УДК 517.9:519.6

В.М. БУЛАВАЦКИЙ

ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ АНАЛОГ БИПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Аннотация. Исследован дробно-дифференциальный аналог известного бипараболического эволюционного уравнения, предназначенный для описания динамики процессов тепломассопереноса в условиях их временной неравновесности. Получены замкнутые решения ряда задач, в частности задачи типа Коши и краевой задачи для конечного промежутка. Предложена новая (дробно-дифференциальная) математическая модель для описания неравновесной динамики фильтрационных процессов в трещиновато-пористых средах.

Ключевые слова: бипараболическое эволюционное уравнение, дробно-дифференциальный аналог, фундаментальное решение, одномерная задача типа Коши, краевая задача на конечном промежутке, математическое моделирование дробно-дифференциальной динамики фильтрационных процессов, неклассические модели.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1–3], классическая математическая теория теплопроводности основана на линейном уравнении параболического типа

$$\widetilde{L}_1 u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa^2 \Delta \right) u(x, t) = 0, \tag{1}$$

где u — температура, $x \in E_n$, Δ — оператор Лапласа, $\kappa > 0$ — физическая константа. При этом в данной теории постулированы такие жесткие ограничения на процессы, как бесконечная скорость распространения возмущений и линейная зависимость потока от градиента поля, а также энергии от температуры. Нарушение указанных условий не позволяет в рамках данной модели получить достаточно корректного описания динамики процессов тепломассопереноса и приводит к некоторым известным парадоксам [2–4]. При этом рядом авторов, в частности [3, 4], для описания процессов с конечной скоростью предложено гиперболическое уравнение, учитывающее релаксацию теплового потока.

Как отмечено в [5], замена уравнения (1) уравнением гиперболического типа принципиальна, но трудно объяснима с теоретико-групповой точки зрения, поскольку все нестационарные уравнения, в которые входят вторые производные по времени, неинвариантны относительно преобразований Галилея. Гиперболическое уравнение теплопроводности не имеет соответствующих симметрийных свойств. Это означает, что оно не отображает основных физических законов сохранения [5].

В связи с этим в работах [5, 6] указано на одно естественное обобщение уравнения (1)

$$\widetilde{L} u \equiv \alpha_1 \widetilde{L}_1 u + \alpha_2 \widetilde{L}_2 u = 0, \quad \widetilde{L}_2 = \widetilde{L}_1 \widetilde{L}_1, \tag{2}$$

где α_1, α_2 — действительные параметры.

Дифференциальное уравнение (2) в частных производных четвертого порядка инвариантно [6] относительно группы Галилея $G(1,3)$, поэтому предполагается, что его можно использовать для описания диффузионных процессов, не зависящих от того, в каких инерциальных системах они наблюдаются [5, 6]. Уравнение (2) называется бипараболическим [5]; при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ оно совпадает с классическим уравнением Фурье.

Отметим, что бипараболическое уравнение (2) неоднократно использовалось при моделировании различных эволюционных процессов в естествознании, в частности, для описания особенностей динамики деформируемых водонасыщенных пористых сред в процессе их фильтрационной консолидации под действием приложенных нагрузок [7–9].

Настоящая работа посвящена построению дробно-дифференциального аналога бипараболического эволюционного уравнения (2), предназначенного для моделирования динамики тепловых и диффузионных процессов с учетом их временной неравновесности. В рамках данного подхода предложена новая (неклассическая) математическая модель для описания дробно-дифференциальной динамики фильтрационных процессов в трещиновато-пористых пластах.

ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ АНАЛОГ БИПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Запишем определяющие соотношения для энергии и потока в виде

$$e = e_0 + c_V (u - u_0) + \tau_r c_V L_1, \tag{3}$$

$$\vec{q} = -\lambda \nabla u - \tau_r c_V \kappa^2 \nabla (L_1 u), \tag{4}$$

где $u = u(x, t)$ — температура, c_V — теплоемкость, λ — коэффициент теплопроводности, $\kappa^2 = \lambda / c_V$, τ_r — вещественный параметр (параметр релаксации), $L_1 = D_t^{(\alpha)} - \kappa^2 \Delta$ — дробно-дифференциальный аналог оператора теплопроводности, $D_t^{(\alpha)}$ — оператор дробной производной Капуто–Герасимова [10, 11] по переменной t порядка α $(0 < \alpha \le 1)$, Δ — оператор Лапласа, ∇— оператор Гамильтона [12].

С учетом соотношений (3), (4) из обобщенного уравнения сохранения энергии $D_t^{(\alpha)} e + \operatorname{div} \vec{q} = 0$ получаем уравнение

$$Lu \equiv L_1 u + \tau_r L_2 u = 0, \quad L_2 = L_1 L_1 = D_t^{(\alpha)} D_t^{(\alpha)} - 2\kappa^2 D_t^{(\alpha)} \Delta + \kappa^4 \Delta^2 \ . \tag{5}$$

Отсюда, как частный случай, при $\alpha \to 1$ получаем стандартное [5, 6] бипараболическое эволюционное уравнение (2).

В дальнейшем уравнение (5) будем называть дробно-дифференциальным аналогом бипараболического эволюционного уравнения. Предполагается, что данное уравнение можно использовать для математического моделирования динамики тепловых и диффузионных процессов с учетом эффектов памяти, в частности, в средах фрактальной структуры.

АНАЛОГ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Назовем аналогом фундаментального решения для уравнения (5) обобщенную функцию $G_{\tau_r}(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$LG_{\tau_r} \equiv L_1 G_{\tau_r} + \tau_r L_2 G_{\tau_r} = \delta(x)\delta(t), \tag{6}$$

где δ — дельта-функция, $-\infty < x < \infty$.

Применяя к (6) преобразование Фурье по переменной x вида

$$\hat{u}(\sigma, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{i\sigma x} dx,$$

где σ — вещественный параметр преобразования, получаем уравнение

$$\tau_r D_t^{(\alpha)} D_t^{(\alpha)} \hat{G}_{\tau_r}(\sigma, t) + (1 + 2\tau_r \kappa^2 \sigma^2) D_t^{(\alpha)} \hat{G}_{\tau_r}(\sigma, t) +$$
$$+ \kappa^2 \sigma^2 (1 + \tau_r \kappa^2 \sigma^2) \hat{G}_{\tau_r}(\sigma, t) = \frac{\delta(t)}{2\pi}. \tag{7}$$

В образах Лапласа уравнение (7) принимает вид

$$\overline{\hat{G}}_{\tau_r}(\sigma, s)[\tau_r s^{2\alpha} + (1 + 2\tau_r \kappa^2 \sigma^2) s^\alpha + \kappa^2 \sigma^2 (1 + \tau_r \kappa^2 \sigma^2)] = \frac{1}{2\pi}, \tag{8}$$

где $\overline{\hat{G}}_{\tau_r}(\sigma, s)$ — образ Лапласа функции $\hat{G}_{\tau_r}(\sigma, t)$ по переменной t, s — параметр преобразования Лапласа.

Из соотношения (8) находим

$$\overline{\hat{G}}_{\tau_r}(\sigma, s) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{s^\alpha + \kappa^2\sigma^2} - \frac{1}{s^\alpha + \kappa^2\sigma^2 + 1/\tau_r}\right). \tag{9}$$

Возвращаясь в область оригиналов по временной переменной с использованием соотношения [10,11]

$$\mathcal{L}[t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-at^\alpha)] = \frac{1}{s^\alpha + a} \ (\mathrm{Re}\,(s) > 0, \ |as^{-\alpha}| < 1),$$

где $\mathcal{L}$ — оператор преобразования Лапласа, $E_{\alpha,\alpha}(z)$ — двухпараметрическая функция Миттаг–Леффлера [13], получаем из (8)

$$\hat{G}_{\tau_r}(\sigma, t) = \frac{\theta(t)t^{\alpha-1}}{2\pi}\left\{E_{\alpha,\alpha}(-\kappa^2\sigma^2 t^\alpha) - E_{\alpha,\alpha}\left[-\left(\frac{1}{\tau_r} + \kappa^2\sigma^2\right)t^\alpha\right]\right\}, \tag{10}$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда [12].

Наконец, возвращаясь в соотношении (10) в область оригиналов по геометрической переменной, получаем искомое решение в виде

$$G_{\tau_r}(x, t) = \frac{\theta(t)t^{\alpha-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{E_{\alpha,\alpha}(-\kappa^2\sigma^2 t^\alpha) - E_{\alpha,\alpha}\left[-\left(\frac{1}{\tau_r} + \kappa^2\sigma^2\right)t^\alpha\right]\right\}e^{-i\sigma x}d\sigma. \tag{11}$$

Соотношение (11) представляет собой аналог фундаментального решения для обобщенного дробно-дифференциального оператора L, заданного соотношениями

$$L \equiv L_1 + \tau_r L_1 L_1, \ L_1 = D_t^{(\alpha)} - \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Из (11), в частности при $\alpha \to 1$, получаем найденное в [5] фундаментальное решение $\widetilde{G}_{\tau_r}$ бипараболического оператора $\widetilde{L}$, определяемого соотношениями

$$\widetilde{L} \equiv \widetilde{L}_1 + \tau_r \widetilde{L}_1 \widetilde{L}_1, \ \widetilde{L}_1 = \frac{\partial}{\partial t} - \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Действительно, поскольку $E_{1,1}(z) = e^z$ [10, 11, 13], из (11) имеем

$$\widetilde{G}_{\tau_r}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2\pi}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_r}}\right)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(i\sigma x + \kappa^2\sigma^2 t)}d\sigma =$$

$$= \frac{\theta(t)}{\pi}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_r}}\right)\int_0^{\infty} e^{-\kappa^2\sigma^2 t}\cos(\sigma x)d\sigma = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_r}}\right)Q(x, t),$$

где $Q(x,t)=\dfrac{\theta(t)}{2\kappa\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}}$ — фундаментальное решение классического оператора теплопроводности [12].

Отметим, что, как указано в [5], фундаментальное решение бипараболического оператора отличается от фундаментального решения классического оператора теплопроводности лишь зависящим от времени множителем $(1-e^{-t/\tau_r})$.

С учетом известной [13] асимптотической формулы для функции Миттаг–Леффлера получаем из (11) соотношения

$$\lim_{t\to\infty} G_{\tau_r}(x,t)=0,\ \ \lim_{\tau_r\to 0} G_{\tau_r}(x,t)=Q_\alpha(x,t)\ \ (x\neq 0),$$

где $Q_\alpha(x,t)$ — аналог фундаментального решения для дробно-дифференциального оператора теплопроводности L_1 [14]:

$$Q_\alpha(x,t)=\frac{\theta(t)t^{\alpha-1}}{\pi}\int_0^\infty E_{\alpha,\alpha}(-\kappa^2\sigma^2 t^\alpha)\cos(\sigma x)d\sigma.$$

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ТИПА КОШИ

Рассмотрим на прямой $x\in\mathbb{R}$ следующую задачу типа Коши:

$$Lu\equiv D_t^{(\alpha)}u-\kappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\tau_r\left(D_t^{(\alpha)}-\kappa^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(D_t^{(\alpha)}u-\kappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=0,\qquad(12)$$

$$u(x,0)=\psi(x),\ \ D_t^{(\alpha)}u(x,0)=\varphi(x),\qquad(13)$$

где $\psi(x),\varphi(x)$ — заданные функции, для которых существует преобразование Фурье по переменной x $(-\infty<x<\infty)$.

Применяя преобразование Фурье по этой переменной к задаче (12), (13) получаем задачу

$$\tau_r D_t^{(\alpha)}D_t^{(\alpha)}\hat{u}(\sigma,t)+(1+2\tau_r\kappa^2\sigma^2)D_t^{(\alpha)}\hat{u}(\sigma,t)+\kappa^2\sigma^2(1+\tau_r\kappa^2\sigma^2)\hat{u}(\sigma,t)=0,\qquad(14)$$

$$\hat{u}(\sigma,0)=\hat{\psi}(\sigma),\ \ D_t^{(\alpha)}\hat{u}(\sigma,0)=\hat{\varphi}(\sigma),\qquad(15)$$

где $\hat{\psi}(\sigma)$, $\hat{\varphi}(\sigma)$ — образы Фурье функций $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно, σ — вещественный параметр преобразования.

Далее, применяя к (14) интегральное преобразование Лапласа по временной переменной, получаем с учетом (15)

$$\bar{\hat{u}}(\sigma,s)=\hat{\psi}(\sigma)\bar{A}_1(s)+\left[\hat{\varphi}(\sigma)+\left(\frac{1}{\tau_r}+2\kappa^2\sigma^2\right)\hat{\psi}(\sigma)\right]\bar{B}_1(s),\qquad(16)$$

где

$$\bar{A}_1(s)=\frac{s^{2\alpha-1}}{s^{2\alpha}+(1/\tau_r+2\kappa^2\sigma^2)s^\alpha+\kappa^2\sigma^2(1/\tau_r+\kappa^2\sigma^2)},\qquad(17)$$

$$\bar{B}_1(s)=\frac{s^{\alpha-1}}{s^{2\alpha}+(1/\tau_r+2\kappa^2\sigma^2)s^\alpha+\kappa^2\sigma^2(1/\tau_r+\kappa^2\sigma^2)},\qquad(18)$$

$\bar{\hat{u}}(\sigma,s)$ — образ Лапласа функции $\hat{u}(\sigma,t)$, s — параметр преобразования.

С учетом соотношения (9) заключаем, что функции $\overline{A}_1(s)$, $\overline{B}_1(s)$, определяемые соотношениями (17), (18), можно представить в виде линейной комбинации дробей $s^{\alpha-1}/(s^{\alpha}+a)$ и $s^{2\alpha-1}/(s^{\alpha}+a)$.

Тогда с учетом известного [10, 11, 13, 14] соотношения

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-at^{\alpha})]=\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}+a}\ \ (\operatorname{Re}(s)>0,\ |as^{-\alpha}|<1)$$

после соответствующих вычислений получаем

$$A_1(t)=\tau_r\, t^{-\alpha}\left\{E_{\alpha,1-\alpha}(-\kappa^2\sigma^2t^{\alpha})-E_{\alpha,1-\alpha}\left[-\left(\frac{1}{\tau_r}+\kappa^2\sigma^2\right)t^{\alpha}\right]\right\},\qquad(19)$$

$$B_1(t)=\tau_r\left\{E_{\alpha}(-\kappa^2\sigma^2t^{\alpha})-E_{\alpha}\left[-\left(\frac{1}{\tau_r}+\kappa^2\sigma^2\right)t^{\alpha}\right]\right\}.\qquad(20)$$

Соотношения (19), (20) позволяют вернуться в (16) в область оригиналов относительно преобразования Лапласа. В результате имеем

$$\hat{u}(\sigma,t)=\hat{\psi}(\sigma)\left\{(1+\tau_r\kappa^2\sigma^2)E_{\alpha}(-\kappa^2\sigma^2t^{\alpha})-\tau_r\kappa^2\sigma^2E_{\alpha}\left[-\left(\frac{1}{\tau_r}+\kappa^2\sigma^2\right)t^{\alpha}\right]\right\}+$$

$$+\tau_r\hat{\varphi}(\sigma)\left\{E_{\alpha}(-\kappa^2\sigma^2t^{\alpha})-E_{\alpha}\left[-\left(\frac{1}{\tau_r}+\kappa^2\sigma^2\right)t^{\alpha}\right]\right\}.$$

Отсюда, применив обратное преобразование Фурье по переменной x, окончательный результат запишем в виде

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\hat{\psi}(\sigma)\left\{(1+\tau_r\kappa^2\sigma^2)E_{\alpha}(-\kappa^2\sigma^2t^{\alpha})-\tau_r\kappa^2\sigma^2E_{\alpha}\left[-\left(\frac{1}{\tau_r}+\kappa^2\sigma^2\right)t^{\alpha}\right]\right\}+\right.$$

$$\left.+\tau_r\hat{\varphi}(\sigma)\left\{E_{\alpha}(-\kappa^2\sigma^2t^{\alpha})-E_{\alpha}\left[-\left(\frac{1}{\tau_r}+\kappa^2\sigma^2\right)t^{\alpha}\right]\right\}\right\}e^{-i\sigma x}d\sigma,\qquad(21)$$

где

$$\hat{\psi}(\sigma)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{i\sigma x}dx,\ \ \hat{\varphi}(\sigma)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{i\sigma x}dx.$$

Отметим, что из соотношения (21) при $\alpha\to1$ получаем решение задачи Коши для бипараболического уравнения с начальными условиями $u(x,0)=\psi(x)$, $u'_t(x,0)=\varphi(x)$:

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{\hat{\psi}(\sigma)[1+\tau_r\kappa^2\sigma^2(1-e^{-t/\tau_r})]+\tau_r\hat{\varphi}(\sigma)(1-e^{-t/\tau_r})\}e^{-\sigma(ix+\kappa^2\sigma\, t)}d\sigma.$$

Из (21) при $\tau_r=0$ также можно получить решение задачи Коши для дробно-дифференциального аналога уравнения теплопроводности $L_1u=0$ при условии $u(x,0)=\psi(x)$ [10, 11, 13, 14]

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}E_{\alpha}(-\kappa^2\sigma^2t^{\alpha})\hat{\psi}(\sigma)\,e^{-i\sigma x}d\sigma.$$

Из последнего соотношения при $\alpha \to 1$ получаем известное решение задачи Коши для классического уравнения теплопроводности $\widetilde{L}_1 u = 0$ [12]

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa^2 \sigma^2 t} e^{-i\sigma(x-\xi)} d\sigma = \frac{1}{2\kappa\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa^2 t}} d\xi.$$

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

Как отмечалось ранее, бипараболическое эволюционное уравнение можно использовать в рамках математической модели, описывающей динамику избыточных напоров в процессе фильтрационной консолидации водонасыщенных грунтовых массивов под действием приложенных внешних нагрузок [7, 8]. При этом определяющие соотношения модели соответствуют таким законам фильтрации и уплотнения:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\gamma} \nabla (p + \tau_r L_1^* p), \tag{22}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - a(\sigma_1 - p - \tau_r L_1^* p), \tag{23}$$

где $\vec{v}$ — скорость фильтрации; ε — коэффициент пористости; $p = \gamma u$ — поровое давление ($u = u(x,t)$ — избыточный напор, γ — объемный вес жидкости); $k > 0$ — коэффициент фильтрации; a и σ_1 — соответственно коэффициент сжимаемости и внешняя нагрузка при компрессии; $L_1^* = \partial / \partial t - c_v \partial^2 / \partial x^2$; $c_v = k(1 + \varepsilon_{\text{ср}})(\gamma a)^{-1}$ — коэффициент консолидации [15]; ε_0 и $\varepsilon_{\text{ср}}$ — начальное и среднее значения коэффициента пористости соответственно.

При известных ограничениях [15] из уравнения неразрывности жидкой фазы получаем (с учетом (22)) следующее уравнение консолидации водонасыщенного грунтового массива:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = a\gamma c_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u + \tau_r L_1^* u),$$

или, принимая во внимание (23), имеем бипараболическое уравнение консолидации [7]

$$(L_1^* + \tau_r L_1^* L_1^*) u(x,t) = 0 \quad \left(L_1^* = \frac{\partial}{\partial t} - c_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right). \tag{24}$$

В более общем случае моделирования дробно-дифференциальной динамики избыточных напоров в процессе фильтрационной консолидации в соотношения (22), (23) положим $L_1^* = D_t^{(\alpha)} - c_v \partial^2 / \partial x^2 \equiv L_c$. Тогда из дробно-дифференциального аналога уравнения неразрывности жидкой фазы имеем уравнение

$$\frac{1}{1 + \varepsilon_{\text{ср}}} D_t^{(\alpha)} \varepsilon = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u + \tau_r L_c u)$$

или с учетом (23) окончательно получаем уравнение дробно-дифференциальной модели консолидации водонасыщенных грунтов в виде

$$(L_c + \tau_r L_c L_c) u(x,t) = 0 \quad \left(L_c = D_t^{(\alpha)} - c_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right), \tag{25}$$

где $u = u(x,t)$ — избыточный (сверх гидростатического) напор.

Рассмотрим задачу моделирования дробно-дифференциальной динамики избыточных напоров в процессе консолидации массива конечной мощности l с хорошо проницаемой верхней гранью $x=0$, расположенного на непроницаемом основании $x=l$. В этом случае задача сводится к решению в области $(0,l)\times(0,\infty)$ уравнения (25) при краевых условиях

$$u(0,t)=u''_{xx}(0,t)=0,\quad u'_{x}(l,t)=u'''_{xxx}(l,t)=0, \tag{26}$$

$$u(x,0)=\psi(x),\ D_t^{(\alpha)}u(x,0)=0. \tag{27}$$

Решение задачи (25)–(27) можно получить согласно следующему алгоритму.

Введем в рассмотрение конечное синус-преобразование Фурье по переменной x вида

$$\hat{u}_n(t)=\int\limits_0^l u(x,t)\sin(\lambda_n x)\,dx\ \left(\lambda_n=\frac{\pi(2n-1)}{2l},\ n=1,2,\ldots\right)$$

и поставим в соответствие исследуемой краевой задаче последовательность задач типа Коши:

$$\tau_r D_t^{(\alpha)}D_t^{(\alpha)}\hat{u}_n(t)+(1+2\tau_r c_v\lambda_n^2)D_t^{(\alpha)}\hat{u}_n(t)+c_v\lambda_n^2(1+\tau_r c_v\lambda_n^2)\hat{u}_n(t)=0, \tag{28}$$

$$\hat{u}_n(0)=\omega_n,\ D_t^{(\alpha)}\hat{u}_n(0)=0\ (n=1,2,\ldots), \tag{29}$$

где обозначено

$$\omega_n=\int\limits_0^l \psi(x)\sin(\lambda_n x)dx. \tag{30}$$

Как и ранее, решение задач (28), (29) находим с использованием методики преобразования Лапласа. Применяя к (28) преобразование Лапласа по переменной t, с учетом (29) получаем соотношение

$$\bar{\hat{u}}_n(s)=\omega_n\left[\bar{A}_2(s)+\left(\frac{1}{\tau_r}+2c_v\lambda_n^2\right)\bar{B}_2(s)\right], \tag{31}$$

где

$$\bar{A}_2(s)=\frac{s^{2\alpha-1}}{s^{2\alpha}+(1/\tau_r+2c_v\lambda_n^2)s^{\alpha}+c_v\lambda_n^2(1/\tau_r+c_v\lambda_n^2)}, \tag{32}$$

$$\bar{B}_2(s)=\frac{s^{\alpha-1}}{s^{2\alpha}+(1/\tau_r+2c_v\lambda_n^2)s^{\alpha}+c_v\lambda_n^2(1/\tau_r+c_v\lambda_n^2)}, \tag{33}$$

$\bar{\hat{u}}_n(s)$ — образ Лапласа функции $\hat{u}_n(t)$, s — параметр преобразования.

Переход в область оригиналов в соотношениях вида (32), (33) осуществляется аналогично изложенному ранее. После выполнения соответствующих выкладок в результате получаем из (31)

$$\hat{u}_n(t)=\omega_n\left\{(1+\tau_r c_v\lambda_n^2)E_\alpha(-c_v\lambda_n^2 t^\alpha)-\tau_r c_v\lambda_n^2 E_\alpha\left[-\left(\frac{1}{\tau_r}+c_v\lambda_n^2\right)t^\alpha\right]\right\}.$$

Возвращаясь в область оригиналов по геометрической переменной, находим решение рассматриваемой задачи в виде

$$u(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\left\{(1+\tau_r c_v\lambda_n^2)E_\alpha(-c_v\lambda_n^2 t^\alpha)-\right.$$

$$\left.-\tau_r c_v\lambda_n^2 E_\alpha\left[-\left(\frac{1}{\tau_r}+c_v\lambda_n^2\right)t^\alpha\right]\right\}\sin(\lambda_n x), \qquad (34)$$

где величина ω_n определяется соотношением (30). Отсюда, в частности при $\alpha\to 1$, получаем решение соответствующей краевой задачи в рамках бирапаболической математической модели [7]

$$u(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\left[1+\tau_r c_v\lambda_n^2\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_r}}\right)\right]e^{-c_v\lambda_n^2 t}\sin(\lambda_n x).$$

В случае $\tau_r\to 0$ из (34) получаем решение соответствующей краевой задачи для конечного промежутка в рамках дробно-дифференциальной модели теплопроводности, основанной на уравнении $L_c u=0$ [14]

$$u(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n E_\alpha(-c_v\lambda_n^2 t^\alpha)\sin(\lambda_n x)\left(\omega_n=\int_0^l\psi(x)\sin(\lambda_n x)dx\right).$$

ПРИМЕНЕНИЕ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Как известно [16, 17], классическая математическая модель фильтрации в трещиновато-пористых средах (пористые блоки, разделяемые системой трещин) базируется на следующей системе уравнений неразрывности фильтрационного потока в системе трещин и пористых блоков:

$$\beta_1^*\frac{\partial p_1}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{u}_1=q,\quad \beta_2^*\frac{\partial p_2}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{u}_2=-q$$

или

$$\widetilde{L}_1 p_1=\tau_1(p_2-p_1), \qquad (35)$$

$$\widetilde{L}_2 p_2=\tau_2(p_1-p_2), \qquad (36)$$

где p_1, p_2 — давления в системе трещин и в пористых блоках соответственно; $\vec{u}_1$ — скорость фильтрации в системе трещин; $\vec{u}_2$ — скорость фильтрации в пористых блоках; $q=\dfrac{\alpha_0}{\mu}(p_2-p_1)$ — интенсивность перетока [17]; α_0 — коэффициент перетока; μ — вязкость жидкости; β_i^* $(i=1,2)$ — коэффициенты упругоемкости обеих сред; $\widetilde{L}_i=\dfrac{\partial}{\partial t}-\kappa_i\Delta$ $(i=1,2)$, $\kappa_i=\dfrac{k_i}{\mu\beta_i^*}$ $(i=1,2)$ — величины пьезопроводности в системе трещин и пористых блоков соответственно; $\tau_i=\dfrac{\alpha_0}{\mu\beta_i^*}$ $(i=1,2)$.

Исключая из системы уравнений (35), (36) любую из функций p_i $(i=1,2)$, получаем для функции давления p в блоках или трещинах уравнение

$$\widetilde{L}_1 p+\gamma_1\widetilde{L}_2 p+\gamma_2\widetilde{L}_1\widetilde{L}_2 p=0, \qquad (37)$$

$$(\gamma_1=\tau_1/\tau_2,\quad \gamma_2=1/\tau_2,\quad \tau_2\neq 0).$$

Уравнение (37) очевидно является естественным обобщением стандартного бипараболического уравнения (2), поскольку последнее получается из (37) при $\widetilde{L}_1 \equiv \widetilde{L}_2$. В связи с этим уравнение вида (37) в дальнейшем будем называть обобщенным бипараболическим уравнением.

Для моделирования дробно-дифференциальной динамики неравновесных фильтрационных процессов в трещиновато-пористых средах воспользуемся дробно-дифференциальными операторами

$$L_1 = D_t^{(\alpha)} - \kappa_1 \Delta, \ L_2 = D_t^{(\beta)} - \kappa_2 \Delta, \tag{38}$$

где $D_t^{(\alpha)}$, $D_t^{(\beta)}$ — операторы производной Капуто–Герасимова [10, 11] по переменной t порядков α и β соответственно ($0 < \alpha, \ \beta \le 1$). Тогда аналог системы уравнений неразрывности (35), (36) для неравновесного фильтрационного процесса в трещиновато-пористой среде запишется в виде

$$L_1 p_1 = \tau_1 (p_2 - p_1), \tag{39}$$

$$L_2 p_2 = \tau_2 (p_1 - p_2). \tag{40}$$

Исключая из системы уравнений (39), (40), например, функцию p_2, получаем для функции давления $p \equiv p_1$ уравнение

$$Lp \equiv L_1 p + \gamma_1 L_2 p + \gamma_2 L_2 L_1 p = 0, \tag{41}$$

где

$$L_2 L_1 \equiv D_t^{(\beta)} D_t^{(\alpha)} - (\kappa_1 D_t^{(\beta)} + \kappa_2 D_t^{(\alpha)}) \Delta + \kappa_1 \kappa_2 \Delta^2.$$

Уравнение (41) очевидно является дробно-дифференциальным аналогом обобщенного бипараболического уравнения (37). При этом из данного уравнения при $L_1 \equiv L_2$ получаем рассмотренный ранее дробно-дифференциальный аналог стандартного бипараболического уравнения, т.е. уравнение

$$L_1 p + \tau_r L_1 L_1 p = 0 \ \ (\tau_r = \gamma_2 / (1 + \gamma_1)). \tag{42}$$

В рамках модели, базирующейся на уравнении (41), рассмотрим задачу моделирования дробно-дифференциальной динамики процесса фильтрации в трещиновато-пористом массиве конечной мощности l с хорошо проницаемыми обеими гранями. Соответствующую одномерную краевую задачу в области $(0, l) \times (0, \infty)$ сформулируем в виде

$$L_1 p + \gamma_1 L_2 p + \gamma_2 L_2 L_1 p = 0, \tag{43}$$

$$p(0, t) = p''_{xx}(0, t) = 0, \quad p(l, t) = p''_{xx}(l, t) = 0, \tag{44}$$

$$p(x, 0) = p_0(x), \quad D_t^{(\alpha)} p(x, 0) = 0, \tag{45}$$

где L_1, L_2 определяются соотношениями (38).

Методика получения решения краевой задачи (43)–(45) кратко состоит в следующем.

Оператор конечного синус-преобразования Фурье вида

$$\hat{p}_n(t) = \int_0^l p(x, t) \sin(\lambda_n x) dx \ \left(\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \ n = 1, 2, \ldots \right)$$

ставит в соответствие рассматриваемой краевой задаче последовательность задач типа Коши:

$$D_t^{(\beta)} D_t^{(\alpha)} \hat{p}_n(t) + \left(\frac{1+\kappa_2 \lambda_n^2}{\gamma_2} \right) D_t^{(\alpha)} \hat{p}_n(t) +$$

$$+ \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} + \kappa_1 \lambda_n^2 \right) D_t^{(\beta)} \hat{p}_n(t) + \lambda_n^2 \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2 \gamma_1}{\gamma_2} + \kappa_1 \kappa_2 \lambda_n^2 \right) \hat{p}_n(t) = 0, \tag{46}$$

$$\hat{p}_n(0) = \int_0^l p_0(x) \sin(\lambda_n x) dx \equiv \nu_n, \; D_t^{(\alpha)} \hat{p}_n(0) = 0 \;\; (n = 1, 2, \ldots). \tag{47}$$

Применяя к (46) преобразование Лапласа по переменной t, с учетом условий (47), находим

$$\bar{\hat{p}}_n(s) = \nu_n \frac{s^{\alpha+\beta-1} + a_n s^{\alpha-1} + b_n s^{\beta-1}}{s^{\alpha+\beta} + a_n s^\alpha + b_n s^\beta + c_n}, \tag{48}$$

где $a_n = \dfrac{1+\kappa_2 \lambda_n^2}{\gamma_2}$, $b_n = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} + \kappa_1 \lambda_n^2$, $c_n = \lambda_n^2 \left(\dfrac{\kappa_1 + \gamma_1 \kappa_2}{\gamma_2} + \kappa_1 \kappa_2 \lambda_n^2 \right)$,
$\bar{\hat{p}}_n(s)$ — образ Лапласа функции $\hat{p}_n(t)$.

Переход к оригиналам в соотношении (48) осуществляется на основании следующей формулы обращения из [18]:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\rho-1}}{s^\alpha + a s^\beta + b s^\gamma + c} \right\} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \sum_{m=0}^{r} \binom{r}{m} a^m b^{r-m} t^{(\alpha-\gamma)r + (\gamma-\beta)m + \alpha - \rho} \times$$

$$\times E_{\alpha, (\alpha-\gamma)r + (\gamma-\beta)m + \alpha - \rho + 1}^{r+1} (-c t^\alpha), \left(\operatorname{Re}(\alpha, \beta, \gamma, s, \rho) > 0, \; \left| \frac{a s^\beta + b s^\gamma}{s^\alpha + c} \right| < 1 \right), \tag{49}$$

где $E_{\beta,\gamma}^{\delta}(\cdot)$ — трехпараметрическая функция Миттаг–Леффлера [13], $\dbinom{r}{m} = \dfrac{r!}{m!(r-m)!}$.

Из (48) с учетом соотношения (49) после соответствующих преобразований находим

$$\hat{p}_n(t) = \nu_n \sum_{r=0}^{\infty} \Phi_{rn}^{(\alpha,\beta)}(t), \tag{50}$$

где обозначено

$$\Phi_{rn}^{(\alpha,\beta)}(t) = (-1)^r \sum_{m=0}^{r} \binom{r}{m} a_n^m b_n^{r-m} t^{\alpha r + (\beta-\alpha)m} \Omega_{rnm}^{(\alpha,\beta)}(t),$$

$$\Omega_{rnm}^{(\alpha,\beta)}(t) = E_{\alpha+\beta, \alpha r + (\beta-\alpha)m + 1}^{r+1} (-c_n t^{\alpha+\beta}) + a_n t^\beta E_{\alpha+\beta, \alpha r + (\beta-\alpha)m + \beta + 1}^{r+1} (-c_n t^{\alpha+\beta}) +$$

$$+ b_n t^\alpha E_{\alpha+\beta, \alpha r + (\beta-\alpha)m + \alpha + 1}^{r+1} (-c_n t^{\alpha+\beta}).$$

После перехода в (50) в область оригиналов по переменной x получаем соотношение для давления

$$p(x,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \nu_n \Phi_{rn}^{(\alpha,\beta)}(t) \sin(\lambda_n x). \tag{51}$$

Последнее соотношение представляет собой искомое решение рассматриваемой задачи при условии сходимости соответствующих рядов.

Из (51) при $\alpha = \beta$ и $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ получаем решение соответствующей краевой задачи для уравнения (42) в виде

$$p(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \nu_n \Phi_{rn}^{(\alpha)}(t) \sin(\lambda_n x),$$

где обозначено

$$\Phi_{rn}^{(\alpha)}(t) = (-1)^r (\widetilde{a}_n + \widetilde{b}_n)^r t^{\alpha r} \Omega_{rn}^{(\alpha)}(t),$$

$$\Omega_{rn}^{(\alpha)}(t) = E_{2\alpha, \alpha r+1}^{r+1}(-\widetilde{c}_n t^{2\alpha}) + (\widetilde{a}_n + \widetilde{b}_n) t^{\alpha} E_{2\alpha, \alpha r+\alpha+1}^{r+1}(-\widetilde{c}_n t^{2\alpha}),$$

$$\widetilde{a}_n = \frac{1+\kappa\lambda_n^2}{\gamma_2}, \; \widetilde{b}_n = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} + \kappa\lambda_n^2, \; \widetilde{c}_n = \lambda_n^2 \left(\frac{\kappa(1+\gamma_1)}{\gamma_2} + \kappa^2 \lambda_n^2 \right).$$

Отметим, что аналогично изложенному ранее можно сформулировать дробно-дифференциальный аналог двухтемпературной математической модели термомеханики бинарных систем (в рамках классических постановок такие модели рассматривались, в частности, в [19]). При этом с точностью до обозначений искомых величин приходим к уравнениям вида (41) для абсолютных температур компонент.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье исследовано дробно-дифференциальное обобщение известного бипараболического эволюционного уравнения. Рассматриваемый аналог бипараболического уравнения предназначен для описания динамики тепловых и диффузионных процессов в условиях их временной неравновесности. В рамках изучаемой математической модели получены замкнутые решения ряда задач, в частности задачи типа Коши и краевой задачи для конечного промежутка. Предложена новая (дробно-дифференциальная) математическая модель для описания неравновесной динамики фильтрационных процессов в трещиновато-пористых средах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964. — 488 с.
2. Карташов Э.И. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. — М.: Высш. школа, 1979. — 415 с.
3. Лыков А.В. Тепломассообмен. — М.: Энергия, 1978. — 479 с.
4. Cattaneo G. Sur une forme de l’equation de la chaleur eleminat le paradoxe d’une propagation instantanee // Compte Rendus. — 1958. — **247**, N 4. — P. 431–433.
5. Фущич В.И., Галицын А.С., Полубинский А.С. О новой математической модели процессов теплопроводности // Укр. матем. журнал. — 1990. — **42**, №2. — С. 237–245.
6. Фущич В.И. О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики // Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. — С. 4–22.
7. Булавацький В.М. Біпараболічна математична модель процесу фільтраційної консолідації // Допов. НАН України, 1997. — № 8. — С. 13–17.
8. Bulavatsky V.M. Mathematical modeling of filtrational consolidation of soil under motion of saline solutions on the basis of biparabolic model // Journal of Automation and Information Science. — 2003. — **35**, № 8. — P.13–22.
9. Bulavatsky V.M., Skopetsky V.V. Generalized mathematical model of the dynamics of consolidation processes with relaxation // Cybernetics and systems analysis. — 2008. — **44**, N 5. — P. 646–654.

10. Podlubny I. Fractional differential equations. — New York: Academic Press, 1999. — 341 p.
11. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 523 p.
12. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1967. — 436 с
13. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag–Leffler functions, related topics and applications. — Berlin: Springer Verlag, 2014. — 454 p.
14. Povstenko Yu. Linear fractional diffusion-wave equation for scientists and engineers. — Springer Int. Publ. Switzerland, 2015. — 460 p.
15. Иванов П.Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. — М.: Высш. школа, 1991. — 447 с.
16. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. матем. и механика — 1960. — **24**, вып. 3. — С. 852–864.
17. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. — М.: Недра, 1984. — 211 с.
18. Saxena R.K., Mathai F.M., Haubold H.J. Solutions of fractional reaction–diffusion equations in terms of the Mittag–Leffler functions // Intern. Journ. Scient. Research. — 2006. — **15**. — P. 1–17.
19. Бурак Я.Й., Чапля Є.Я. Континуальні моделі нелінійної термомеханіки бінарних систем // Фіз.-хім. мех. матеріалів. — 1995. — № 4. — С. 7–15.

Надійшла до редакції 16.02.2016

В.М. Булавацький

ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНИЙ АНАЛОГ БІПАРАБОЛІЧНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ТА ДЕЯКІ ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Анотація. Досліджено дробово-диференційний аналог відомого біпараболічного еволюційного рівняння, призначеного для опису динаміки процесів тепломасопереносу за умов їхньої часової нерівноважності. Одержано замкнені розв’язки низки задач, зокрема задачі типу Коші та крайової задачі для скінченного проміжку. Запропоновано нову (дробово-диференційну) математичну модель для опису нерівноважної динаміки фільтраційних процесів у тріщинувато-пористих середовищах.

Ключові слова: біпараболічне еволюційне рівняння, дробово-диференційний аналог, фундаментальний розв'язок, одномірна задача типу Коші, крайова задача на кінцевому проміжку, математичне моделювання дробово-диференційної динаміки фільтраційних процесів, некласичні моделі.

V.M. Bulavatsky

FRACTIONAL DIFFERENTIAL ANALOG OF BIPARABOLIC EVOLUTION EQUATION AND SOME ITS APPLICATIONS

Abstract. The authors analyze the fractional differential analog of the well-known biparabolic evolution equation intended to describe the dynamics of heat and mass transfer processes in terms of their non-equilibrium in time. Closed solution of some problems, in particular, the problem of Cauchy type and boundary-value problem for a finite interval, are obtained. A new (fractional differential) mathematical model is proposed to describe the non-equilibrium dynamics of filtrational processes in fractured porous media.

Keywords: biparabolic evolution equation, fractional-differential analog, fundamental solution, Cauchy-type one-dimensional problem, boundary value problem on a finite interval, mathematical modeling of fractional-differential dynamics of filtration processes, non-classical models.

Булавацкий Владимир Михайлович,
профессор, доктор техн. наук, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: v_bulav@ukr.net.