УДК 519.6

Н.В. МАЙКО, В.Л. РЯБИЧЕВ

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ОТ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Аннотация. Получена априорная оценка скорости сходимости сеточного решения к обобщенному решению двумерного уравнения Пуассона в случае смешанного краевого условия (краевые условия первого и третьего рода). Показано, что точность схемы выше вблизи тех сторон квадрата, на которых задано краевое условие Дирихле.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, краевая задача, разностная схема, оценка с весом, учет влияния краевого условия.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

В публикациях, посвященных конечно-разностной дискретизации краевых и начально-краевых задач, точность приближенного решения нередко оценивается в норме с весом. Такие оценки иногда можно трактовать как количественное выражение известного наблюдения (см., например, [1, 2]), что точность схемы выше вблизи той части границы области, где задано краевое условие Дирихле, поскольку сеточное решение удовлетворяет ему точно.

Влияние краевого условия на скорость сходимости разностной схемы для эллиптического уравнения, представленного в дивергентной форме, исследовано в [3]. Идеи [3] получили развитие в [4] при изучении точности традиционных разностных схем для одномерного и двумерного параболических уравнений с краевым условием Дирихле. Из доказанных априорных оценок следует, что точность схемы повышается вблизи сторон и дна пространственно-временного прямоугольника в одномерном случае и вблизи боковых граней и дна пространственно-временного параллелепипеда — в двумерном случае.

Скорость сходимости разностной схемы для одномерного уравнения теплопроводности при смешанном краевом условии исследована в [5]. Установленные априорные оценки в норме с весом учитывают влияние начального условия и заданного на одном из концов отрезка краевого условия Дирихле.

Точность конечно-разностной аппроксимации первой краевой задачи для двумерного квазилинейного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами с учетом эффекта влияния условия Дирихле изучена в [6].

В данной статье рассмотрена смешанная краевая задача (с условиями Дирихле и Ньютона) для уравнения Пуассона в квадрате и получена оценка скорости сходимости приближенного сеточного решения к точному обобщенному решению в норме с весом, учитывающая влияние условия Дирихле.

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} -\Delta u = f(x),\ \ x \in D, \\ -\frac{\partial u}{\partial x_1} + \sigma u(x) = 0,\ \ x \in \Gamma_{-1}, \\ u = 0,\ \ x \in \Gamma \setminus \Gamma_{-1}, \end{gathered} \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $D = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_\alpha < 1,\ \alpha = 1,2\}$, $\Gamma = \partial D$ —

граница квадрата D, $\Gamma_{-1}=\{x=(0,x_2):\ 0<x_2<1\}$ — левая сторона квадрата D, $\sigma=\text{const}\geq 0$.

При построении и исследовании дискретного аналога задачи (1) используются традиционные обозначения теории разностных схем [7].

Введем сеточные множества:

$$\omega_\alpha=\{x_\alpha^{(i_\alpha)}=i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha=\overline{1,N_\alpha-1},\ h_\alpha=1/N_\alpha\},\ N_\alpha\geq 2 \text{ — целое число,}$$

$$\omega_\alpha^-=\omega_\alpha\cup\{0\},\ \omega_\alpha^+=\omega_\alpha\cup\{1\},\ \overline{\omega}_\alpha=\omega_\alpha\cup\{0\}\cup\{1\},$$

$$\omega=\omega_1\times\omega_2,\ \overline{\omega}=\overline{\omega}_1\times\overline{\omega}_2,\ \gamma=\overline{\omega}\setminus\omega;$$

$$\gamma_{-\alpha}=\{x_\alpha=0,\ x_{3-\alpha}\in\omega_{3-\alpha}\},\ \gamma_{+\alpha}=\{x_\alpha=1,\ x_{3-\alpha}\in\omega_{3-\alpha}\},\ \alpha=1,2.$$

С помощью операторов

$$(T_2 v)(x_1,x_2)=\frac{1}{h_2^2}\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi_2|)v(x_1,\xi_2)d\xi_2,\quad x\in\omega\cup\gamma_{-1},$$

$$(T_1 v)(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{h_1^2}\displaystyle\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1+h_1}(h_1-|x_1-\xi_1|)\,v(\xi_1,x_2)d\xi_1,\ x\in\omega,\\ \dfrac{2}{h_1^2}\displaystyle\int\limits_0^{h_1}(h_1-\xi_1)\,v(\xi_1,x_2)\,d\xi_1,\ x\in\gamma_{-1},\end{cases}$$

для которых выполняются соотношения [8]

$$T_\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}=u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha},\ x\in\omega,$$

$$T_1 1=1,\ T_1x_1=\frac{h_1}{3},\ T_1x_2=x_2,\ T_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}=\frac{2}{h_1}\left(u_{x_1}-\frac{\partial u}{\partial x_1}\right),\ x\in\gamma_{-1},$$

аппроксимируем задачу (1) разностной схемой

$$\begin{gathered}-\Lambda y=\varphi(x),\ x\in\omega\cup\gamma_{-1},\\ y=0,\ x\in\gamma\setminus\gamma_{-1},\end{gathered}\tag{2}$$

где $\varphi(x)=(T_1T_2f)(x)$, $\Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2$,

$$\Lambda_1 y=\begin{cases}y_{\bar{x}_1x_1},\ x\in\omega,\\ \dfrac{2}{h_1}(y_{x_1}-\sigma y),\ x\in\gamma_{-1},\end{cases}\quad \Lambda_2 y=\begin{cases}y_{\bar{x}_2x_2},\ x\in\omega,\\ \left(1+\dfrac{h_1\sigma}{3}\right)y_{\bar{x}_2x_2},\ x\in\gamma_{-1}.\end{cases}$$

СВОЙСТВА РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА И ОЦЕНКА РАЗНОСТНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА

Для погрешности $z=y-u$ получим задачу

$$\begin{gathered}-\Lambda z=\psi(x),\ x\in\omega\cup\gamma_{-1},\\ z=0,\ x\in\gamma\setminus\gamma_{-1},\end{gathered}\tag{3}$$

где $\psi=T_1T_2f+\Lambda u=-\Lambda_1\eta_1-\eta_{2\bar{x}_2x_2}$ — погрешность аппроксимации:

$$\eta_1(x)=(T_2u)(x)-u(x),\ x\in\omega\cup\gamma_{-1},\ \eta_2(x)=\begin{cases}(T_1u)(x)-u(x),\ x\in\omega,\\ (T_1u)(x)-u(x)-\dfrac{h_1}{3}\sigma u(x),\ x\in\gamma_{-1}.\end{cases}$$

На множестве H_h сеточных функций, заданных на $\overline{\omega}$ и обращающихся в нуль на $\gamma \setminus \gamma_{-1}$, определим скалярное произведение и норму:

$$(y, v) = \sum_{x\in\omega} h_1 h_2\, y(x) v(x) + \frac{h_1}{2} \sum_{x\in\gamma_{-1}} h_2\, y(x) v(x),$$

$$\| v \| = \sqrt{(v, v)} = \left(\sum_{x\in\omega} h_1 h_2 v^2(x) + \frac{h_1}{2} \sum_{x\in\gamma_{-1}} h_2 v^2(x) \right)^{1/2} .$$

Введем операторы $A_\alpha = -\Lambda_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, $A = A_1 + A_2 = -\Lambda$, действующие в H_h. Тогда схема (2) запишется в виде операторного уравнения $Ay = \varphi$, $y, \varphi \in H_h$, а задача (3) — в виде операторного уравнения $Az = \psi$, $z, \psi \in H_h$.

В пространстве H_h разностные операторы A_1 и A_2 симметричны и положительно определены:

$$(A_1 y, v) =$$

$$= \sum_{x\in\omega} h_1 h_2 (-y_{\bar{x}_1 x_1}) v + \frac{h_1}{2} \sum_{x\in\gamma_{-1}} h_2 \frac{-2}{h_1} (y_{x_1} - \sigma y) v = \sum_{x\in\omega_1^+\times\omega_2} h_1 h_2\, y_{\bar{x}_1} v_{\bar{x}_1} + \sigma \sum_{x\in\gamma_{-1}} h_2\, y v,$$

$$(A_1 y, y) = \sum_{x\in\omega_1^+\times\omega_2} h_1 h_2\, y_{\bar{x}_1}^2 + \sigma \sum_{x\in\gamma_{-1}} h_2\, y^2 \ge \sum_{x\in\omega_1^+\times\omega_2} h_1 h_2\, y_{\bar{x}_1}^2 = \sum_{x_2\in\omega_2} h_2 \sum_{x_1\in\omega_1^+} h_1\, y_{\bar{x}_1}^2 \ge$$

$$\ge \sum_{x_2\in\omega_2} h_2 \frac{2}{l_1^2} \left(\sum_{x_1\in\omega_1} h_1 y^2(x) + \frac{h_1}{2} y^2(0, x_2) \right) = 2\| y\|^2 \quad (0 \le x_1 \le l_1 = 1),$$

$$(A_2 y, v) = \sum_{x\in\omega} h_1 h_2 (-y_{\bar{x}_2 x_2}) v + \frac{h_1}{2} \sum_{x\in\gamma_{-1}} h_2 \left(1 + \frac{h_1\sigma}{3}\right) (-y_{\bar{x}_2 x_2}) v =$$

$$= \sum_{x\in\omega_1\times\omega_2^+} h_1 h_2\, y_{\bar{x}_2} v_{\bar{x}_2} + \left(1 + \frac{h_1\sigma}{3}\right) \frac{h_1}{2} \sum_{\substack{x_2\in\omega_2^+ \\ (x_1 = 0)}} h_2\, y_{\bar{x}_2} v_{\bar{x}_2},$$

$$(A_2 y, y) =$$

$$= \sum_{x\in\omega_1\times\omega_2^+} h_1 h_2\, y_{\bar{x}_2}^2 + \left(1 + \frac{h_1\sigma}{3}\right) \frac{h_1}{2} \sum_{\substack{x_2\in\omega_2^+ \\ (x_1 = 0)}} h_2\, y_{\bar{x}_2}^2 \ge \sum_{x_1\in\omega_1} h_1 \sum_{x_2\in\omega_2^+} h_2\, y_{\bar{x}_2}^2 + \frac{h_1}{2} \sum_{\substack{x_2\in\omega_2^+ \\ (x_1 = 0)}} h_2\, y_{\bar{x}_2}^2 \ge$$

$$\ge \sum_{x_1\in\omega_1} h_1 \frac{8}{l_2^2} \sum_{x_2\in\omega_2} h_2 y^2(x) + \frac{h_1}{2} \frac{8}{l_2^2} \sum_{x_2\in\omega_2} h_2 y^2(0, x_2) = 8\| y\|^2 \quad (0 \le x_2 \le l_2 = 1).$$

Отсюда следует, что разностный оператор A симметричен и положительно определен в H_h, а значит, существует обратный оператор A^{-1}.

Используя формулы суммирования по частям и ε-неравенство при $\varepsilon = 1/(4\sigma)$, найдем

$$\| Ay\|^2 = (Ay, Ay) = (A_1 y + A_2 y, A_1 y + A_2 y) = \| A_1 y\|^2 + \| A_2 y\|^2 + 2(A_1 y, A_2 y) \ge$$

$$\ge 2(A_1 y, A_2 y) = 2 \sum_{x\in\omega} h_1 h_2\, y_{\bar{x}_1 x_1} y_{\bar{x}_2 x_2} + 2\frac{h_1}{2} \sum_{x\in\gamma_{-1}} h_2 \frac{2}{h_1} (y_{x_1} - \sigma y) \left(1 + \frac{h_1\sigma}{3}\right) y_{\bar{x}_2 x_2} =$$

$$= 2 \sum_{x\in\omega_1^-\times\omega_2^-} h_1 h_2\, y_{x_1 x_2}^2 - 2\frac{h_1\sigma}{3} \sum_{\substack{x_2\in\omega_2^- \\ (x_1 = 0)}} h_2\, y_{x_1 x_2} y_{x_2} + 2\sigma \left(1 + \frac{h_1\sigma}{3}\right) \sum_{\substack{x_2\in\omega_2^- \\ (x_1 = 0)}} h_2\, y_{x_2}^2 \ge \qquad (4)$$

$$\geq 2\sum_{x\in\omega_1^-\times\omega_2^-} h_1 h_2 y_{x_1x_2}^2 - 2\frac{h_1\sigma}{3}\left(\frac{1}{4\sigma}\sum_{\substack{x_2\in\omega_2^-\\(x_1=0)}} h_2 y_{x_1x_2}^2 + \sigma\sum_{\substack{x_2\in\omega_2^-\\(x_1=0)}} h_2 y_{x_2}^2\right)+$$

$$+2\sigma\left(1+\frac{h_1\sigma}{3}\right)\sum_{\substack{x_2\in\omega_2^-\\(x_1=0)}} h_2 y_{x_2}^2 = 2\sum_{x\in\omega_1^-\times\omega_2^-} h_1 h_2 y_{x_1x_2}^2 -$$

$$-2\frac{h_1\sigma}{3}\frac{1}{4\sigma}\sum_{\substack{x_2\in\omega_2^-\\(x_1=0)}} h_2 y_{x_1x_2}^2 + 2\sigma\sum_{\substack{x_2\in\omega_2^-\\(x_1=0)}} h_2 y_{x_2}^2 \geq$$

$$\geq 2\sum_{x\in\omega_1^-\times\omega_2^-} h_1 h_2 y_{x_1x_2}^2 - \frac{h_1}{6}\sum_{\substack{x_2\in\omega_2^-\\(x_1=0)}} h_2 y_{x_1x_2}^2 \geq \left(2-\frac{1}{6}\right)\sum_{x\in\omega_1^-\times\omega_2^-} h_1 h_2 y_{x_1x_2}^2 = \frac{11}{6}\|B_1^* y\|_*^2,$$

где $B_1^* y = -y_{x_1x_2}$, $x\in\omega_1^-\times\omega_2^-$, — разностный оператор, действующий из H_h в пространство H_h^* сеточных функций, определенных на множестве узлов $\omega_1^-\times\omega_2^-$; $(y,v)_* = \sum\limits_{x\in\omega_1^-\times\omega_2^-} h_1 h_2 y(x) v(x)$, $\|y\|_* = \sqrt{(y,y)_*} = \sum\limits_{x\in\omega_1^-\times\omega_2^-} h_1 h_2 y^2(x)$ — соответственно скалярное произведение и норма в H_h^*. Имеем

$$(B_1^* y, w)_* = \sum_{x\in\omega_1^-\times\omega_2^-} h_1 h_2 (-y_{x_1x_2}) w = -\sum_{x\in\omega} h_1 h_2 y w_{\bar{x}_1\bar{x}_2} - \frac{h_1}{2}\sum_{x\in\gamma_{-1}} h_2 y \frac{2}{h_1} w_{\bar{x}_2} = (y, B_1 w),$$

где $B_1 : H_h^* \to H_h$, — оператор, сопряженный к оператору $B_1^* : H_h \to H_h^*$,

$$B_1 w = -\left[\begin{array}{l} w_{\bar{x}_1\bar{x}_2},\ x\in\omega, \\ \dfrac{2}{h_1} w_{\bar{x}_2},\ x\in\gamma_{-1}. \end{array}\right. \qquad (5)$$

Аналогично получаем

$$\|Ay\|^2 = \|A_1 y\|^2 + \|A_2 y\|^2 + 2(A_1 y, A_2 y) \geq 2(A_1 y, A_2 y) =$$

$$= 2\sum_{x\in\omega} h_1 h_2 y_{\bar{x}_1x_1} y_{\bar{x}_2x_2} + 2\frac{h_1}{2}\sum_{x\in\gamma_{-1}} h_2 \frac{2}{h_1}(y_{x_1} - \sigma y)\left(1+\frac{h_1\sigma}{3}\right) y_{\bar{x}_2x_2} =$$

$$= 2\sum_{x\in\omega_1^-\times\omega_2^+} h_1 h_2 y_{x_1\bar{x}_2}^2 - 2\frac{h_1\sigma}{3}\sum_{\substack{x_2\in\omega_2^+\\(x_1=0)}} h_2 y_{x_1\bar{x}_2} y_{\bar{x}_2} + 2\sigma\left(1+\frac{h_1\sigma}{3}\right)\sum_{\substack{x_2\in\omega_2^+\\(x_1=0)}} h_2 y_{\bar{x}_2}^2 \geq$$

$$\geq 2\sum_{x\in\omega_1^-\times\omega_2^+} h_1 h_2 y_{x_1\bar{x}_2}^2 - 2\frac{h_1\sigma}{3}\left(\frac{1}{4\sigma}\sum_{\substack{x_2\in\omega_2^+\\(x_1=0)}} h_2 y_{x_1\bar{x}_2}^2 + \sigma\sum_{\substack{x_2\in\omega_2^+\\(x_1=0)}} h_2 y_{\bar{x}_2}^2\right)+$$

$$+2\sigma\left(1+\frac{h_1\sigma}{3}\right)\sum_{\substack{x_2\in\omega_2^+\\(x_1=0)}} h_2 y_{\bar{x}_2}^2 = 2\sum_{x\in\omega_1^-\times\omega_2^+} h_1 h_2 y_{x_1\bar{x}_2}^2 - 2\frac{h_1\sigma}{3}\frac{1}{4\sigma}\sum_{\substack{x_2\in\omega_2^+\\(x_1=0)}} h_2 y_{x_1\bar{x}_2}^2 +$$

$$+2\sigma \sum_{\substack{x_2\in\omega_2^+\\(x_1=0)}} h_2 y_{\bar{x}_2}^2 \ge 2 \sum_{x\in\omega_1^-\times\omega_2^+} h_1 h_2 y_{x_1\bar{x}_2}^2 - \frac{h_1}{6} \sum_{\substack{x_2\in\omega_2^+\\(x_1=0)}} h_2 y_{x_1\bar{x}_2}^2 \ge$$

$$\ge \left(2-\frac{1}{6}\right) \sum_{x\in\omega_1^-\times\omega_2^+} h_1 h_2 y_{x_1\bar{x}_2}^2 = \frac{11}{6} \| B_2^* y\|_*^2 , \tag{6}$$

где $B_2^* y = -y_{x_1\bar{x}_2}$, $x\in\omega_1^-\times\omega_2^+$, — разностный оператор, действующий из H_h в пространство H_h^* сеточных функций, определенных на множестве узлов $\omega_1^-\times\omega_2^+$; $(y, v)_* = \sum\limits_{x\in\omega_1^-\times\omega_2^+} h_1 h_2 y(x) v(x)$, $\| y\|_* = \sqrt{(y, y)_*} = \sum\limits_{x\in\omega_1^-\times\omega_2^+} h_1 h_2 y^2(x)$ — скалярное произведение и норма в H_h^*. Имеем

$$(B_2^* y, w)_* = -\sum_{x\in\omega_1^-\times\omega_2^+} h_1 h_2 y_{x_1\bar{x}_2} w = -\sum_{x\in\omega} h_1 h_2 y w_{\bar{x}_1 x_2} - \frac{h_1}{2} \sum_{x\in\gamma_{-1}} h_2 y \frac{2}{h_1} w_{x_2} = (y, B_2 w),$$

где B_2: $H_h^* \to H_h$, — оператор, сопряженный к оператору $B_2^*: H_h \to H_h^*$,

$$B_2 w = -\left[\begin{array}{l} w_{\bar{x}_1 x_2},\ x\in\omega, \\ \dfrac{2}{h_1} w_{x_2},\ x\in\gamma_{-1}. \end{array}\right. \tag{7}$$

Далее будем использовать следующий результат (основная лемма в [8]).

Лемма 1. Пусть: 1) A — линейный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H ; 2) B — линейный оператор, действующий из H^* в H ($H^* \supseteq H$); 3) существует A^{-1} ; 4) $\| B^* v\|_* \le \gamma \| Av\|$ $\forall v\in H$, где $B^*: H\to H^*$, — оператор, сопряженный к оператору B: $H^* \to H$, $(y, v)_*$ и $\| v\|_* = \sqrt{(v, v)_*}$ — скалярное произведение и норма в H^*. Тогда

$$\| A^{-1} Bv\| \le \gamma \| v\|_* \quad \forall v\in H^*.$$

Применяя лемму 1 к операторам A , B_1 , B_2 , получаем оценку

$$\| A^{-1} B_k v\| \le \sqrt{\frac{6}{11}} \| v\|_* \quad \forall v\in H^* \quad (k=1,2). \tag{8}$$

С помощью функции Грина $G(x,\xi) = G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$ разностной краевой задачи

$$-G_{\bar{\xi}_1\xi_1}(x,\xi) - G_{\bar{\xi}_2\xi_2}(x,\xi) = \frac{\delta(x_1,\xi_1)\,\delta(x_2,\xi_2)}{h_1 h_2},\ \xi\in\omega,$$

$$-\frac{2}{h_1}(G_{\xi_1}(x,\xi) - \sigma G(x,\xi)) - \left(1+\frac{h_1\sigma}{3}\right) G_{\bar{\xi}_2\xi_2}(x,\xi) =$$

$$= \frac{2}{h_1} \frac{\delta(x_1,\xi_1)\,\delta(x_2,\xi_2)}{h_2},\ \xi\in\gamma_{-1}, \tag{9}$$

$$G(x,\xi) = 0,\ \xi\in\gamma\setminus\gamma_{-1},$$

где $\delta(m,n)$ — символ Кронекера, решение задачи (3) можно представить в виде

$$z(x) = (G(x,\cdot), \psi(\cdot)),\ x\in\omega\cup\gamma_{-1}.$$

Для оценки функции Грина воспользуемся следующим результатом.

Лемма 2. Имеет место неравенство

$$\| G(x,\cdot)\| \le \sqrt{\frac{6}{11}}\,\rho(x)\,,$$

где $\rho(x)=\min\{\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)},\ \sqrt{(1-x_1)x_2}\}$.

Доказательство. Задачу (9) можно записать также в виде

$$-G_{\bar{\xi}_1\xi_1}(x,\xi)-G_{\bar{\xi}_2\xi_2}(x,\xi)=(H(\xi_1-x_1)H(\xi_2-x_2))_{\bar{\xi}_1\bar{\xi}_2},\ \ \xi\in\omega\,,$$

$$-\frac{2}{h_1}(G_{\xi_1}(x,\xi)-\sigma G(x,\xi))-\left(1+\frac{h_1\sigma}{3}\right)G_{\bar{\xi}_2\xi_2}(x,\xi)=$$

$$=\frac{2}{h_1}(H(\xi_1-x_1)H(\xi_2-x_2))_{\bar{\xi}_2},\ \ \xi\in\gamma_{-1}\,,$$

$$G(x,\xi)=0,\ \ \xi\in\gamma\setminus\gamma_{-1}\,,$$

где $H(s)$ — функция Хевисайда, $H(s)=\begin{cases}1, & s\ge 0,\\ 0, & s<0,\end{cases}$ или в операторном виде

$$A_\xi G(x,\xi)=-B_{1_\xi}(H(\xi_1-x_1)H(\xi_2-x_2))\,.$$

Отсюда

$$\| G(x,\cdot)\| = \| -A_\xi^{-1}B_{1\xi}(H(\cdot-x_1)H(\,\cdot-x_2))\| \le \sqrt{\frac{6}{11}}\,\| H(\cdot-x_1)H(\cdot-x_2)\|_* =$$

$$=\sqrt{\frac{6}{11}}\left(\sum_{\xi\in\omega_1^-\times\omega_2^-}h_1h_2H^2(\xi_1-x_1)H^2(\xi_2-x_2)\right)^{1/2}=$$

$$=\sqrt{\frac{6}{11}}\left(\sum_{\xi_1=0}^{1-h_1}h_1H^2(\xi_1-x_1)\right)^{1/2}\left(\sum_{\xi_2=0}^{1-h_2}h_2H^2(\xi_2-x_2)\right)^{1/2}= \tag{10}$$

$$=\sqrt{\frac{6}{11}}\left(\sum_{\xi_1=x_1}^{1-h_1}h_1\right)^{1/2}\left(\sum_{\xi_2=x_2}^{1-h_2}h_2\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{6}{11}}\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}.$$

Запишем теперь задачу (9) иначе:

$$-G_{\bar{\xi}_1\xi_1}(x,\xi)-G_{\bar{\xi}_2\xi_2}(x,\xi)=-(H(\xi_1-x_1)H(x_2-\xi_2))_{\bar{\xi}_1\xi_2},\ \ \xi\in\omega,$$

$$-\frac{2}{h_1}(G_{\xi_1}(x,\xi)-\sigma G(x,\xi))-\left(1+\frac{h_1\sigma}{3}\right)G_{\bar{\xi}_2\xi_2}(x,\xi)=$$

$$=-\frac{2}{h_1}(H(\xi_1-x_1)H(x_2-\xi_2))_{\xi_2},\ \ \xi\in\gamma_{-1}\,,$$

$$G(x,\xi)=0,\ \ \xi\in\gamma\setminus\gamma_{-1}\,,$$

или в операторном виде

$$A_\xi G(x,\xi)=B_{2\xi}(H(\xi_1-x_1)H(x_2-\xi_2))\,.$$

Отсюда

$$\| G(x,\cdot)\| = \| A_\xi^{-1}B_{2\xi}(H(\cdot-x_1)H(x_2-\cdot))\| \le \sqrt{\frac{6}{11}}\,\| H(\cdot-x_1)H(x_2-\cdot)\|_* =$$

$$=\sqrt{\frac{6}{11}}\left(\sum_{\xi\in\omega_1^-\times\omega_2^+} h_1 h_2 H^2(\xi_1-x_1)H^2(x_2-\xi_2)\right)^{1/2}=$$

$$=\sqrt{\frac{6}{11}}\left(\sum_{\xi_1=0}^{1-h_1} h_1 H^2(\xi_1-x_1)\right)^{1/2}\left(\sum_{\xi_2=h_2}^{1} h_2 H^2(x_2-\xi_2)\right)^{1/2}= \tag{11}$$

$$=\sqrt{\frac{6}{11}}\left(\sum_{\xi_1=x_1}^{1-h_1} h_1\right)^{1/2}\left(\sum_{\xi_2=h_2}^{x_2} h_2\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{6}{11}}\sqrt{(1-x_1)x_2}\ .$$

Из оценок (10) и (11) получаем утверждение леммы. □

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Из леммы 2 следует оценка

$$|z(x)|=|(G(x,\cdot),\psi(\cdot))|\le\|G(x,\cdot)\|\cdot\|\psi\|\le\sqrt{\frac{6}{11}}\rho(x)\|\psi\|\le$$

$$\le\sqrt{\frac{6}{11}}\rho(x)(\|\Lambda_1\eta_1\|+\|\eta_{2\bar{x}_2x_2}\|). \tag{12}$$

Оценим здесь слагаемые $\|\Lambda_1\eta_1\|$ и $\|\eta_{2\bar{x}_2x_2}\|$. Для η_1 при $x\in\omega\cup\gamma_{-1}$ имеем

$$\eta_1(x)=(T_2u)(x)-u(x)=\frac{1}{h_2^2}\int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)u(x_1,\xi)d\xi-u(x_1,x_2)=$$

$$=\frac{1}{h_2^2}\int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)(u(x_1,\xi)-u(x_1,x_2))d\xi=$$

$$=\frac{1}{h_2^2}\int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)\,d\xi\int_{x_2}^{\xi}\frac{\partial u(x_1,\xi_1)}{\partial\xi_1}d\xi_1= \tag{13}$$

$$=\frac{1}{h_2^2}\int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)d\xi\int_{x_2}^{\xi}\left(\frac{\partial u(x_1,\xi_1)}{\partial\xi_1}-\frac{1}{h_2}\int_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}}\frac{\partial u(x_1,\xi_2)}{\partial\xi_2}d\xi_2\right)d\xi_1=$$

$$=\frac{1}{h_2^3}\int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)\,d\xi\int_{x_2}^{\xi}d\xi_1\int_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}}\left(\frac{\partial u(x_1,\xi_1)}{\partial\xi_1}-\frac{\partial u(x_1,\xi_2)}{\partial\xi_2}\right)d\xi_2=$$

$$=\frac{1}{h_2^3}\int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)\,d\xi\int_{x_2}^{\xi}d\xi_1\int_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}}d\xi_2\int_{\xi_2}^{\xi_1}\frac{\partial^2u(x_1,\xi_3)}{\partial\xi_3^2}d\xi_3.$$

Отсюда ввиду соотношения $\left(T_1\dfrac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\right)(x)=u_{\bar{x}_1x_1}(x)$, $x\in\omega$, следует представление

$$\eta_{1\bar{x}_1 x_1}(x)=\frac{1}{h_1^2 h_2^3}\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)d\xi\int\limits_{x_2}^{\xi}d\xi_1\int\limits_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}}d\xi_2\times$$

$$\times\int\limits_{\xi_2}^{\xi_1}d\xi_3\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1+h_1}(h_1-|x_1-\xi_4|)\frac{\partial^4 u(\xi_4,\xi_3)}{\partial\xi_4^2\partial\xi_3^2}d\xi_4,\ x\in\omega,$$

тогда

$$|\eta_{1\bar{x}_1 x_1}(x)|\le\frac{h_2 h_1}{h_1^2 h_2^3}\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}d\xi\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}d\xi_1\int\limits_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}}d\xi_2\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}d\xi_3\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1+h_1}\left|\frac{\partial^4 u(\xi_4,\xi_3)}{\partial\xi_4^2\partial\xi_3^2}\right|d\xi_4\le$$

$$\le\frac{h_2 h_1}{h_1^2 h_2^3}2h_2\cdot 2h_2\cdot h_2\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}d\xi_3\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1+h_1}\left|\frac{\partial^4 u(\xi_4,\xi_3)}{\partial\xi_4^2\partial\xi_3^2}\right|d\xi_4\le \tag{14}$$

$$\le\frac{h_2 h_1}{h_1^2 h_2^3}2h_2\cdot 2h_2\cdot h_2\sqrt{2h_2\cdot 2h_1}\left(\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}d\xi_3\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1+h_1}\left|\frac{\partial^4 u(\xi_4,\xi_3)}{\partial\xi_4^2\partial\xi_3^2}\right|^2 d\xi_4\right)^{1/2}=$$

$$=8\sqrt{\frac{h_2^3}{h_1}}\left(\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}d\xi_3\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1+h_1}\left|\frac{\partial^4 u(\xi_4,\xi_3)}{\partial\xi_4^2\partial\xi_3^2}\right|^2 d\xi_4\right)^{1/2},\ x\in\omega.$$

Аналогично с учетом соотношения $T_1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}=\dfrac{2}{h_1}\left(u_{x_1}-\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right)$ при $x\in\gamma_{-1}$ из формулы (13) получим представление

$$\frac{2}{h_1}(\eta_{1x_1}(x)-\sigma\eta_1(x))=\frac{2}{h_1^2 h_2^3}\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi|)d\xi\int\limits_{x_2}^{\xi}d\xi_1\int\limits_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}}d\xi_2\times$$

$$\times\int\limits_{\xi_2}^{\xi_1}d\xi_3\int\limits_{0}^{h_1}(h_1-\xi_4)\frac{\partial^4 u(\xi_4,\xi_3)}{\partial\xi_4^2\partial\xi_3^2}d\xi_4,\ x\in\gamma_{-1},$$

откуда

$$\left|\frac{2}{h_1}(\eta_{1x_1}(x)-\sigma\eta_1(x))\right|\le 8\sqrt{\frac{2h_2^3}{h_1}}\left(\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}d\xi_3\int\limits_{0}^{h_1}\left|\frac{\partial^4 u(\xi_4,\xi_3)}{\partial\xi_4^2\partial\xi_3^2}\right|^2 d\xi_4\right)^{1/2},\quad x\in\gamma_{-1}. \tag{15}$$

Из неравенств (14) и (15) имеем

$$\|\Lambda_1\eta_1\|^2=\sum_{x\in\omega}h_1 h_2\eta_{1\bar{x}_1 x_1}^2(x)+\frac{h_1}{2}\sum_{x\in\gamma_{-1}}h_2\left(\frac{2}{h_1}\eta_{1x_1}(x)-\sigma\eta_1(x)\right)^2\le$$

$$\le 64h_2^4\sum_{x\in\omega}\int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}d\xi_3\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1+h_1}\left|\frac{\partial^4 u(\xi_4,\xi_3)}{\partial\xi_4^2\partial\xi_3^2}\right|^2 d\xi_4+$$

$$+64h_2^4 \sum_{x_2\in\omega_2} \int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} d\xi_3 \int\limits_0^{h_1} \left| \frac{\partial^4 u(\xi_4,\xi_3)}{\partial\xi_4^2 \partial\xi_3^2} \right|^2 d\xi_4 \le$$

$$\le 4\cdot 64h_2^4 \iint\limits_D \left| \frac{\partial^4 u(\xi_4,\xi_3)}{\partial\xi_4^2 \partial\xi_3^2} \right|^2 d\xi_3 d\xi_4 = 256h_2^4 \iint\limits_D \left| \frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right|^2 dx_1 dx_2,$$

что дает оценку

$$\| \Lambda_1 \eta_1 \| \le 16h_2^2 \left(\iint\limits_D \left| \frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2}. \tag{16}$$

Рассмотрим теперь слагаемое $\| \eta_{2\bar{x}_2 x_2} \|$ в (12). При $x \in \omega$ имеем

$$\eta_2(x) = (T_1 u)(x) - u(x) = \frac{1}{h_1^2} \int\limits_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} (h_1 - |x_1 - \xi|) u(\xi, x_2) d\xi - u(x_1, x_2) =$$

$$= \frac{1}{h_1^3} \int\limits_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} (h_1 - |x_1 - \xi|) d\xi \int\limits_{x_1}^{\xi} d\xi_1 \int\limits_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}} d\xi_2 \int\limits_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\partial^2 u(\xi_3, x_2)}{\partial \xi_3^2} d\xi_3,$$

откуда следует представление

$$\eta_{2\bar{x}_2 x_2}(x) = \frac{1}{h_2^2 h_1^3} \int\limits_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} (h_1 - |x_1 - \xi|) d\xi \int\limits_{x_1}^{\xi} d\xi_1 \int\limits_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}} d\xi_2 \times$$

$$\times \int\limits_{\xi_2}^{\xi_1} d\xi_3 \int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} (h_2 - |x_2 - \xi_4|) \frac{\partial^4 u(\xi_3, \xi_4)}{\partial \xi_2^2 \partial \xi_4^2} d\xi_4, \ x \in \omega,$$

тогда, как и в (14), получим неравенство

$$| \eta_{2\bar{x}_2 x_2}(x) | \le 8 \sqrt{\frac{h_1^3}{h_2}} \left(\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} d\xi_3 \int\limits_{x_2-h_2}^{x_2+h_2} \left| \frac{\partial^4 u(\xi_3, \xi_4)}{\partial \xi_3^2 \partial \xi_4^2} \right|^2 d\xi_4 \right)^{1/2}, \ x \in \omega. \tag{17}$$

При $x \in \gamma_{-1}$ имеем

$$\eta_2(x) = (T_1 u)(x) - u(x) - \frac{h_1}{3} \sigma u(x) =$$

$$= \frac{2}{h_1^2} \int\limits_0^{h_1} (h_1 - \xi) u(\xi, x_2) d\xi - u(0, x_2) - \frac{h_1}{3} \frac{\partial u(0, x_2)}{\partial x_1} =$$

$$= \frac{2}{h_1^2} \int\limits_0^{h_1} (h_1 - \xi)(u(\xi, x_2) - u(0, x_2)) d\xi - \frac{h_1}{3} \frac{\partial u(0, x_2)}{\partial x_1} =$$

$$= \frac{2}{h_1^2} \int\limits_0^{h_1} (h_1 - \xi) d\xi \int\limits_0^{\xi} \frac{\partial u(\xi_1, x_2)}{\partial \xi_1} d\xi_1 - \frac{h_1}{3} \frac{\partial u(0, x_2)}{\partial x_1} =$$

$$=\frac{2}{h_1^2}\int_0^{h_1}(h_1-\xi)d\xi\int_0^{\xi}\left(\frac{\partial u(\xi_1,x_2)}{\partial\xi_1}-\frac{\partial u(0,x_2)}{\partial x_1}\right)d\xi_1=$$

$$=\frac{2}{h_1^2}\int_0^{h_1}(h_1-\xi)\,d\xi\int_0^{\xi}d\xi_1\int_0^{\xi_1}\frac{\partial^2 u(\xi_2,x_2)}{\partial\xi_2^2}d\xi_2,$$

откуда вследствие соотношения $\left(T_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)(x)=u_{\bar{x}_2x_2}(x),\ x\in\omega\cup\gamma_{-1},$ получим

$$\eta_{2\bar{x}_2x_2}(x)=\frac{2}{h_1^2h_2^2}\int_0^{h_1}(h_1-\xi)d\xi\int_0^{\xi}d\xi_1\int_0^{\xi_1}d\xi_2\int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}(h_2-|x_2-\xi_3|)\frac{\partial^4 u(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2^2\partial\xi_3^2}d\xi_3,$$

$$x\in\gamma_{-1}.$$

Отсюда следует цепочка неравенств

$$|\eta_{2\bar{x}_2x_2}(x)|\le\frac{2h_1h_2}{h_1^2h_2^2}\int_0^{h_1}d\xi\int_0^{h_1}d\xi_1\int_0^{h_1}d\xi_2\int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}\left|\frac{\partial^4 u(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2^2\partial\xi_3^2}\right|d\xi_3\le$$

$$\le\frac{2h_1h_2}{h_1^2h_2^2}h_1^2\sqrt{h_1\cdot 2h_2}\left(\int_0^{h_1}d\xi_2\int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}\left|\frac{\partial^4 u(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2^2\partial\xi_3^2}\right|^2d\xi_3\right)^{1/2}= \tag{18}$$

$$=2\sqrt{\frac{2h_1^3}{h_2}}\left(\int_0^{h_1}d\xi_2\int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}\left|\frac{\partial^4 u(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2^2\partial\xi_3^2}\right|^2d\xi_3\right)^{1/2},\ x\in\gamma_{-1}.$$

Из (17) и (18) вытекает

$$\|\eta_{2\bar{x}_2x_2}\|^2=\sum_{x\in\omega}h_1h_2\eta^2_{2\bar{x}_2x_2}(x)+\frac{h_1}{2}\sum_{x\in\gamma_{-1}}h_2\eta^2_{2\bar{x}_2x_2}(x)\le$$

$$\le 64h_1^4\sum_{x\in\omega}\int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1}d\xi_3\int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}\left|\frac{\partial^4 u(\xi_3,\xi_4)}{\partial\xi_3^2\partial\xi_4^2}\right|^2d\xi_4+$$

$$+4h_1^4\sum_{x_2\in\omega_2}\int_0^{h_1}d\xi_2\int_{x_2-h_2}^{x_2+h_2}\left|\frac{\partial^4 u(\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_2^2\partial\xi_3^2}\right|^2d\xi_3\le$$

$$\le 4\cdot 64h_1^4\iint_D\left|\frac{\partial^4 u(\xi_3,\xi_4)}{\partial\xi_3^2\partial\xi_4^2}\right|^2d\xi_3d\xi_4=256h_1^4\iint_D\left|\frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\right|^2dx_1dx_2,$$

что дает оценку

$$\|\eta_{2\bar{x}_2x_2}\|\le 16h_1^2\left(\iint_D\left|\frac{\partial^4 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\right|^2dx_1dx_2\right)^{1/2}. \tag{19}$$

На основании приведенных рассуждений приходим к такому результату.

Теорема 1. Пусть решение $u(x_1, x_2)$ задачи (1) удовлетворяет условию $u \in W_2^4(D)$. Тогда для точности разностной схемы (2) имеет место априорная оценка с весом

$$\|\rho^{-1} z\| \le 16\sqrt{\frac{6}{11}}\, |h|^2 \, |u|_{W_2^4(D)},$$

$\rho(x) = \min\{\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)},\ \sqrt{(1-x_1)x_2}\}$.

Доказательство. Подставляя (16) и (19) в (12), получаем неравенство

$$|z(x)| \le 16\sqrt{\frac{6}{11}}\,\rho(x)(h_1^2 + h_2^2)\left(\iint\limits_D \left|\frac{\partial^4 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\right|^2 dx_1 dx_2\right)^{1/2} \le$$

$$\le 16\sqrt{\frac{6}{11}}\,\rho(x)|h|^2 \, |u|_{W_2^4(D)}, \ x \in \omega \cup \gamma_{-1}, \tag{20}$$

откуда следует утверждение теоремы 1. □

ВЫВОДЫ И ОБОБЩЕНИЯ

В отличие от схемы (2) традиционная дискретизация задачи (1) разностной схемой

$$-y_{\bar{x}_1 x_1} - y_{\bar{x}_2 x_2} = (T_1 T_2 f)(x), \ x \in \omega,$$

$$-\frac{2}{h_1}(y_{x_1} - \sigma y) - y_{\bar{x}_2 x_2} = (T_1 T_2 f)(x), \ x \in \gamma_{-1},$$

$$y = 0, \ x \in \gamma \setminus \gamma_{-1},$$

имеет порядок $O(|h|^{3/2})$, что означает потерю половины порядка при аппроксимации краевого условия с частной производной.

Аналог доказанной теоремы можно получить и в случае неоднородного краевого условия Ньютона (см. задачу (1)):

$$-\Delta u = f(x), \ x \in D,$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x_1} + \sigma u(x) = g(x), \ x \in \Gamma_{-1}, \tag{21}$$

$$u = 0, \ x \in \Gamma \setminus \Gamma_{-1}.$$

В качестве разностной аппроксимации задачи (21) можно принять схему (2), полагая в ней $\varphi(x) = (T_1 T_2 f)(x) + \dfrac{2}{h_1} T_2 g - \dfrac{h_1}{3}(S_2 g)_{\bar{x}_2 x_2}$ при $x \in \gamma_{-1}$. Тогда для погрешности $z = y - u$ получим задачу (3), в которой

$$\eta_2(x) = (T_1 u)(x) - \left(1 + \frac{h_1 \sigma}{3}\right) u(x) + \frac{h_1}{3}(S_2 g)(x), \ x \in \gamma_{-1}.$$

Применяя лемму Брэмбла–Гильберта и рассуждая как и в [8, с. 165], получаем априорную оценку с весом

$$\|\rho^{-1} z\| \le M |h|^2 \, \|u\|_{W_2^4(D)},$$

где M — не зависящая от $|h|$ и u постоянная.

Заметим, что функционалы η_1 и η_2 в (16) и (19) также можно оценивать с помощью леммы Брэмбла–Гильберта [8], но такие оценки содержали бы неопределенные постоянные (не зависящие от $|h|$ и $u(x)$).

Итак, оценка (20) показывает, что разностная схема (2) имеет второй порядок точности, причем точность схемы выше вблизи трех сторон $\Gamma_{\pm 2}$, Γ_{+1} квадрата D, на которых задано краевое условие Дирихле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галба Е.Ф. О порядке точности разностной схемы для уравнения Пуассона со смешанным граничным условием // Оптимизация алгоритмов программного обеспечения ЭВМ. — К.: Ин.-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, 1985. — С. 30–34.
2. Молчанов И.Н., Галба Е.Ф. О сходимости разностной схемы, аппроксимирующей задачу Дирихле для эллиптического уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами // Численные методы и технология разработки пакетов прикладных программ. — К.: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, 1990. — С. 161–165.
3. Makarov V. On a priori estimate of difference schemes giving an account of the boundary effect // C.R. Acad. Bulg. Sci. (Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences). — 1989. — **42**, N 5. — P. 41–44.
4. Макаров В.Л., Демків Л.І. Покращені оцінки точності традиційних різницевих схем для параболічних рівнянь // Праці Українського математичного конгресу, 2001. — С. 31–42.
5. Майко Н.В. Оценки точности разностных схем для одномерного параболического уравнения с учетом эффекта от начальных и краевых условий // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — № 5. — С. 154–163.
6. Makarov V.L., Demkiv L.I. Accuracy estimates of difference schemes for quasi-linear elliptic equations with variable coefficients taking into account boundary effect // Lect. Notes Comput. Sci. — 2005. — **3401.** — P. 80–90.
7. Samarskii A.A. The theory of difference schemes. — New York: Marcel Dekker, Inc., 2001. — 762 p.
8. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. — М.: Высш. шк., 1987. — 296 с.

Надійшла до редакції 23.07.2015

Н.В. Майко, В.Л. Рябічев

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ РІЗНИЦЕВОЇ СХЕМИ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ПУАССОНА З УРАХУВАННЯМ ЕФЕКТУ ВІД КРАЙОВИХ УМОВ

Анотація. Отримано апріорну оцінку швидкості збіжності сіткового розв'язку до узагальненого розв'язку двовимірного рівняння Пуассона у випадку мішаної крайової умови (крайові умови першого і третього роду). Показано, що точність схеми вища поблизу тих сторін квадрата, на яких задана крайова умова Діріхле.

Ключові слова: рівняння Пуассона, крайова задача, різницева схема, оцінка з вагою, урахування впливу крайової умови.

N.V. Mayko, V.L. Ryabichev

THE BOUNDARY EFFECT IN THE ERROR ESTIMATE OF THE FINITE-DIFFERENCE SCHEME FOR POISSON'S EQUATION

Abstract. We obtain the weighted error estimate of the finite-difference scheme for Poisson's equation in a unit square, which takes into account the effect of the first boundary condition. We prove that the accuracy order is higher near the sides of the domain where the Dirichlet boundary condition is specified.

Keywords: Poisson's equation, mixed boundary condition, finite-difference scheme, weighted error estimate, boundary effect.

Майко Наталия Валентиновна,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: mayko@knu.ua, natmaiko@gmail.com.

Рябичев Вячеслав Львович,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: ryabichev@knu.ua.