УДК 539.3

Р. Е. Кочуров[*]
К. В. Аврамов[**], д-р. техн. наук

[*] Национальный технический университет «ХПИ»
(г. Харьков, E-mail: roman_kochurov@ukr.net)
[**] Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, E-mail: kvavr@kharkov.ua)

МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Исследованы модели с четырьмя степенями свободы, описывающие параметрические колебания цилиндрической оболочки при геометрически нелинейном деформировании. Динамика системы описывается уравнениями Доннелла–Муштари–Власова. Дискретизация проводится методом Бубнова–Галеркина. С помощью метода многих масштабов в области основного параметрического резонанса для всех моделей получены мягкие амплитудно-частотные характеристики параметрических колебаний.

Досліджені моделі з чотирма ступенями свободи, що описують параметричні коливання циліндричної оболонки при геометрично нелінійному деформуванні. Динаміка системи описується рівняннями Доннелла–Муштарі–Власова. Дискретизація проводиться методом Бубнова–Гальоркіна. За допомогою методу багатьох масштабів в області основного параметричного резонансу для всіх моделей отримані м'які амплітудно-частотні характеристики параметричних коливань.

Введение

Цилиндрические оболочки широко используются в аэрокосмической технике, энергетике, машиностроении и химическом машиностроении. В процессе эксплуатации цилиндрические оболочки часто находятся под действием продольных динамических нагрузок. Поэтому понятен интерес инженеров и исследователей к проблемам параметрических колебаний цилиндрических оболочек.

Некоторые вопросы параметрических колебаний цилиндрических оболочек при их геометрически нелинейном деформировании рассматриваются в монографиях [1–4]. В статье [5] исследуется динамическая неустойчивость консольной цилиндрической оболочки, которая находится под действием сейсмического возбуждения. Ковал [6] исследовал взаимодействие продольных, изгибных и крутильных колебаний цилиндрической оболочки, которое возбуждается параметрической нагрузкой. В статье рассмотрены колебания в области основного параметрического и комбинационного резонансов. В работе [7] уравнения Доннелла–Муштари–Власова используются в анализе параметрических колебаний цилиндрических оболочек. Исследуется влияние осесимметричных форм колебаний на области динамической неустойчивости. Ковальчук и Краснопольская [8] исследовали влияние начальных несовершенств на области динамической неустойчивости шарнирно-опертых цилиндрических оболочек.

В данной статье представлены три модели с конечным числом степеней свободы, которые соответствуют различным видам волнообразования в цилиндрической оболочке. Показано, что эти модели описываются одной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с различными численными значениями коэффициентов. Исследуются амплитудно-частотные характеристики в области основного параметрического резонанса.

Постановка задачи

Рассмотрим идеально цилиндрическую оболочку, шарнирно-опертую на торцевых сечениях. Оболочка является тонкой. Поэтому пренебрежем сдвигом, инерцией вращения и продольной инерцией оболочки. Рассмотрим геометрически нелинейное деформирование оболочки; исследуем малые деформации и умеренные перемещения. Тогда связь между напряжениями и деформациями удовлетворяет закону Гука. В этом случае колебания оболочки описываются уравнениями Доннела–Муштари–Власова [1]

$$D\nabla^4 w+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{1}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{R^2\partial y^2}-2\frac{\partial^2 w}{R\partial x\partial y}\frac{\partial^2 F}{R\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{R^2\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x}\right);$$
$$\frac{1}{Eh}\nabla^4 F=-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left[\left(\frac{\partial^2 w}{R\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{R^2\partial y^2}\right], \qquad (1)$$

где $D=Eh^3(1-\mu^2)^{-1}/12$ − цилиндрическая жесткость оболочки; ρ − плотность материала оболочки; h, R − толщина и радиус оболочки; w − радиальные перемещения точек срединной поверхности оболочки; x, y − продольная и окружная координаты (рис. 1); F − функция напряжений; E, μ − модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Пусть оболочка испытывает действие равномерно распределенных по торцам периодических во времени усилий осевого сжатия вида $N_x(t)=N_1\cos 2\nu t$, $N_1=\mathrm{const}>0$ (рис. 1).

Исследуем колебания оболочки в области основного параметрического резонанса. В этом случае преобладают колебания по одной резонансной собственной форме. Поэтому в аппроксимирующем выражении для прогиба ограничимся только одной парой сопряженных собственных форм. Динамический прогиб оболочки w представим так [3, 4]:

$$w=f_1(t)\cos(sy)\sin(rx)+f_2(t)\sin(sy)\sin(rx)+f_3(t)\sin^2(rx)+f_4(t), \qquad (2)$$

где $s=n/R$; $r=m\pi/L$; n – число волн в окружном направлении; m – число полуволн вдоль образующей; $f_1(t),\ \ldots, f_4(t)$ – обобщенные координаты оболочки. Сопряженные собственные формы $f_1\cos(sy)\sin(rx)$, $f_2\sin(sy)\sin(rx)$ имеют одинаковые собственные частоты. Поэтому они часто возбуждаются совместно. Взаимодействие сопряженных форм может привести к возбуждению бегущей волны в цилиндрической оболочке. Функция $f_3\sin^2(rx)$ не является собственной формой колебаний оболочки, а отражает экспериментально установленный факт: прогибы оболочки относительно срединной поверхности к центру кривизны значительно превышают прогибы вдоль внешней нормали. Слагаемое f_4 описывает радиальные перемещения точек, принадлежащих торцевым сечениям оболочки. Это слагаемое не зависит от окружной координаты y, то есть предполагается, что торцевые сечения при колебаниях оболочки могут «дышать» [3]. Отметим, что граничное условие $M_x=0$ для прогиба (2) не удовлетворяется. Однако это обстоятельство практически не влияет на колебания оболочки [3, 4].

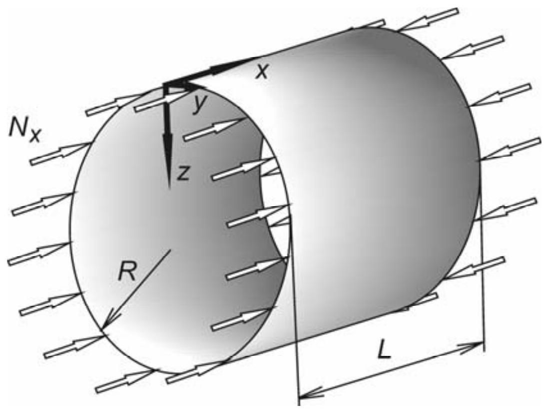

Рис. 1. Эскиз оболочки

Рассмотрим другие аппроксимации прогиба оболочки. Прогиб оболочки, удовлетворяющий всем краевым условиям, можно представить так:

$$w=f_1\cos(sy)\sin(rx)+f_2\sin(sy)\sin(rx)+f_3\sin^4(rx)+f_4. \qquad (3)$$

В работах [9, 10] для аппроксимации прогиба оболочки используется следующее разложение:

$$w=f_1\cos(sy)\sin(rx)+f_2\sin(sy)\sin(rx)+f_3\sin(r_1x)+f_4\sin(r_2x), \qquad (4)$$

где $r_1=m_1\pi/L$; $r_2=m_2\pi/L$; m_1, m_2 – число полуволн вдоль образующей. В работах [9, 10] показано, что при использовании разложения (4) результаты численного анализа колебаний оболочки совпадают с экспериментальными данными.

Дискретные модели колебаний

Функция напряжений F является решением второго уравнения системы (1). Для его решения одно из разложений (2)–(4) вводится в это уравнение. В результате получаем линейные уравнения в частных производных относительно функции напряжения F. Подчеркнем, что правые части этих уравнений будут различны; они зависят от разложения (2)–(4). Решения таких уравнений представим в виде

$$F = F_h + F_p, \tag{5}$$

где F_h – общее решение однородного уравнения; F_p – частное решение неоднородного уравнения. Общее решение второго уравнения системы (1) F_h определяется с использованием условия периодичности окружных перемещений [3]. Для разложений (2)–(4) эти решения запишем так:

$$F_h = \frac{E}{16}\sum_{i=1}^{2} s_i f_i^2 x^2 - \frac{1}{2}\mu N_x x^2 - \frac{1}{2} N_x y^2 - E\vartheta_1 f_3 x^2 - \frac{E}{R}\vartheta_2 f_4 x^2 . \tag{6}$$

Для разложений (2)–(4) параметры ϑ_1 и ϑ_1 принимают соответственно следующие значения:

$$(\vartheta_1;\vartheta_2) = \left(\frac{1}{4R};\frac{1}{2}\right); \qquad (\vartheta_1;\vartheta_2) = \left(\frac{3}{16R};\frac{1}{2}\right); \qquad (\vartheta_1;\vartheta_2) = \left(\frac{1}{RLr_1};\frac{1}{Lr_2}\right) .$$

Частные решения F_p для разложений (2)–(4) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\quad F_p^{(1)} = F_1^{(1)}\cos 2rx + F_3^{(1)}\cos 2sy + F_4^{(1)}\sin 2sy + \\
&\quad + F_5^{(1)}\cos sy \sin rx + F_6^{(1)}\sin sy \sin rx + F_7^{(1)}\cos sy \sin 3rx + F_8^{(1)}\sin sy \sin 3rx. \\
&\text{б)}\quad F_p^{(2)} = F_1^{(2)}\cos 2rx + F_2^{(2)}\cos 4rx + F_3^{(2)}\cos 2sy + F_4^{(2)}\sin 2sy + \\
&\quad + F_5^{(2)}\cos sy \sin rx + F_6^{(2)}\sin sy \sin rx + F_7^{(2)}\cos sy \sin 3rx + F_8^{(2)}\sin sy \sin 3rx. \\
&\text{в)}\quad F_p^{(3)} = F_1^{(3)}\cos 2rx + F_3^{(3)}\cos 2sy + F_4^{(3)}\sin 2sy + F_5^{(3)}\cos sy \sin rx + F_6^{(3)}\sin sy \sin rx + \\
&\quad + F_7^{(3)}\cos sy \cos(r-r_1)x + F_8^{(3)}\cos sy \cos(r+r_1)x + F_9^{(3)}\sin sy \cos(r-r_1)x + \\
&\quad + F_{10}^{(3)}\sin sy \cos(r+r_1)x + F_{11}^{(3)}\cos sy \cos(r-r_2)x + F_{12}^{(3)}\cos sy \cos(r+r_2)x + \\
&\quad + F_{13}^{(3)}\sin sy \cos(r-r_2)x + F_{14}^{(3)}\sin sy \cos(r+r_2)x + F_{15}^{(3)}\sin r_1 x + F_{16}^{(3)}\sin r_2 x.
\end{aligned} \tag{7}$$

Решения (7) а), б) и в) соответствуют разложениям (2), (3) и (4).

Каждая из функций напряжений (7) вводится в первое уравнение системы (1). К полученным уравнениям применяется метод Бубнова–Галеркина. В результате получаем системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающие колебания оболочек. Все эти системы одинаковые. У них разнятся лишь численные значения коэффициентов. К полученной системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений применим следующую замену переменных: $\tilde{t} = \omega_0 t$; $\tilde{f}_i(t) = h^{-1} f_i(t)$. В результате получим динамическую систему

$$\ddot{f}_i + \omega_i^2 f_i + f_i\left(\gamma_{i1} f_1^2 + \gamma_{i2} f_2^2\right) + \lambda_{i,3} f_i f_3 + \lambda_{i,4} f_i f_4 + \chi_i N_x f_i = 0, \quad i = 1,2; \tag{8}$$

$$\ddot{f}_3 + \omega_3^2 f_3 + \tilde{\omega}_3^2 f_4 + \gamma_{31} f_1^2 + \gamma_{32} f_2^2 = 0; \tag{9}$$

$$\ddot{f}_4 + \omega_4^2 f_4 + \tilde{\omega}_4^2 f_3 + \gamma_{41} f_1^2 + \gamma_{42} f_2^2 = 0. \tag{10}$$

Величины γ_{ik}, λ_{ik}, χ_i зависят от вида разложения (2), (3) и (4) и от параметров оболочки. Они здесь не приводятся для краткости.

Частоты ω_3, ω_4 значительно больше частот ω_1, ω_2. Поэтому при анализе уравнений (9), (10) предполагается, что $\ddot{f}_3 = 0$, $\ddot{f}_4 = 0$. Из уравнений (9), (10) получаем связь между обобщенными координатами

$$f_3 = \left(\tilde{\omega}_3 \sum_{i=1}^{2} \gamma_{4i}^{(j)} f_i^2 - \omega_4 \sum_{i=1}^{2} \gamma_{3i}^{(j)} f_i^2 \right) \eta^{-1}; \qquad f_4 = \left(\omega_3 \sum_{i=1}^{2} \gamma_{3i}^{(j)} f_i^2 - \tilde{\omega}_4 \sum_{i=1}^{2} \gamma_{4i} f_i^2 \right) \eta^{-1}, \tag{11}$$

где $\eta = \tilde{\omega}_3 \tilde{\omega}_4 - \omega_3 \omega_4$.

Уравнения (11) введем в (8). В полученную систему добавим слагаемые, описывающие линейное демпфирование в системе. Так как вклад нелинейных слагаемых в упругость оболочки значительно меньший в сравнении с линейными слагаемыми, в систему (8) можно ввести малый параметр. Тогда уравнения, описывающие параметрические колебания оболочки, примут следующий вид:

$$\ddot{f}_i + \omega_i^2 f_i + \varepsilon \left[\xi_i \dot{f}_i + f_i \left(\eta_{i1} f_1^2 + \eta_{i2} f_2^2 + \eta_{i3} \left(f_1^4 + 2 f_1^2 f_2^2 + f_2^4 \right) \right) + \chi_i N_x f_i \right] = 0; \tag{12}$$

где $i = 1, 2$; $0 < \varepsilon << 1$; $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 1$. Остальные параметры системы (12) не приводятся для краткости изложения.

Асимптотический анализ дискретной модели

Для исследования динамики систем (12) воспользуемся методом многих масштабов [11]. Решение представим так:

$$f_j(t, \varepsilon) = f_j^{(0)}(T_0, T_1, \ldots) + \varepsilon f_j^{(1)}(T_0, T_1, \ldots) + \ldots, \qquad j = 1,2, \tag{13}$$

где $T_0 = t$; $T_1 = \varepsilon t$. Асимптотические разложения (13) введем в уравнения (12) и, приравнивая слагаемые при ε^0, ε^1; получим

$$\frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial T_0^2} + \omega_i^2 f_i^{(0)} = 0; \tag{14}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 f_i^{(1)}}{\partial T_0^2} + \omega_i^2 f_i^{(1)} = -2 \frac{\partial^2 f_i^{(0)}}{\partial T_0 \partial T_1} - \mu_i \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial T_0} - \\ f_i^{(0)} \left(\eta_{i1} f_1^{(0)2} + \eta_{i2} f_2^{(0)2} + \eta_{i3} f_1^{(0)4} + 2\eta_{i3} f_1^{(0)2} f_2^{(0)2} + \eta_{i3} f_2^{(0)4} \right) - \\ - \chi_i f_i^{(0)} N_1 \cos(\Omega T_0), \qquad i = 1,2; \quad j = 1,2,3. \end{gathered} \tag{15}$$

Рассмотрим колебания в области основного параметрического резонанса

$$2\nu = 2\omega_1 + \varepsilon\delta, \tag{16}$$

где δ – параметр расстройки. Тогда из уравнений (14) имеем

$$f_j^{(0)}(T_0, T_1) = A_j(T_1) \exp(i\omega_j T_0) + \bar{A}_j(T_1) \exp(-i\omega_j T_0), \qquad j = 1,2. \tag{17}$$

Введем (17) в (15) и приравняем нулю секулярные члены. Получим систему модуляционных уравнений относительно A_1, A_2

$$\begin{gathered} 2i\omega_1 A_1' + i\xi_1 \omega_1 A_1 + 3\eta_{11} A_1^2 \bar{A}_1 + \eta_{12} A_2^2 \bar{A}_1 + 2\eta_{12} A_1 A_2 \bar{A}_2 + 0.5\chi_1 N_1 A_1 \exp(\varepsilon i t \delta) + \\ + \eta_{13} \left(10 A_1^3 \bar{A}_1^2 + 2 A_1^3 \bar{A}_2^2 + 12 A_1^2 A_2 \bar{A}_1 \bar{A}_2 + 6 A_1 A_2^2 \bar{A}_1^2 + 6 A_1 A_2^2 \bar{A}_2^2 + 4 A_2^3 \bar{A}_1 \bar{A}_2 \right) = 0; \\ 2i\omega_2 A_2' + i\xi_2 \omega_2 A_2 + 3\eta_{22} A_2^2 \bar{A}_2 + \eta_{21} A_1^2 \bar{A}_2 + 2\eta_{21} A_2 A_1 \bar{A}_1 + 0{,}5\chi_2 N_1 A_2 \exp(\varepsilon i t \delta) + \\ + \eta_{23} \left(10 A_2^3 \bar{A}_2^2 + 2 A_2^3 \bar{A}_1^2 + 12 A_2^2 A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_1 + 6 A_2 A_1^2 \bar{A}_2^2 + 6 A_2 A_1^2 \bar{A}_1^2 + 4 A_1^3 \bar{A}_2 \bar{A}_1 \right) = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Систему (18) запишем относительно полярных координат $a_k(T_1)$, $\alpha_k(T_1)$

$$A_k(T_1) = \frac{1}{2} a_k(T_1) \exp\left[i\alpha_k(T_1) \right], \qquad k = 1,2. \tag{19}$$

Соотношения (19) введем в (18) и разделим действительные и мнимые части. В результате получим следующие системы модуляционных уравнений:

$$\dot{a}_1\omega_1 + \frac{1}{2}\xi_1\omega_1 a_1 + \frac{1}{8}\left(\eta_{12}a_1 a_2^2 + \eta_{13}a_1 a_2^4 + \eta_{13}a_1^3 a_2^2 + \right)\sin(\varphi-\psi) + \frac{1}{4}\chi_1 N_1 a_1 \sin\varphi = 0\,;$$
$$\dot{a}_2\omega_2 + \frac{1}{2}\xi_2\omega_2 a_2 - \frac{1}{8}\left(\eta_{21}a_2 a_1^2 + \eta_{23}a_2 a_1^4 + \eta_{23}a_2^3 a_1^2 + \right)\sin(\varphi-\psi) + \frac{1}{4}\chi_2 N_1 a_2 \sin\psi = 0\,;$$
$$\dot{\varphi}\omega_1 a_1 - \frac{1}{2}\delta\omega_1 a_1 + \frac{3}{8}\eta_{11}a_1^3 + \frac{1}{4}\eta_{12}a_1 a_2^2 + \frac{5}{16}\eta_{13}a_1^5 + \frac{3}{8}\eta_{13}a_1^3 a_2^2 + \frac{3}{16}\eta_{13}a_1 a_2^4 +$$
$$+\left(\frac{1}{8}\eta_{12}a_1 a_2^2 + \frac{1}{4}\eta_{13}a_1^3 a_2^2 + \frac{1}{8}\eta_{13}a_1 a_2^4\right)\cos(\varphi-\psi) + \frac{1}{4}\chi_1 N_1 a_1 \cos\varphi = 0\,; \tag{20}$$
$$\dot{\psi}\omega_2 a_2 - \frac{1}{2}\delta\omega_2 a_2 + \frac{3}{8}\eta_{22}a_2^3 + \frac{1}{4}\eta_{21}a_2 a_1^2 + \frac{5}{16}\eta_{23}a_2^5 + \frac{3}{8}\eta_{23}a_2^3 a_1^2 + \frac{3}{16}\eta_{23}a_2 a_1^4 +$$
$$+\left(\frac{1}{8}\eta_{21}a_2 a_1^2 + \frac{1}{4}\eta_{23}a_2^3 a_1^2 + \frac{1}{8}\eta_{23}a_2 a_1^4\right)\cos(\varphi-\psi) + \frac{1}{4}\chi_2 N_1 a_2 \cos\psi = 0\,,$$

где $\varphi = T_1\delta - 2\alpha_1$, $\psi = T_1\delta - 2\alpha_2$.

Состояния равновесия динамической системы (20) соответствуют периодическим колебаниям механической системы (12). Эти состояния удовлетворяют уравнениям $\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = \dot{\varphi} = \dot{\psi} = 0$ и описываются системой нелинейных алгебраических уравнений, которые выводятся из (20). Для получения амплитудно-частотной характеристики периодических колебаний параметр расстройки δ задается с некоторым шагом. Для каждого значения δ величины a_1, a_2, φ, ψ определяются численным решением системы нелинейных алгебраических уравнений методом Ньютона. Подробно исследуем следующие два вида решений системы:

$$a_1 \neq 0,\quad a_2 = 0,\quad \varphi \neq 0,\quad \psi \neq 0, \tag{21}$$

$$a_1 = a_2 \neq 0,\quad \varphi = \psi \neq 0. \tag{22}$$

Решения (21) описывают движение оболочки с одной активной модой из двух сопряженных форм колебаний ($f_1 \neq 0$; $f_2 \neq 0$) (2)–(4). Решения (22) описывают движение на нелинейных нормальных формах $f_1 = \pm f_2$, которые являются прямыми линиями в конфигурационном пространстве динамической системы (12).

Исследуем устойчивость полученных движений. Для этого систему модуляционных уравнений (18) преобразуем к декартовым координатам, используя замену переменных.

$$A_j(T_1) = [x_j(T_1) + iy_j(T_1)]\exp(0{,}5i\delta T i_1),\quad j = 1, 2. \tag{23}$$

Систему (20) в декартовых координатах можно представить так:

$$x_i' = -\frac{1}{2}\xi_i x_i + \frac{1}{2}\delta y_i + \frac{1}{4}\chi_i\omega_i^{-1}N_1 y_i + X_i(x_1, y_1, x_2, y_2)\,;$$
$$y_i' = -\frac{1}{2}\xi_i y_i - \frac{1}{2}\delta x_i + \frac{1}{4}\chi_i\omega_i^{-1}N_1 y_i + Y_i(x_1, y_1, x_2, y_2)\,;\qquad i = 1{,}2, \tag{24}$$

где X_i, Y_i – нелинейные функции, которые не приводятся для краткости. Для исследования устойчивости из системы (24) выводится система уравнений в вариациях. На основании этой системы анализируется устойчивость состояний равновесия.

Численный анализ колебаний

В дальнейшем рассмотрим оболочку со следующими численными значениями параметров [12]: $h = 0{,}002$ м; $L = 0{,}4$ м; $R = 0{,}2$ м; $E = 2{,}1\cdot10^{11}$ Н/м^2; $\mu = 0{,}3$; $\rho = 7850$ кг/м^3; $\xi_1 = \xi_2 = 0{,}01$; $\varepsilon = 0{,}01$; $N_1 = 0{,}4N_{cr}$; $N_{cr} = 2{,}54\cdot10^6$ Н/м, где N_{cr} – значение продольной сжимающей нагрузки, при которой происходит потеря статической устойчивости оболочки. В

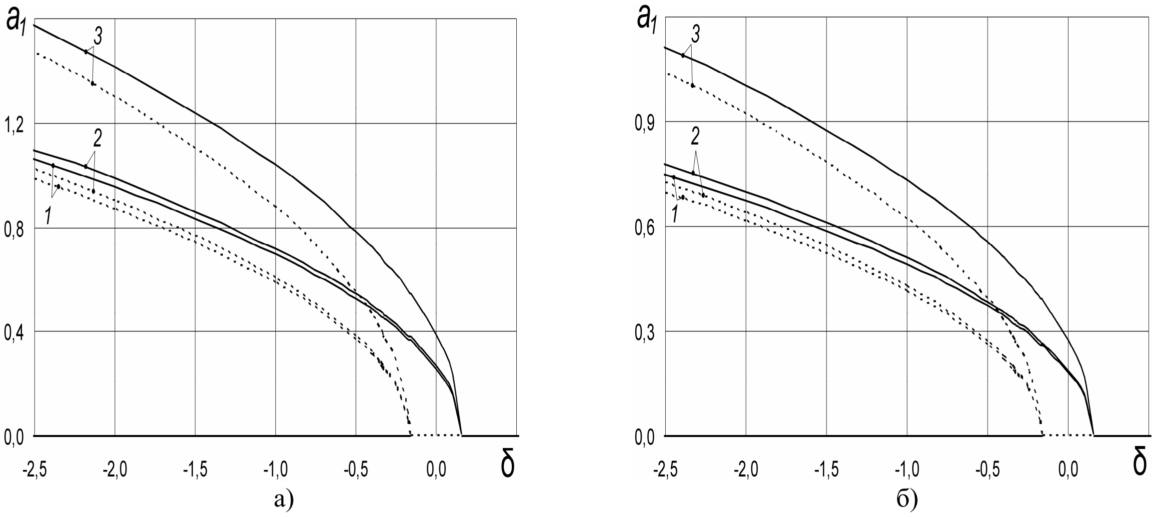

Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики системы:
а) – (21); б) – (22)

расчетах параметры волнообразования принимались следующими: $n = 5$; $m = m_1 = 1$; $m_2 = 3$. Первая собственная частота колебаний оболочки принимает значение $\omega_0 = 3165{,}03$ рад/с. Эта частота описывает форму с одной полуволной в продольном направлении и пятью волнами по окружной координате.

Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ), выражающие зависимость амплитуд колебаний a_1 от параметра расстройки частот δ, приведены на рис. 2. АЧХ (рис. 2, а) описывают стоячие волны в цилиндрических оболочках, которые характеризуются решениями (21). В этом случае в движении участвует только одна из двух сопряженных форм колебаний. На рис. 2, б показаны АЧХ, которые описывают движения, соответствующие решениям (22). Такие движения отвечают режимам бегущих волн. Ветви АЧХ, описывающие динамику оболочки в виде (2)–(4), обозначаются цифрами 1–3 на рис. 2 соответственно. Устойчивые движения показаны на рис. 2 сплошной линией, а неустойчивые – пунктирной.

Для подтверждения результатов аналитического анализа проводилось прямое численное интегрирование систем (12) при различных значениях частот гармонического воздействия ν. На рис. 3 представлены зависимости $f_1(t)$ для различных видов волнообразования. Здесь использовались начальные условия, которые соответствуют точке АЧХ (рис. 2, а) при $\delta = -0{,}3$. Сплошной линией показано аналитическое решение, полученное методом многих масштабов, а точками представлены результаты прямого численного интегрирования

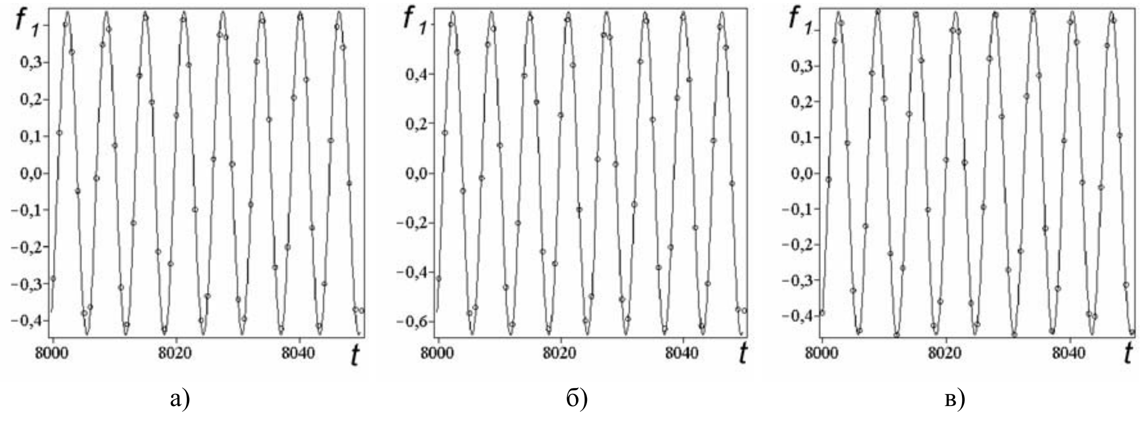

Рис. 3. Результаты прямого численного интегрирования для следующих моделей:
а) – (2); б) – (3); в) – (4);

систем (12). Эти результаты свидетельствуют об очень хорошем совпадении результатов прямого численного интегрирования с данными метода многих масштабов.

Выводы

В статье исследованы три модели с четырьмя степенями свободы, описывающие параметрические колебания цилиндрической оболочки при геометрически нелинейном деформировании. Полученные в результате дискретизации динамические модели с двумя степенями свободы, описывающие нелинейные параметрические колебания, имеют одинаковый вид для всех трех моделей. Амплитудно-частотные характеристики параметрических колебаний цилиндрических оболочек в области основного параметрического резонанса являются мягкими для всех дискретных моделей, что качественно согласуется с экспериментальными результатами, представленными в литературе. Результаты численного интегрирования совпадают с данными, полученными методом многих масштабов.

Литература

1. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 423 с.
2. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М: Гостехиздат, 1956.
3. *Кубенко В. Д.* Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук, Т. С. Краснопольская. − Киев: Наук. думка, 1984. − 218 с.
4. *Кубенко В. Д.* Нелинейные колебания цилиндрических оболочек / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук, Н. П. Подчасов. − Киев: Выща шк., 1989. − 207 с.
5. *Vijayaraghavan A.* Parametric instability of circular cylindrical shells / A. Vijayaraghavan, R. M. Evan-Iwanowski // Trans. ASME. J. Appl. Mech. E. – 1967. – **34**. – P. 985–990.
6. *Koval L. R.* Effect of longitudinal resonance on the parametric stability of an axially excited cylindrical shell // J. Acoustic Soc. America. – 1974. – **55**. – P. 91–97.
7. *Nagai K.* Dynamic stability of circular cylindrical shells under periodic compressive forces / K. Nagai, N. Yamaki // J. Sound and Vibration. – 1978 – **58**. – P. 425–441.
8. *Ковальчук П. С.* О резонансных явлениях при нелинейных колебаниях цилиндрических оболочек с начальными несовершенствами / П. С. Ковальчук, Т. С. Краснопольская // Прикл. механика. – 1979. – **15**, № 9. – С. 100–107.
9. *Pellicano F.* Stability and vibration of empty and fluid-fillet circular cylindrical shells under static and periodic axial loads / F. Pellicano, M. Amabili // Intern. J. Solid and Structures. – 2003. – **40**. − P. 3229–3251.
10. *Pellicano F.* Effect of the geometry on the nonlinear vibrations analysis of circular cylindrical shells / F. Pellicano, M. Amabili, M. P. Païdoussis // Intern. J. Non-Linear Mech. – 2002. – 37. – P. 1181–1198.
11. *Nayfeh A. H.* Nonlinear Oscillations / A. H. Nayfeh, D. T. Mook. – New York: Wiley, 1988. – 655 p.
12. *Gonçalves P. B.* Nonlinear Oscillations and Stability of Parametrically Excited Cylindrical Shells / P. B. Gonçalves, Z. J. G. N. Del Prado // Meccanica. – 2002. − **36**. − P. 105–116.

Поступила в редакцию
1.02.10