УДК 519.17

З.А. ШЕРМАН

КВАДРАТНАЯ РАЗНОСТНАЯ РАЗМЕТКА НЕКОТОРЫХ ГРАФОВ

Аннотация. Рассмотрены методы построения квадратной разностной разметки цикла-кактуса $C_m^{(n)}$, одноточечного соединения n копий цикла C_m и n копий цепи P_2, одноточечного соединения n копий цикла C_m и цепи P_{n+1}, а также дизъюнктивного объединения одноточечного соединения n копий цикла C_m с цепью P_n.

Ключевые слова: квадратная разностная разметка, квадратный разностный граф, одноточечное соединение циклов.

ВВЕДЕНИЕ

Разметка графа — одна из наиболее известных проблем в теории графов. Она заключается в назначении вершинам или ребрам графа целых чисел по некоторым условиям. Большинство разметок графа основаны на грациозной разметке и представлены в динамическом обзоре Гальяна [1]. В настоящей статье рассмотрена квадратная разностная разметка графа, которую впервые ввели Аджифа, Принси, Локеш и Ранжини в [2].

В работе [3] при исследовании теоремы Ферма–Эйлера о представлении простых чисел в виде суммы двух квадратов изучалась квадратная суммарная разметка и доказывалось ее существование для деревьев, циклов и других видов графов. Аналогично [3] в работе [2] введена квадратная разностная разметка графа и доказано, что такие классы графов, как цепи, звезды, циклы, дружественные графы $C_3^{(n)}$, K_n $(n \le 5)$ и $K_{n,m}$ $(m \le 4)$, треугольные змеи и $K_2 + mK_1$ имеют квадратную разностную разметку. Кроме того, предполагается, что каждый граф цикла-кактуса $C_m^{(n)}$ также имеет квадратную разностную разметку.

В настоящей статье доказана гипотеза, что граф цикла-кактуса $C_m^{(n)}$ имеет квадратную разностную разметку при нечетных значениях m, а также решена задача существования этой разметки для некоторых типов графов, состоящих из цепей и циклов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуем, существует ли квадратная разностная разметка у таких типов графов, как цикл-кактус $C_m^{(n)}$, одноточечное соединение n копий цикла C_m и n копий цепи P_2, одноточечное соединение n копий цикла C_m и цепи P_{n+1}, а также дизъюнктивное объединение одноточечного соединения n копий цикла C_m с цепью P_n.

Рассмотрим конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Пусть $G = (V, E)$ — граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Будем считать, что $|V(G)| = p$ и $|E(G)| = q$.

Определение 1 [2]. Функцию f называют квадратной разностной разметкой графа G с p вершинами, если f — биекция из $V(G)$ на множество $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ и индуцируемая ею реберная разметка $f^*(u, v) = |[f(u)]^2 - [f(v)]^2|$ является инъекцией из $E(G)$ в множество натуральных чисел.

Граф, допускающий квадратную разностную разметку, называется квадратным разностным графом или *SD*-графом.

Для графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ введем понятия одноточечного соединения и дизъюнктивного объединения.

Определение 2 [4]. Граф, полученный отождествлением произвольной вершины в каждом из заданных графов, называется одноточечным соединением.

Определение 3 [4]. Дизъюнктивным объединением графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называется граф $G = G_1 \bigcup G_2$ с множеством вершин $V = V_1 \bigcup V_2$ и множеством ребер $E = E_1 \bigcup E_2$, где $V_1 \bigcap V_2 = \varnothing$.

Определение 4 [2]. Граф, полученный одноточечным соединением n копий цикла C_m $(m \geq 3)$, называется циклом-кактусом и обозначается $C_m^{(n)}$.

Теорема 1 [5]. Разность квадратов последовательных чисел равна сумме этих чисел.

Теорема 2 [5]. Для всех натуральных чисел x, y выполняется $x^2 - y^2 \equiv 0, 1, 3 \pmod 4$.

Пусть f — квадратная разностная разметка графа G, порождающая реберную разметку f^*, тогда для каждого ребра uv из множества $E(G)$ выполняется следующее условие: $f^*(u, v) \equiv 0, 1, 3 \pmod 4$. Кроме того, если $f(u) = 0$, то $f^*(u, v) \equiv 0, 1 \pmod 4$.

КВАДРАТНАЯ РАЗНОСТНАЯ РАЗМЕТКА ЦИКЛА-КАКТУСА

Теорема 3. Цикл-кактус $C_m^{(n)}$ допускает квадратную разностную разметку для любых натуральных чисел n, m при $m \equiv 1 \pmod 2$ и $m \geq 3$.

Доказательство. Рассмотрим граф $C_m^{(n)}$ $(m \geq 3)$. Пусть копии всех циклов в графе $C_m^{(n)}$ имеют общую вершину u. Обозначим $V(C_m^i) = \{u, u_2^i, u_3^i, \ldots, u_m^i\}$ множество вершин цикла C_m^i, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Зададим вершинную разметку f следующим образом:

$$f(u) = 0,$$

$$f(u_j^i) = (m-1)(i-1) + j - 1,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Функция f задает отображение, ставящее каждой вершине в соответствие число из множества $\{0, 1, 2, \ldots, (m-1)n + 1\}$, и различным вершинам соответствуют разные числа. Таким образом, f — биективное отображение, которое порождает реберную разметку f^*. Для двух ребер каждого цикла, инцидентных вершине u, получим метки:

$$f^*(u, u_2^i) = |[f(u)]^2 - [f(u_2^i)]^2| = |0 - [f(u_2^i)]^2| = f^2(u_2^i), \tag{1}$$

$$f^*(u, u_m^i) = |[f(u)]^2 - [f(u_m^i)]^2| = |0 - [f(u_m^i)]^2| = f^2(u_m^i), \tag{2}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$. Метки ребер, вычисленные по формулам (1), (2), являются числами, сравнимыми с 0 и 1 по модулю 4 (согласно теореме 2), и образуют множество чисел

$$S_1 = \{1, (m-1)^2, m^2, (2m-2)^2, \ldots, ((n-1)(m-1)+1)^2, \ldots, (n(m-1))^2\}.$$

Для остальных ребер функция f^* примет вид

$$f^*(u_{j+1}^i, u_j^i) = |[f(u_{j+1}^i)]^2 - [f(u_j^i)]^2|, \quad (3)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда согласно теореме 1 получим

$$f^*(u_{j+1}^i, u_j^i) = f(u_{j+1}^i) + f(u_j^i). \quad (4)$$

Таким образом, метки, найденные по формуле (4), формируют множество чисел

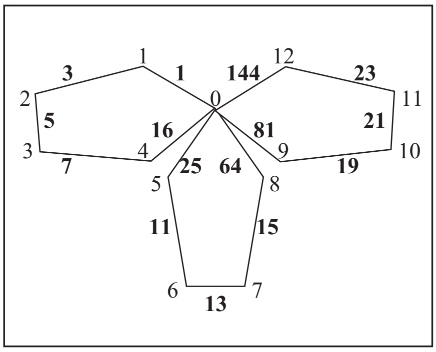

Рис. 1. Квадратная разностная разметка цикла-кактуса C_5^3

$$S_2 = \{3, 5, 7, \ldots, 2m-3,\ 2m+1,\ 2m+3, \ldots, 4m-5, \ldots,\ 2(m-1)(n-1)+3,$$
$$2(m-1)(n-1)+5, \ldots, 2(m-1)(n-1)+2m-3\}.$$

В результате проведенных вычислений образуется множество $S = S_1 \bigcup S_2 \subset N$, состоящее из различных чисел. Следовательно, функция f^* представляет собой инъекцию из $E(G)$ в множество натуральных чисел.

Разметка f для графа G согласно определению 1 является квадратной разностной разметкой.

Теорема доказана.

Для цикла-кактуса C_5^3 применим алгоритм построения разметки вершин, изложенный в теореме 3. Результаты работы агоритма представлены на рис. 1.

КВАДРАТНАЯ РАЗНОСТНАЯ РАЗМЕТКА ГРАФОВ СОЕДИНЕНИЙ ЦЕПЕЙ И ЦИКЛОВ

Теорема 4. Одноточечное соединение n копий цикла C_m и n копий цепи P_2 допускает квадратную разностную разметку для любого натурального n и любого четного m $(m \geq 4)$.

Доказательство. Рассмотрим граф G, представляющий собой одноточечное соединение n копий цикла C_m $(m \geq 4)$ и n копий цепи P_2. Все копии цикла C_m и цепи P_2 имеют общую вершину u. Обозначим $V(C_m^i) = \{u, u_2^i, u_3^i, \ldots, u_m^i\}$ множество вершин цикла C_m^i и $V(P_2^i) = \{u, v_i\}$ — множество вершин цепи P_2^i, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Проведем операции, аналогичные представленным в доказательстве теоремы 3. Зададим вершинную разметку f следующим образом:

$$f(u) = 0,$$

$$f(u_j^i) = m(i-1) + j - 1,$$

$$f(v_i) = mi,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Функция f задает биективное отображение из множества вершин на множество $\{0, 1, 2, \ldots, (m-1)n+1\}$. При этом ребрам графа G будут поставлены в соответствие числа:

$$f^*(u, u_2^i) = f^2(u_2^i), \quad (5)$$

$$f^*(u, u_m^i) = f^2(u_m^i), \quad (6)$$

$$f^*(u, v_i) = f^2(v_i), \tag{7}$$

$$f^*(u^i_{j+1}, u^i_j) = |[f(u^i_{j+1})]^2 - [f(u^i_j)]^2|, \tag{8}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n.$

Метки ребер, вычисленные по формулам (5), (6), образуют множество

$$S_1 = \{1, (m-1)^2, (m+1)^2, (2m-2)^2, \ldots, ((n-1)(m-1)+1)^2, (n(m-1))^2\}.$$

Множество $S_2 = \{m^2, (2m)^2, \ldots, (nm)^2\}$ состоит из меток ребер, полученных по формуле (7). Воспользуемся теоремой 1 и запишем метки ребер из (8) в виде

$$f^*(u^i_{j+1}, u^i_j) = f(u^i_{j+1}) + f(u^i_j),$$

в результате получим множество

$$S_3 = \{3, 5, 7, \ldots, 2m-3,\ 2m+3,\ 2m+5, \ldots, 4m-3, \ldots$$
$$\ldots, m(n-1)+3,\ m(n-1)+5, \ldots, 2m(n-1)-3\}.$$

Все метки ребер графа G различны и формируют множество $S = S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_3 \subset N$. Таким образом, отображение f^* представляет собой инъекцию из $E(G)$ в множество натуральных чисел. Согласно определению 1 разметка f является квадратной разностной разметкой для графа G.

Теорема доказана.

Для иллюстрации теоремы 4 рассмотрим граф $G = \langle 3C_4 : 3P_2 \rangle$ порядка 13. Выполним разметку вершин, как указано в доказательстве теоремы 4 (рис. 2), тогда множество меток вершин графа образует множество последовательных натуральных чисел, а множество меток ребер — множество различных натуральных чисел. Следовательно, $G = \langle 3C_4 : 3P_2 \rangle$ — квадратный разностный граф.

Теорема 5. Одноточечное соединение n копий цикла C_m и цепи P_{n+1} допускает квадратную разностную разметку для любого натурального n и любого четного m $(m \geq 4)$.

Доказательство. Рассмотрим граф G, представляющий собой одноточечное соединение n копий цикла C_m $(m \geq 4)$ и цепи P_{n+1}. Пусть все копии цикла C_m и цепь P_{n+1} в графе имеют общую вершину u. Обозначим $V(C^i_m) = \{u, u^i_2, u^i_3, \ldots, u^i_m\}$ множество вершин цикла C^i_m, где $i = 1, 2, \ldots, n$, и $V(P_{n+1}) = \{u, v_2, v_3, \ldots, v_{n+1}\}$ — множество вершин цепи. Зададим вершинную разметку f следующим образом:

$$f(u) = 0,$$

$$f(u^i_j) = m(i-1) + j - 1,$$

$$f(v_{i+1}) = mi,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n,$ $j = 1, 2, \ldots, m.$

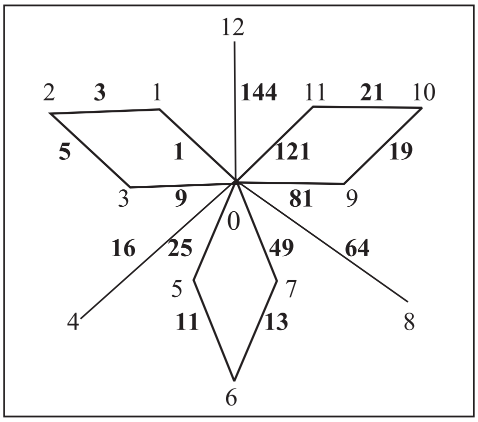

Рис. 2. Квадратная разностная разметка одноточечного соединения трех копий цикла C_4 и трех копий цепи P_2

Будем рассуждать аналогично доказательству теоремы 1. Тогда реберная разметка f^* отображает множество меток ребер в множество чисел $S = S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_3 \subset N$, где

$$S_1 = \{1, (m-1)^2, (m+1)^2, (2m-2)^2, \ldots, ((n-1)(m-1)+1)^2, (n(m-1))^2\},$$

$$S_2 = \{3, 5, 7, \ldots, 2m-3,\ 2m+3,\ 2m+5, \ldots, 4m-3, \ldots$$
$$\ldots, m(n-1)+3,\ m(n-1)+5, \ldots, 2m(n-1)-3\},$$

$$S_3 = \{m^2, 3m^2, 5m^2, \ldots, (2n+1)m^2\},$$

и является инъекцией. Следовательно, разметка f представляет собой квадратную разностную разметку графа G.

Теорема доказана.

Теорема 6. Граф G, полученный дизъюнктивным объединением одноточечного соединения n копий цикла C_m с цепью P_n, является квадратным разностным графом для любого натурального n и любого четного m $(m \geq 4)$.

Доказательство. Обозначим $V(C_m^i) = \{u, u_2^i, u_3^i, \ldots, u_m^i\}$ множество вершин цикла C_m^i, где $i = 1, 2, \ldots, n$, и $V(P_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — множество вершин цепи P_n. Зададим вершинную разметку f графа G:

$$f(u) = 0,$$

$$f(u_j^i) = m(i-1) + j - 1,$$

$$f(v_i) = mi,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m.$

Полученная разметка будет биекцией на множество $\{0, 1, 2, \ldots, (m-1)n+1\}$. Метки ребер, индуцируемые функцией f, для графа G различны и образуют множество $S = S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_3 \subset N$, где

$$S_1 = \{1, (m-1)^2, (m+1)^2, (2m-2)^2, \ldots, ((n-1)(m-1)+1)^2, (n(m-1))^2\},$$

$$S_2 = \{3, 5, 7, \ldots, 2m-3,\ 2m+3,\ 2m+5, \ldots, 4m-3, \ldots$$
$$\ldots, m(n-1)+3,\ m(n-1)+5, \ldots, 2m(n-1)-3\},$$

$$S_3 = \{3m^2, 5m^2, \ldots, (2n+1)m^2\}.$$

Согласно определению 1 разметка f является квадратной разностной разметкой для графа G. Следовательно G — квадратный разностный граф.

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье расширен класс квадратных разностных графов. Разработанные методы построения квадратной разностной разметки одноточечного соединения циклов C_m для любого нечетного m, одноточечного соединения n копий цикла C_m и n копий цепи P_2, а также дизъюнктивного объединения одноточечного соединения n копий цикла C_m с цепью P_n можно использовать в дальнейших теоретических исследованиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gallian J.A. A dynamic survey of graph labeling // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2014. — N DS6. — P. 1–384.

2. Ajitha V., Princy K.L., Lokesha V., Ranjini P.S. On square difference graphs // International Journal of Mathematical Combinatorics. — 2012. — **1**, N 1. — P. 31–40.
3. Ajitha. V., Arumugam S., Germina K.A. On square sum graphs // AKCE International Journal of Mathematical Combinatorics. — 2009. — **6**, N 1. — P. 1–10.
4. Harary F. Graph theory. — Reading (Massachusetts): Addison Wesley, 1969. — 274 p.
5. Telang S.G. Number theory. (Sixth edition). — New Delphi: McGRaw-Hill, 1996. — 420 p.

Надійшла до редакції 23.02.2016

З.О. Шерман

КВАДРАТНА РІЗНИЦЕВА РОЗМІТКА ДЕЯКИХ ГРАФІВ

Анотація. Розглянуто методи побудови квадратної різницевої розмітки циклу-кактуса $C_m^{(n)}$, одноточкового з'єднання n копій циклу C_m та n копій ланцюга P_2, одноточкового з'єднання n копій циклу C_m та ланцюга P_{n+1}, а також диз'юнктивного об'єднання одноточкового з'єднання n копій циклу C_m з ланцюгом P_n.

Ключові слова: квадратна різницева розмітка, квадратний різницевий граф, одноточкове з'єднання циклів.

Z.O. Sherman

SQUARE DIFFERENCE LABELING OF SOME GRAPHS

Abstract. The author considers some methods for constructing of square difference labeling of the cycle-cactus $C_m^{(n)}$; one-point connection of n-copies of cycle C_m and of n copies of path P_2; of one-point connection of n copies of cycle C_m and path P_{n+1}, as well as disjunctive union of one-point connection of n copies of cycle C_m with the path P_n.

Keywords: square difference labeling, square difference graph, one-point connection cycles.

Шерман Зоя Александровна,
аспирантка Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев,
e-mail: sherman.zoya@rambler.ru