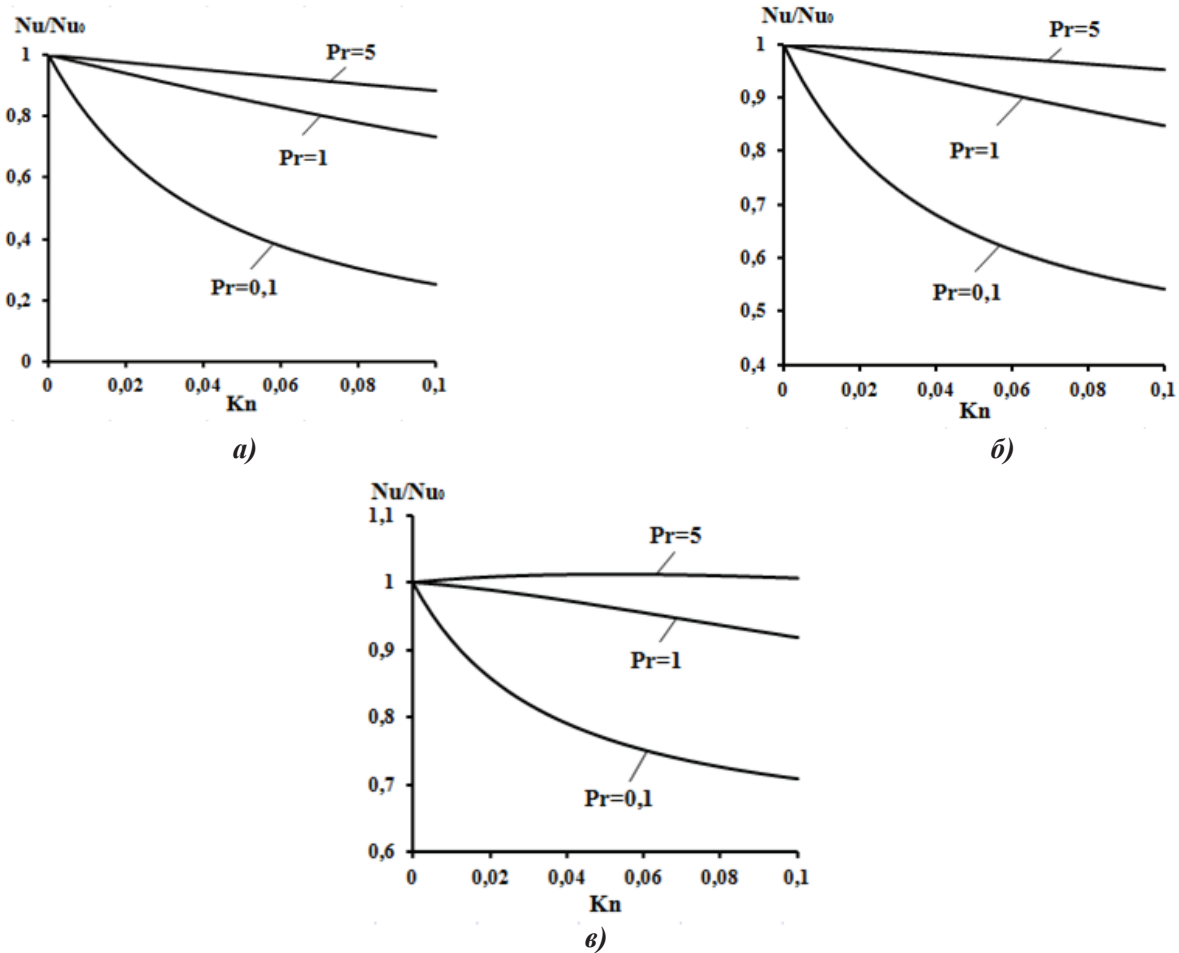


Рис. 3. Относительное число Нуссельта  $\overline{Nu} = Nu/Nu_0$  в круглом пористом микроканале при  
 а)  $Ra = 0,0001$ ; б)  $Ra = 50$ ; в)  $Ra = 200$ .

На рис. 3 показан эффект числа Прандтля при различных значениях чисел Рэлея и Кнудсена на относительное число Нуссельта

$$\overline{Nu} = \frac{Nu}{Nu_0}. \quad (19)$$

Здесь индекс «0» означает, что число Нуссельта относится к случаю  $Kn = 0$ .

Расчёты показали, что с увеличением числа  $Kn$  относительный коэффициент теплоотдачи падает, исключая случай  $Pr = 10$  и  $Ra = 200$  (рис. 3, в). Это связано с увеличением

скачка температуры на стенке, что, в свою очередь, вызывает ухудшение условий теплового взаимодействия между потоком и стенкой. На рис. 3а видно, что при небольших числах  $Ra$  с увеличением числа Прандтля коэффициент теплоотдачи растёт, поскольку уменьшается скачок температуры. Увеличение числа Рэлея влечёт за собой увеличение скорости потока вблизи стенок и также ослабляет эффект проскальзывания и усиливает теплоотдачу. Совместное влияние этих двух факторов сопровождается интенсификацией теплообмена и увеличением относительного числа Нуссельта  $Nu$

**Выводы**

Выполнены расчёты процесса теплообмена при смешанной конвекции в вертикальном круглом микроканале, заполненном пористой средой. Решения задачи были получены с использованием численного подхода. Результаты этих расчетов позволили выявить эффект числа Прандтля при различных значениях чисел Кнудсена и Рэлея на профили температуры и коэффициенты теплоотдачи. Расчёты показали, что с увеличением числа Прандтля профиль температуры выравнивается и уменьшается скачок температуры на стенке. При больших значениях числа Прандтля скачок температуры на стенке практически вырождается. В связи с этим рост числа Прандтля ослабляет эффект проскальзывания и сопровождается интенсификацией теплообмена и увеличением относительного числа Нуссельта. Для чисел  $Pr > 5$  этот эффект нивелируется.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Коновалов Д.А., Дроздов И.Г., Лазаренко И.Н., Шматов Д.П. Моделирование процессов гидродинамики течения охладителя в наноструктурах на основе нитевидных кристаллов кремния // Вестник Воронежского государственного университета. – 2013. – Т.9, №4. – С.1 – 8.
2. Коновалов Д.А., Лазаренко И.Н., Кожухов Н.Н., Дроздов И.Г. Разработка методов интенсификации теплообмена в микроканальных теплообменниках гибридных систем термостабилизации // Вестник Воронежского государственного университета. – 2016. – Т.12, №3. – С. 21 – 30.
3. Власов М.Н., Корсун А.С., Маслов Ю.А., Меринов И.Г., Рачков В.И., Харитонов В.С. Определённые параметры интегральной модели турбулентности применительно к расчёту обтекания стержневых сборок в приближении пористого тела // Теплофизика и аэромеханика. – 2016. – Т.23, №2. – С. 209 – 218.
4. Gad-el-Hak M. The fluid mechanics of microdevices // J. Fluids Engineering. – 1999. – V. 121, №1. – P.5 – 33.
5. Nield D.A. and Bejan A. Convection in Porous Media. - 4th Edition, New York: Springer. – 2013. – 640P.
6. Vafai K. Handbook of Porous Media. - 3rd edition, CRC Press. – 2015. – 784P.
7. Garg P., Purohit G.N., Chaudhary R.C. Similarity solution for combined free-forced convection past a vertical porous plate in a porous medium with a convective surface boundary condition // Int. J. of Applied Mechanics and Engineering. – 2016. – 21(4). – P. 827 – 836.
8. Avramenko A.A., Tyrinov A.I., Shevchuk I.V., Dmitrenko N.P., Kravchuk A.V., Shevchuk V.I. Mixed convection in a vertical flat microchannel // Int J Heat Mass Transf. – 2017. – 106. – P.1164 – 73.
9. Avramenko A.A., Tyrinov A.I., Shevchuk I.V., Dmitrenko N.P., Kravchuk A.V., Shevchuk V.I. Mixed convection in a vertical circular microchannel // International Journal of Thermal Sciences. – 2017. – 121. – P. 1 – 12.
10. Авраменко А.А., Ковецкая Ю.Ю. Теплообмен и гидродинамика при смешанной конвекции в пористом микроканале // Промышленная теплотехника. – 2017. – Т. 39, №4. – С. 26– 31.



## EFFECT OF PRANDTL NUMBER ON HEAT TRANSFER IN A CIRCULAR POROUS MICROCHANNEL

**Kovetska Y.Y.**

Institute of Engineering Thermophysics of the National Academy of Sciences of Ukraine, vul. Zhelyabova, 2a, Kyiv, 03680 Ukraine

Calculations of heat transfer into mixed convection in a vertical circular microchannel occupied porous medium were presented. The solutions of the problem were obtained using a numerical approach. The results of these calculations made it possible to reveal the effect of the Prandtl number on temperature profiles and heat transfer coefficients for different values of Knudsen and Rayleigh numbers. Calculations showed that with increasing values of Prandtl number the temperature profile is equalized and the temperature jump on the wall decreases. For large values of the Prandtl number the temperature jump on the wall is practically degenerate. In connection with this the increasing Prandtl number weakens the slippage effect. As result there is heat transfer intensification and relative Nusselt number increases. For numbers  $Pr > 5$  this effect is leveled.

References 10, figures 3.

**Key words:** microchannel, mixed convection, heat transfer.

1. *Konovalov D.A., Drozdov I.G., Lazarenko I.N., Shmatov D.P.* Modelirovanie protsessov gidrodinamiki techeniya ohladitelya v nanostrukturah na osnove nitevidnykh kristallov kremniya [Simulation of coolant flow hydrodynamics processes in nanostructures based on silicon whiskers], *Vestnik Voronezhskogo universiteta* [Bulletin of Voronezh State University], 2013, V.9, №4, P.1 – 8. (Rus).

2. *Konovalov D.A., Lazarenko I.N., Kozhuhov N.N., Drozdov I.G.* Razrabotka metodov intensifikatsii teploobmena v mikrokanalnykh teploobmennikah gibridnykh sistem termostabilizatsii [Development of

methods for intensifying heat exchange in microchannel heat exchangers of hybrid thermal stabilization systems], *Vestnik Voronezhskogo universiteta* [Bulletin of Voronezh State University], 2016, V.12, №3, P.21 – 30. (Rus).

3. *Vlasov M.N., Korsun A.S., Maslov Yu.A., Merinov I.G., Rachkov V.I., Kharitonov V.S.* Opredelenie parametrov integralnoy modeli turbulentsi primenitelno k raschetu obtekanija sterzhnevnykh sborok v priblizhenii poristogo tela [Determination of the parameters of the integral turbulence model in relation to the calculation of flow around the rod assemblies in the porous body approximation], *Teplofizika i aeromekhanika* [Thermophysics and aeromechanics], 2016, V. 23, №2, P. 209 – 218. (Rus.)

4. *Gad-el-Hak M.* The fluid mechanics of microdevices, *J. Fluids Engineering*, 1999, V. 121, №1, P.5 – 33.

5. *Nield D.A. and Bejan A.* Convection in Porous Media, 4th Edition, New York: Springer, 2013, 640P.

6. *Vafai K.* Handbook of Porous Media, 3rd edition, CRC Press, 2015, 784 P.

7. *Garg P., Purohit G.N., Chaudhary R.C.* Similarity solution for combined free-forced convection past a vertical porous plate in a porous medium with a convective surface boundary condition, *Int. J. of Applied Mechanics and Engineering*, 2016, V 21, №4, P. 827 – 836.

8. *Avramenko A.A., Tyrinov A.I., Shevchuk I.V., Dmitrenko N.P., Kravchuk A.V., Shevchuk V.I.* Mixed convection in a vertical flat microchannel, *Int J Heat Mass Transf*, 2017, 106, P. 1164 – 73.

9. *Avramenko A.A., Tyrinov A.I., Shevchuk I.V., Dmitrenko N.P., Kravchuk A.V., Shevchuk V.I.* Mixed convection in a vertical circular microchannel, *International Journal of Thermal Sciences*, 2017, 121, P. 1 – 12.

10. *Avramenko A.A., Kovetska Y.Y.* Teploobmen i gidrodinamika pri smeshannoy konveksii v poristom mikrokanale [Heat transfer and hydrodynamics at mixed convection in a porous microchannel], *Promyshlennaya teplotehnika* [Industrial heat engineering], 2017, V.39, P.26 – 31 (Rus).

Отримано 06.02.2018

Received 06.02.2018