УДК 519.7

О.А. ГАЛКИНА

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОЭТАПНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Аннотация. Исследуются многоэтапные стохастические задачи оптимизации портфеля с применением меры рисков по Кусуоки и спектральной когерентной меры рисков. Для оценки эффективности моделей с использованием исходных данных разработан процесс бэк-тестирования. На разных временны́х этапах для моделей с мерой рисков по Кусуоки и спектральной когерентной мерой рисков найдено пропорциональное соотношение активов для заданного портфеля. Многоэтапные стохастические модели оптимизации портфеля измеряются тестированием относительно стоимости портфеля. Для различных временны́х этапов подсчитаны минимальные портфельные потери.

Ключевые слова: портфельная оптимизация, меры рисков, активы.

ВВЕДЕНИЕ

Многие дисциплины, такие как финансы, логистика и экономика, имеют многоэтапные проблемы принятия решений, обусловленные неопределенностью данных. Они известны как стохастические задачи, которые сложно вычислять, поскольку целевая функция и ограничения точно не известны. Многоэтапное стохастическое программирование формирует общую структуру для моделирования задач принятия решений, связанных с неопределенностью. Предложены различные методы приближения для решения многоэтапных задач стохастического программирования. Наиболее очевидным является метод приближения деревьев сценариев. Он включает дискретизацию результатов неопределенных параметров на каждом временно́м этапе. Этот подход приближает вычислительно неразрешимые многоэтапные проблемы стохастического программирования к разрешимым задачам линейного программирования.

Оптимизация портфеля является задачей распределения капитала среди различных активов в целях максимизации дохода от инвестиций и минимизации рисков. Поскольку доходность портфеля — неопределенная характеристика, максимизация ожидаемой доходности от инвестиций является важным фактором, а характеристика рисков достаточно сложной задачей.

МЕРЫ РИСКОВ В МНОГОЭТАПНЫХ ЗАДАЧАХ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Предположим, что инвестор предполагает распределить средства среди классов активов $N_1, \ldots, N_n$. Для класса $j: \mu_j$ — ожидаемый доход, σ_j — стандартное отклонение дохода, x_j — часть средств инвестора, выделенная для класса j. Для классов i и j: σ_{ij} означает ковариацию доходов. Доход от классов активов на конец инвестиционного периода является случайной величиной. Ожидаемый доход и дисперсия заданы в виде

$$E(x) = \sum_j \mu_j x_j = \mu^{\mathrm{T}} x,$$

$$Var(x) = \sum \sigma_j^2 x_j^2 + 2\sum_{i<j} \sigma_{ij} x_i x_j = x^{\mathrm{T}} \Sigma x,$$

$$Q_{ij} = \sigma_{ij},\ Q_{ii} = \sigma_i^2.$$

Основной принцип решения многоэтапных задач портфельной оптимизации заключается в следующем: предполагая уровень ожидаемого дохода, рациональный инвестор выберет портфель с минимальной дисперсией из набора всех возможных портфелей. Гарри Марковиц, американский экономист, предложил три эквивалентные формулировки оптимизационных моделей: максимизация ожидаемого дохода, минимизация дисперсии, добавление параметра, предопределяющего риски [1]. Предположим, что существует I активов, и обозначим $\xi := [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_I]$ их случайные доходы. Доходы моделируются в вероятностном пространстве $(R^I, B(R^I), P)$, где борелевская δ-алгебра $B(R^I)$ — набор совокупных доходов с определенной вероятностной мерой P. Допустим, что существует W_o средств для инвестирования. В одноэтапной оптимизации портфеля необходимо принять решение: какую сумму w_i инвестировать в каждый актив i, $i = 1, \ldots, I$, чтобы $\sum_{i=1}^{I} w_i = W_o$. Представим сумму инвестированных средств для каждого актива в виде $w := [w_1, \ldots, w_I]$. Общий доход портфеля r_p можно рассчитать как $r_p = w^{\mathrm{T}} \xi$. Две основные характеристики инвестора: расчетливость и избегание рисков. Каждый инвестор стремится максимизировать ожидаемую доходность портфеля при минимальных рисках. Уровни доходов определяются как $E(\xi) = [E(\xi_1), E(\xi_2), \ldots, E(\xi_I)]$, а ожидаемую доходность портфельных инвестиций $\overline{r_p}$ запишем в виде $\overline{r_p} = w^{\mathrm{T}} E(\xi)$. Риски определяются как изменчивость доходности портфеля вследствие изменения рынка и неопределенных событий.

Существует много методов для описания инвестиционных рисков. Рассмотрим общее вероятностное пространство (Ω, F, P) и линейное пространство измеримых функций $Z' := \{Z : Q \to R\}$. Полагаем мерой рисков функцию $\rho : Z \to R$. Число $\rho(Z)$, если оно положительное, интерпретируется как минимальные дополнительные наличные денежные средства, которые инвестор должен добавить в рисковой ситуации Z и инвестировать в безрисковые активы, чтобы иметь возможность осуществить свои планы, т.е. иметь риски со значением 0. Кроме того, если число $\rho(Z)$ отрицательное, то сумму денежных средств в размере $-\rho(Z)$ можно исключить. Функционал ρ является когерентной мерой рисков Z', если он удовлетворяет следующим аксиомам. Трансляционная инвариантность: если $\alpha \in R$ и $Z \in Z'$, то $\rho(Z + \alpha) = \rho(Z) - \alpha$; полуаддитивность: если $Z_1, Z_2 \in Z'$, то $\rho(Z_1 + Z_2) \leq \rho(Z_1) + \rho(Z_2)$; положительная однородность: если $\alpha \geq 0$ и $Z \in Z'$, то $\rho(\alpha Z) = \alpha \rho(Z)$; монотонность: если $Z_1, Z_2 \in Z'$ и $Z_1 \leq Z_2$, то $\rho(Z_1) \leq \rho(Z_2)$ [2].

Значение риска VaR определяется как величина потерь порога $\alpha \in R$, т.е. в конце периода инвестирования, только превышая вероятность $(1 - \beta) \in R$ [1, 2]. Пусть $f(w, \xi)$ — потери, связанные с вектором принятия решений $W \in R^I$ и случайным вектором $\xi \in R^I$. Основное распределение вероятностей $\xi \in R^I$ имеет плотность $p(\xi)$. Вероятность того, что $f(w, \xi)$ не превышает порога $\alpha \in R$, запишем следующим образом [2]:

$$\Psi(w, \alpha) = \int_{f(w, \xi) \leq \alpha} p(\xi)\, d\xi.$$

Значение для случайной величины потерь $\beta - VaR$, связанных с w и любым заданным вероятностным уровнем $\beta \in (0, 1)$, обозначается $\alpha_\beta(w)$ и записывается в виде

$$\alpha_\beta(w) = \min \{\alpha \in R : \Psi(w, \alpha) \geq \beta\}.$$

Условное значение риска $CVaR$, являющееся когерентной мерой рисков, учитывает условную ожидаемую величину потерь, при условии, что она превышает значение VaR [3, 4]. Математически это выражается в виде

$$\phi_\beta(w) = (1 - \beta)^{-1} \int_{f(w, \xi) \geq \alpha_\beta(w)} f(w, \xi)\, p(\xi) d\xi.$$

Классическую одноэтапную задачу оптимизации портфеля можно расширить до многоэтапной задачи. Цель задачи многоэтапной оптимизации портфеля — вычисление оптимального портфеля для заданного конечного горизонта инвестирования T, определенного множеством этапов $T := \{1, \ldots, T\}$. После первоначальных инвестиций в момент времени $t = 1$ портфель должен быть сбалансирован по временны́м периодам $t = 2, \ldots, T - 1$, в конце последнего периода $t = T$ выплачиваются дивиденды.

Рассмотрим фильтрованное вероятностное пространство $(R^k, F, (F)_{t \in T}, P)$. Общий доход представлен в виде $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_t) \in R^{k_t}$, где подвекторы $\xi_t \in R^{k_t}$ являются совокупным доходом в момент времени $t \in T$. История всех совокупных доходов до этапа t обозначается как $\xi^t := (\xi_1, \ldots, \xi_t) \in R^{k_t}$, где $k^t := \sum_{s=1}^{t} k_s$. Решение об инвестициях $w_t(\xi^t)$ принимается в момент времени t после того, как найдены значения ξ^t, но до получения будущих результатов $\{\xi_s\}_{s>t}$. Определим для процесса выявления ξ_t соответствующую фильтрацию $F_1 \subset \ldots \subset F_T$ δ-алгебры на R^k. Обозначим P_t вероятностное распределение ξ_t. Отметим, что одноэтапную модель можно рассматривать как частный случай многоэтапной модели, в которой $\xi^T = \xi$ и $k^T = k$. Каждый инвестор стремится максимизировать ожидаемую доходность портфеля при минимизации рисков. Доходность многоэтапного портфеля $\overline{r_p}$ можно рассчитать как средний капитал на этапе $t = T - 1$, умноженный на средний доход последнего этапа ξ_t:

$$\overline{r_p} = E(w_{T-1}^{\mathrm{T}}(\xi^{T-1})\xi_T).$$

Предположив, что общие доходы поэтапно независимы, ожидаемую доходность запишем как

$$\overline{r_p} = E(w_{T-1}^{\mathrm{T}}(\xi^{T-1}))E(\xi_T).$$

Спектральная когерентная мера рисков [5]

$$M_\varphi(X) = -\int_0^1 \varphi(p) q_X(p) dp,$$

где функция $\varphi : [0, 1] \to R$ называется спектром риска, имеет следующие свойства: $\varphi(\cdot) \geq 0$, $\varphi(\cdot)$ — убывающая функция, $\int_0^1 \varphi(p) dp = 1$.

Для дискретной случайной величины на множестве из n элементарных сценариев спектральная мера рисков $M_\varphi(\cdot)$ определена как выпуклая комбинация $CVaR_\beta$ для разных β [5]:

$$M_\varphi(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i CVaR_{\beta_i}(X),$$
$$0 \leq \lambda_i \leq 1, \; i = 1, \ldots, n, \; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \tag{1}$$

где параметры λ_i и β_i, $i = 1, \ldots, n$, можно определить точно.

Рассмотрим значение сценариев случайных величин X в нисходящем порядке, нумеруя сценарии и их вероятности в соответствии с порядком. Определим $i = 1, \ldots, n$.

Имеем $M_\varphi(\cdot)$ как выпуклую комбинацию VaR_β [5]:

$$M_\varphi(X)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i VaR_{\beta_i}(X),$$

$$\beta_i=1-\sum_{j=1}^{i}p_j^*,\ i=1,\dots,n,\ \mu_1=\int_0^{p_1^*}\varphi(p)dp,\ \mu_2=\int_{p_1^*}^{p_1^*+p_2^*}\varphi(p)dp,$$

$$\mu_i=\int_{p_1^*+\dots+p_{i-1}^*}^{p_1^*+\dots+p_i^*}\varphi(p)dp,\ i=3,\dots,n.$$

Сравнив данное определение $M_\varphi(\cdot)$ для β_i, $i=1,\dots,n$, с формулой (1), пронумеруем λ_i, $i=1,\dots,n$, используя μ_i, $i=1,\dots,n$. В результате получим следующие соотношения [5]:

$$\lambda_i=\frac{p_1^*+\dots+p_i^*}{p_i^*}\left(\mu_i-\frac{p_i^*}{p_{i+1}^*}\mu_{i+1}\right),\ i=1,\dots,n-1,\ \lambda_n=\frac{\mu_n}{p_n^*},$$

$$\lambda_1=\int_0^{p_1^*}\varphi(p)dp-\frac{p_1^*}{p_2^*}\int_{p_1^*}^{p_1^*+p_2^*}\varphi(p)dp,\ \lambda_n=\frac{1}{p_n^*}\int_{p_1^*+\dots+p_{n-1}^*}^{1}\varphi(p)dp,$$

$$\lambda_i=\frac{p_1^*+\dots+p_i^*}{p_i^*}\left(\int_{p_1^*+\dots+p_{i-1}^*}^{p_1^*+\dots+p_i^*}\varphi(p)dp-\frac{p_i^*}{p_{i+1}^*}\int_{p_1^*+\dots+p_i^*}^{p_1^*+\dots+p_{i+1}^*}\varphi(p)dp\right),\ i=2,\dots,n-1.$$

Предположим, что существует выпуклая комбинация $CVaR$ для случайных величин X [5]

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i CVaR_{\beta_i}(X),\ 0\le\lambda_i\le1,\ i=1,\dots,k,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1. \tag{2}$$

Теорема 1. Выпуклая комбинация $CVaR_{\beta_i}(X)$ в (2) является $CVaR_{\beta_*}(X)$, где β_* можно записать в виде

$$\frac{1}{1-\beta_*}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\beta_i}.$$

Доказательство [5]. Спектральную меру рисков $M_\varphi(\cdot)$, представленную для дискретных случайных величин с конечным множеством сценариев, запишем в виде $CVaR_{\beta_*}(X)$, где β_* определим как

$$\frac{1}{1-\beta_*}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\beta_i},\ i=1,\dots,n.$$

Когерентная мера рисков по Кусуоки, инвариантная по распределению, имеет вид [5]

$$\max_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\Lambda}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i CVaR_{\beta_i}(X),$$

где Λ — выпуклое замкнутое множество векторов весовых факторов, сумма которых равна единице.

Представление по Кусуоки аналогично $CVaR_{\beta_*}(X)$, где β_* можно записать в следующем виде [5]:

$$\frac{1}{1-\beta_*}=\max_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\Lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{1-\beta_i}.$$

Мера рисков по Кусуоки и спектральная когерентная мера рисков могут эффективно использоваться в задачах портфельной оптимизации.

МЕРА РИСКОВ ПО КУСУОКИ И СПЕКТРАЛЬНАЯ КОГЕРЕНТНАЯ МЕРА РИСКОВ В МНОГОЭТАПНЫХ ЗАДАЧАХ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В многоэтапных задачах принятия решений соответствующим образом выбирается целевая функция, чтобы показать все риски, связанные с последовательностью решений, которые нужно приняь [6]. После этого задачу можно представить в виде линейной или квадратичной проблемы. Полагаем: $x_{i,t}$ — емкость актива i за период времени t; $r_{i,t}$ — доход актива i за период времени t; $u_{i,t}$ — количество актива i, купленного/проданного за период времени t; x^{tar} — целевой портфель; $\bar{r}=E(r_t)$ — среднее значение дохода; p — параметр отклонения; k — транзакционные издержки. Рассмотрим следующую динамическую систему:

$$x_{i,t+1}=(1+r_{i,t+1})(x_{i,t}+u_{i,t}),\ i=1,\ldots,I,\ t=1,\ldots,T,$$
$$E[\,||x_t-x^{tar}||_1\,]\le I\rho,\ t=1,\ldots,T,$$
$$x_{i,t}\approx x_i^{tar},\ i=1,\ldots,I,\ t=1,\ldots,T,$$
$$E\left[\sum_{i=1}^{I}x_{i,t}\right]=\sum_{i=1}^{I}x_i^{tar},\ t=1,\ldots,T.$$

Эту систему можно записать как

$$x_{i,t+1}=(1+\bar{r}_{i,t+1})(x_{i,t}+u_{i,t})+(r_{i,t+1}-\bar{r}_{i,t+1})(x_i^{tar}+(x_{i,t}-x_i^{tar})+u_{i,t}),$$
$$\bar{r}_{i,t}=E(r_{i,t}),\, x_{i,t}\approx x_i^{tar},\ u_{i,t}\prec\prec x_{i,t},$$

и упрощенно в виде

$$x_{i,t+1}=(1+\bar{r}_{i,t+1})(x_{i,t}+u_{i,t})+\xi_{i,t+1},$$
$$\xi_{i,t+1}=(r_{i,t+1}-\bar{r}_{i,t+1})x_i^{tar}.$$

Потери определяются соотношением

$$Loss=\sum_{i=1}^{T-1}\left[\sum_{i=1}^{I}u_{i,t}+k\,||u_t||_1\right],$$

где $k\in(0,1)$ — транзакционные издержки. Целевую функцию представим в виде

$$\beta-CVaR=\alpha+\frac{1}{1-\beta}E\,([Loss-\alpha]^+).$$

Рассмотрим задачи минимизации портфеля (модели 1–4).

Запишем задачу минимизации (модель 1) следующим образом:

$$\min_{x,u,\alpha}\ \alpha+\frac{1}{1-\beta}E\,([Loss-\alpha]^+),$$
$$x_{i,t+1}=(1+\bar{r}_{i,t+1})(x_{i,t}+u_{i,t})+\xi_{i,t+1},\ \ i=1,\ldots,I,\ t=1,\ldots,T,$$
$$E[\,||x_t-x^{tar}||_1\,]\le Ip,\ t=1,\ldots,T,$$
$$E\left[\sum_{i=1}^{I}x_{i,t}\right]=\sum_{i=1}^{I}x_i^{tar},\ t=1,\ldots,T.$$

Множество случайной переменной ξ задано в виде нормального распределения [7]

$$\Xi := \mathop{\times}_{t=1}^{T} [\xi_t \in R^I : (\bar{r} - k\delta) \le \xi_t \le (\bar{r} + k\delta)],$$

$$\xi_{i,\,t+1} = (r_{i,\,t+1} - \bar{r}_{i,\,t+1})\, x_i^{tar}.$$

Многоэтапную динамическую задачу оптимизации портфеля представим в таком виде (модель 2):

$$\min_{x,\,u,\,w,\,\alpha,\,y} \alpha + \frac{1}{1-\beta} E(w),$$

$$w^{(s)} \ge \sum_{i=1}^{T-1} \left[\sum_{i=1}^{I} u_{i,t}^{(s)} + k\left(\sum_{i=1}^{I} z_{i,t}^{(s)} \right) \right] - \alpha,\ s = 1, \ldots, S,$$

$$w^{(s)} \ge 0,\ s = 1, \ldots, S,$$

$$x_{i,\,t+1}^{(s)} = (1 + \bar{r}_{i,\,t+1})(x_{i,\,t}^{(s)} + u_{i,\,t}^{(s)}) + \xi_{i,\,t+1}^{(s)},\ i = 1, \ldots, I,\ t = 1, \ldots, T,\ s = 1, \ldots, S,$$

$$E\left[\sum_{t=1}^{I} y_{i,\,t} \right] \le Ip,\ t = 1, \ldots, T,$$

$$y_{i,\,t}^{(s)} \ge x_{i,\,t}^{(s)} - x^{tar},\ i = 1, \ldots, I,\ t = 1, \ldots, T,\ s = 1, \ldots, S,$$

$$y_{i,\,t}^{(s)} \ge x_i^{tar} - x_{i,\,t}^{(s)},\ i = 1, \ldots, I,\ t = 1, \ldots, T,\ s = 1, \ldots, S,$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{I} x_{i,\,t} \right] = \sum_{i=1}^{I} x_i^{tar},\ i = 1, \ldots, I,\ t = 1, \ldots, T,$$

$$z_{i,\,t}^{(s)} \ge u_{i,\,t}^{(s)},\ i = 1, \ldots, I,\ t = 1, \ldots, T,\ s = 1, \ldots, S,$$

$$z_{i,\,t}^{(s)} \ge -u_{i,\,t}^{(s)},\ i = 1, \ldots, I,\ t = 1, \ldots, T,\ s = 1, \ldots, S.$$

Общее представление непредсказуемых ограничений модели 2 за период времени $t = 1, \ldots, T+1$ определим таким образом:

- для $t = 1$: $x_{i1}^{(s)} = x_i^{tar},\ i = 1, \ldots, I, s = 1, \ldots, S$;
- для $t = 2$: $x_{i2}^{(1)} = \ldots = x_{i2}^{(s/2)},\ x_{i2}^{(s/2+1)} = \ldots = x_{i2}^{(s)},\ i = 1, \ldots, I, s = 1, \ldots, S$;
- для $t = 3$: $x_{i3}^{(1)} = \ldots = x_{i3}^{(s/4)},\ x_{i3}^{(s/4+1)} = \ldots = x_{is}^{(s/2)},\ x_{i3}^{(s/2+1)} = \ldots = x_{is}^{(3s/4)}$, $x_{i3}^{(3s/4+1)} = \ldots = x_{is}^{(s)},\ i = 1, \ldots, I,\ s = 1, \ldots, S$;
- для $t = T$: $x_{iT}^{(1)} = x_{iT}^{(2)},\ x_{iT}^{(3)} = x_{iT}^{(4)}, \ldots, x_{iT}^{(s-1)} = x_{iT}^{(s)},\ i = 1, \ldots, I$;
- для $t = T+1$: не зависят от предыдущих значений [8].

Запишем задачу минимизации с применением меры рисков по Кусуоки для дискретных случайных величин с конечным числом сценариев n (модель 3):

$$\min_{x,\,u,\,w,\,\alpha,\,y} CVaR_{\beta_*}(w) = \alpha + \frac{1}{1-\beta^*} E(w),$$

$$\beta^* : \frac{1}{1-\beta^*} = \max_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\beta_i},$$

$$\Lambda = \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mid 0 \le \lambda_i \le 1,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Запишем задачу минимизации с применением спектральной когерентной меры рисков для дискретных случайных величин с конечным числом сценариев n (модель 4):

$$\min_{x, u, w, \alpha, y} CVaR_{\beta^*}(w) = \alpha + \frac{1}{1-\beta^*} E(w),$$

$$\beta^* : \frac{1}{1-\beta^*} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\beta_i}, \ \beta_i = 1 - \sum_{j=1}^{i} p_j^*, \ \lambda_1 = \int_0^{p_1^*} \varphi(p)dp - \frac{p_1^*}{p_2^*} \int_{p_1^*}^{p_1^*+p_2^*} \varphi(p)dp,$$

$$\lambda_i = \frac{p_1^* + \ldots + p_i^*}{p_i^*} \left(\int_{p_1^*+\ldots+p_{i-1}^*}^{p_1^*+\ldots+p_i^*} \varphi(p)dp - \frac{p_i^*}{p_{i+1}^*} \int_{p_1^*+\ldots+p_i^*}^{p_1^*+\ldots+p_{i+1}^*} \varphi(p)dp \right),$$

$$\lambda_n = \frac{1}{p_n^*} \int_{p_1^*+\ldots+p_{n-1}^*}^{1} \varphi(p)dp, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Если w равномерно распределены на $[0,1]$, то $\varphi(p) \equiv 1$, $\lambda_i = 0$, $i = \overline{1, n-1}$, $\lambda_n = 1 \Rightarrow \beta^* = \beta_n$.

ТЕСТИРОВАНИЕ МНОГОЭТАПНЫХ ЗАДАЧ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Бэк-тестирование выполняется для оценки эффективности модели с использованием исходных данных. В табл. 1 представлены этапы процесса бэк-тестирования.

Исходные данные могут использоваться в качестве оценки стоимости капитала портфеля. На их основе можно вычислить средний доход, стандартное отклонение (табл. 2) и ковариационную матрицу между пятью активами (для нормального распределения) следующего вида:

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.601 & 0.247 & 0.062 & 0.094 \\ 0.601 & 1.00 & 0.125 & 0.027 & 0.006 \\ 0.247 & 0.125 & 1.00 & 0.883 & 0.194 \\ 0.062 & 0.027 & 0.883 & 1.00 & 0.27 \\ 0.094 & 0.006 & 0.194 & 0.27 & 1.00 \end{bmatrix}.$$

Для генерации деревьев сценариев и решения оптимизационных задач необходимо определить следующие параметры: количество сценариев, уровень разветвления, количество деревьев, глубину дерева, начальные цены на активы, средний доход, стандартное отклонение, корреляционную матрицу активов, уровень доверия, транзакционные издержки, контрольный параметр ρ, задающий

Таблица 1

Этап	Бэк-тестирование
Инициализация	Определение необходимых параметров: ветвление, временны́е этапы, число сценариев
Анализ	Расчет экспоненциального роста и корреляционной матрицы на основе исходных данных
Прогнозирование	Генерация деревьев сценариев заданных параметров на предыдущем этапе
Оптимизация	Решение многоэтапной задачи для получения оптимального решения
Инвестирование	Инвестирование в активы, исходя из начального распределения
Накопление	Переход к следующему временно́му этапу, обновление баланса портфеля в соответствии с изменением цен
Итерация	При наличии исходных данных переход к этапу анализа

Т а б л и ц а 2

Значение	Исходные данные для активов при решении оптимизационных задач				
	Первый актив	Второй актив	Третий актив	Четвертый актив	Пятый актив
Средний доход	10.80	10.37	9.49	7.90	5.61
Стандартное отклонение	15.72	16.75	6.57	4.89	0.7

отклонения от целевого портфеля. Для реализации моделей использовалась среда программирования Matlab с библиотекой Yalmip, которая выполняет автоматическое устранение неопределенностей, позволяет пользователю работать с моделями высокого уровня и реализует большое количество методов. Одним из преимуществ применения Yalmip является возможность быстрой разработки алгоритма. Язык программирования Yalmip соответствует стандартному синтаксису Matlab. Генерация деревьев сценариев и оптимизация выполнялись на процессоре Intel Core 2 Duo 2,4 ГГц.

Время вычислений для моделей 3 и 4 примерно в десять раз меньше по сравнению с моделью 2. Количество сценариев играет ключевую роль во временно́й реализации моделей: большее число сценариев приводит к снижению скорости вычислений. Формулируя предположения об использовании меньшего количества сценариев, необходимо сначала рассмотреть арбитражные возможности. Согласно П. Классену, если число сценариев за один период увеличивается, вероятность арбитражных возможностей уменьшается. Чтобы получить реальные результаты, он предложил использовать (количество активов + 1) сценариев.

Для нахождения пропорциональной доли активов данного портфеля на каждом временно́м этапе по сценариям находятся x_aver:

- для первого актива

$$\frac{x\_aver_{1ts}}{x\_aver_{1ts}+x\_aver_{2ts}+x\_aver_{3ts}+x\_aver_{4ts}+x\_aver_{5ts}};$$

- для второго актива

$$\frac{x\_aver_{2ts}}{x\_aver_{1ts}+x\_aver_{2ts}+x\_aver_{3ts}+x\_aver_{4ts}+x\_aver_{5ts}};$$

- для третьего актива

$$\frac{x\_aver_{3ts}}{x\_aver_{1ts}+x\_aver_{2ts}+x\_aver_{3ts}+x\_aver_{4ts}+x\_aver_{5ts}};$$

- для четвертого актива

$$\frac{x\_aver_{4ts}}{x\_aver_{1ts}+x\_aver_{2ts}+x\_aver_{3ts}+x\_aver_{4ts}+x\_aver_{5ts}};$$

- для пятого актива

$$\frac{x\_aver_{5ts}}{x\_aver_{1ts}+x\_aver_{2ts}+x\_aver_{3ts}+x\_aver_{4ts}+x\_aver_{5ts}}.$$

На рис. 1 и 2 показано пропорциональное соотношение активов данного портфеля на разных временны́х этапах соответственно для моделей 3 и 4.

На рис. 3 графически представлена стоимость портфеля, рассчитанная как сумма всех активов по каждому сценарию на каждом временно́м этапе.

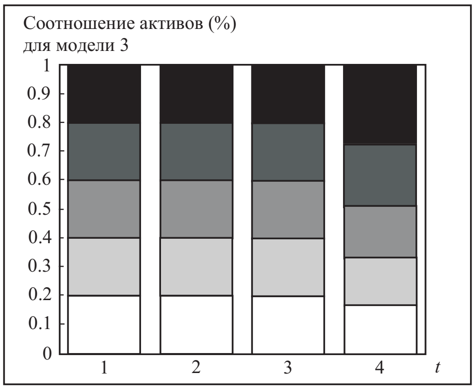

Рис. 1

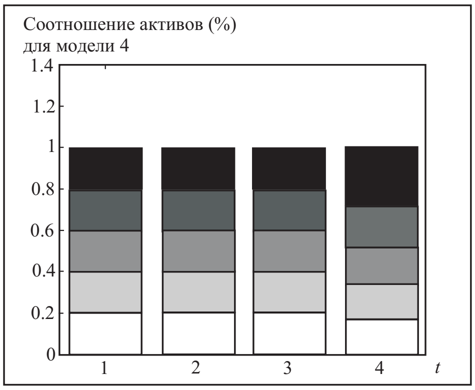

Рис. 2

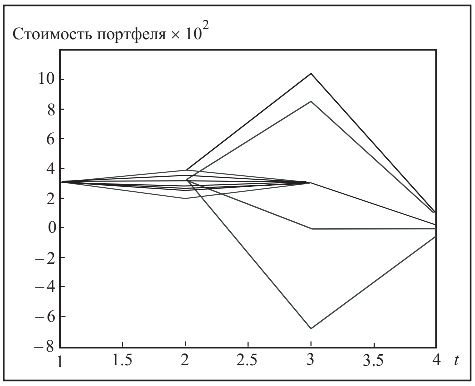

Рис. 3

Определив портфельные расходы в виде

$$loss_s = \sum_{t=1}^{T-1} \left[\sum_{i=1}^{I} u_{it} + k \left(\sum_{i=1}^{I} z_{it} \right) \right]_s ,$$

вычислим доходность портфеля следующим образом:

$$gain_s = -loss_s, \ \ s = 1, 2, \ldots, S .$$

Рассчитав для различных временны́х этапов минимальные потери для пяти активов, можно сделать вывод, что с увеличением количества временны́х периодов уровень дохода для моделей 3 и 4 повышается. Оценка оптимальных значений задач при разных параметрах показывает лучшее поведение модели с применением меры рисков по Кусуоки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована динамическая система оптимизации портфеля с применением различных мер рисков, в частности меры рисков по Кусуоки и спектральной когерентной меры рисков. Для решения данного типа задач используется метод генерации деревьев сценариев. Для оценки эффективности моделей с применением исходных данных разработан процесс бэк-тестирования. Многоэтапная модель оптимизации портфеля измеряется тестированием относительно стоимости портфеля, а также процессорного времени, затраченного на генерацию деревьев сценариев. Показано пропорциональное соотношение пяти активов данного портфеля на разных временны́х этапах для моделей с мерой рисков по Кусуоки и спектральной когерентной мерой рисков. Приведена стоимость портфеля для соответствующих моделей, которая рассчитывается как сумма всех активов по каждому сценарию на каждом временно́м этапе. Для различных временны́х этапов вычислены минимальные потери портфеля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Markowitz H.M. Portfolio selection // J. Finance. — 1952. — **7**, N 1. — P. 77–91.
2. Rockafellar R.T., Uryasev S. Optimization of conditional value at risk // Journal of Risk. — 2000. — **2**, N 3. — P. 21–41.
3. Uryasev S. Conditional Value-at-Risk: optimization algorithms and applications // Financial Engineering News. — 2000. — N 14. — P. 1–6.

4. Arzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D. Coherent measures of risk // Mathematical Finance. — 1999. — **9**, N 3. — P. 203–228.
5. Kirilyuk V.S. Polyhedral coherent risk measures and optimal portfolios on the reward-risk ratio // Cybernetics and System Analysis. — 2014. — **50**, N 5. — P. 724–740.
6. Infanger G. Dynamic assets allocation strategies using a stochastic dynamic programming approach // Handbook of asset and liability management: Theory and methodology. — 2006. — **1.** — P. 200–248.
7. Kaut M., Wallace S.W. Evaluation of scenario-generation methods for stochastic programming // Pacific Journal of Optimization. — 2007. — **3**, N 2. — P. 257–271.
8. Zanjani M.K., Nourelfath M., Ait-Kadi D. A multi-stage stochastic programming approach for production planning with uncertainty in the quality of raw materials and demand // International Journal of Production Research. — 2010. — **48**, N 16. — P. 4701–4723.

Надійшла до редакції 15.06.2016

О.А. Галкіна

ДОСЛІДЖЕННЯ БАГАТОЕТАПНИХ СТОХАСТИЧНИХ ЗАДАЧ ПОРТФЕЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Анотація. Досліджуються багатоетапні стохастичні задачі оптимізації портфеля із застосуванням міри ризиків за Кусуокі і спектральної когерентної міри ризику. Для оцінки ефективності моделей з використанням вихідних даних розроблено процес бек-тестування. На різних часових етапах для моделей з мірою ризику за Кусуокі і спектральною когерентною мірою ризиків знайдено пропорційне співвідношення активів для заданого портфеля. Багатоетапні стохастичні моделі оптимізації портфеля вимірюються тестуванням відносно вартості портфеля. Для різних часових етапів обчислено мінімальні портфельні втрати.

Ключові слова: портфельна оптимізація, міри ризиків, активи.

O.A. Galkina

RESEARCH OF THE MULTISTAGE STOCHASTIC PORTFOLIO OPTIMIZATION PROBLEMS

Abstract. The author investigates multistage stochastic portfolio optimization problems with application of Kusuoki's and spectral coherent risk measures. The back-testing process is developed to evaluate the performance of the models using historical data. Proportionate share of the portfolio assets is found at different time stages for models with Kusuoki's and spectral coherent risk measures. The multistage stochastic portfolio optimization models are measured by testing in terms of the portfolio value. Minimum portfolio losses are calculated for different time stages.

Keywords: portfolio optimization, risk measures, assets.

Галкина Ольга Анатольевна,
соискатель, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,
e-mail: og20132013@gmail.com.