УДК 629.78

О. Л. ВОЛОШЕНЮК

ОБ ОЦЕНКЕ АДЕКВАТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ КОСМИЧЕСКОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ КОНЦЕВЫХ ТЕЛ, СТАБИЛИЗИРОВАННОЙ ВРАЩЕНИЕМ

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины,
ул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Днепр, Украина; e-mail: oksana.dnepr@gmail.com

Цель работы заключается в оценке адекватности математического моделирования динамики космической тросовой системы (КТС) двух концевых тел, стабилизированной вращением, и формул расчетов параметров движения системы, позволяющих проводить анализ орбитального относительного движения и движения концевых тел относительно соответствующих систем координат. Предлагается новый подход к оценке математического описания движения системы. Практическая значимость проводимых работ заключается в построении качественной картины динамики вращающейся КТС с учетом влияния собственной динамики концевых тел, имеющей важное значение для разработки перспективных КТС.

Мета роботи полягає в оцінці адекватності математичного моделювання динаміки космічної тросової системи (КТС) двох кінцевих тіл, стабілізованої обертанням, і формул розрахунків параметрів руху системи, які дозволяють проводити аналіз орбітального відносного руху й руху кінцевих тіл відносно відповідних систем координат. Пропонується новий підхід до оцінки математичного опису руху системи. Практична значимість проведених робіт полягає в побудові якісної картини динаміки обертової КТС з урахуванням впливу власної динаміки кінцевих тіл, яка має важливе значення для розробки перспективних КТС.

The study focuses on the estimation of the adequacy of mathematical modeling the dynamics of the space tether system (STS) with two end bodies, stabilized by rotation, and formula for calculating the system motion parameters to analyze an orbital relative motion and that of the end bodies in reference to the corresponding coordinate systems. A new approach to the estimation of a mathematical description of the system motion is offered. Practical importance of the work involves a high-quality representation of the dynamics of the rotating STS considering the influence of the end-bodies dynamics that is critical for developing the advanced STS.

Ключевые слова: *космические тросовые системы, математическая модель, стабилизация вращением, концевые тела, энергия движения.*

Введение. Как правило, разработка математической модели является наиболее трудоемким и сложным этапом в процессе решения поставленных задач динамики космических тросовых систем (КТС). Разработка математической модели состоит в определении принципиальных решений по созданию и использованию будущей модели для построения качественной картины динамики рассматриваемой системы. Поэтому оценивание достоверности получаемых результатов – необходимая часть в проведении исследований и решении поставленных задач. Численным путем мы можем получить оценку параметров и числовых характеристик основных закономерностей движения систем. Но достоверность получаемых результатов требует проведения глубокого анализа и понимания этих результатов.

Ранее разработана общая модель динамики КТС двух концевых тел, стабилизированной вращением, и предложены формулы расчета параметров движения КТС, позволяющих проводить анализ орбитального относительного движения системы и движения концевых тел относительно соответствующих систем координат [1]. В ходе исследований были проведены сравнительные оценки результатов расчетов для процесса затухания продольных колебаний нити и изменения ориентации плоскости вращения системы с уже известными результатами, полученными ранее для задачи динамики КТС двух материальных точек [2]. Но сравнение результатов с моделью [2] не позволило провести оценки формул расчета параметров движения концевых тел КТС, в частности движения тел вокруг собственных центров масс.

В статье, на примере КТС двух концевых тел, стабилизированной вращением, предлагается подход к оценке адекватности математического описания динамики системы и формул расчета параметров движения КТС, основанный на проверке сохранения постоянного значения полной механической энергии движения рассматриваемой системы.

Постановка задачи. Предполагается, что рассматриваемая система консервативна и выполняются следующие условия: система склерономна, все силы потенциальны и потенциальная энергия не зависит явно от времени. При выполнении этих условий необходимо показать, что в любой момент времени при движении КТС сумма потенциальной энергии центрального ньютоновского поля сил, потенциальной энергии упругой силы троса и кинетической энергии движения не меняется.

Для простоты и физической ясности общей картины движения КТС, стабилизированной вращением, рассматривается плоский случай, т. е. предполагается, что движение КТС двух тел происходит только в плоскости орбиты. Предполагается также, что движение системы происходит в потенциальном поле сил, не происходит диссипации энергии в материале нити и на концевые тела не действуют моменты гравитационных сил.

Системы координат. Для описания движения рассматриваемой КТС используются правые системы координат:

$O_з X_и Y_и Z_и$ – инерциальная система координат (ИСК) с началом в центре Земли $O_з$. Ось $O_з X_и$ направлена в точку весеннего равноденствия, ось $O_з Z_и$ направлена по оси вращения Земли;

$O_c X_o Y_o Z_o$ – орбитальная система координат (ОСК) с началом в точке O_c, совпадающей с общим центром масс системы. Ось $O_c X_o$ направлена вдоль радиус-вектора $\vec{R}$, соединяющего центр масс системы с центром Земли, ось $O_c Y_o$ – в плоскости мгновенной орбиты в сторону движения центра масс системы;

$O_c X_c Y_c Z_c$ – связанная с плоскостью вращения двух тел КТС система координат (ССК) с началом в центре масс системы – O_c. Ось $O_c X_c$ направлена из центра масс системы в центр масс концевого тела 2 (вдоль радиус-вектора $\vec{r}$), ось $O_c Z_c$ – по оси мгновенного вращения вектора, направленного из центра масс тела 1 в центр масс тела 2 системы.

В соответствии с поставленной выше задачей сделано предположение, что центр масс системы движется по кеплеровой орбите и движение системы происходит только в плоскости орбиты. В этом случае взаимную ориентацию систем координат удобно описать следующим образом (рис. 1): $OX_o Y_o Z_o$ и $O_з X_и Y_и Z_и$ – углами Эйлера (углом истинной аномалии ν); $O_c X_c Y_c Z_c$ и $OX_o Y_o Z_o$ – углами Эйлера (углом чистого вращения φ').

Как было показано выше, в потенциальном поле сил значение полной механической энергии должно сохранять постоянное значение при движении системы, т. е.

$$H = T + \Pi = \text{const},$$

где T – кинетическая энергия системы; Π – потенциальная энергия системы.

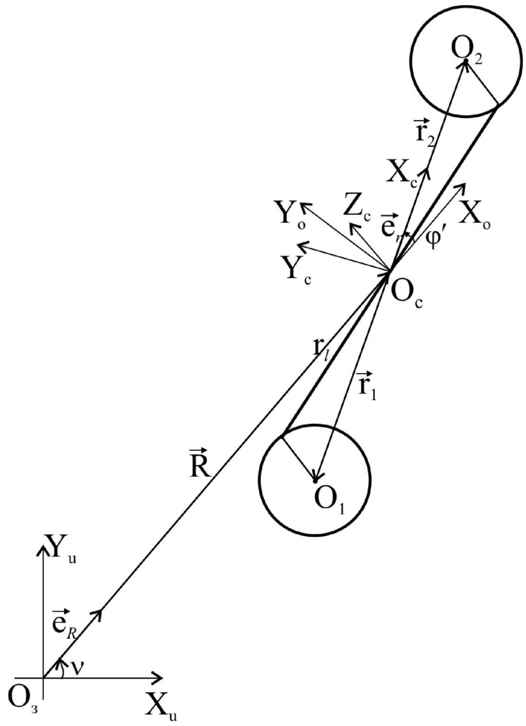

Рис. 1

Выразим полную кинетическую и потенциальную энергию системы через переменные, описывающие движение КТС.

Представим кинетическую энергию движения КТС как энергию движения центра масс системы по орбите – T_C, энергию относительного движения тел (движения центров масс тел относительно центра масс системы) – T_{TC} и энергию вращения тел вокруг собственных центров масс – T_{TB}, тогда $T = T_C + T_{TC} + T_{TB}$.

Кинетическая энергия движения центра масс системы по орбите равна

$$T_C = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 = \frac{1}{2} M \left(\dot{\vec{R}}, \dot{\vec{R}} \right), \quad (1)$$

где $\dot{\vec{R}}$ – вектор абсолютной скорости движения центра масс системы; M – масса всей системы, $M = m_1 + m_2$, m_i – масса i-го тела ($i = 1,2$).

По известным формулам [1], выражение для $\dot{\vec{R}}$ с учетом вращения ОСК относительно ИСК примет вид

$$\dot{\vec{R}} = \vec{\omega}_{ou} \times \vec{R} + \dot{R}\vec{e}_R, \quad (2)$$

где $\vec{\omega}_{ou}$ – вектор угловой скорости ОСК относительно ИСК; $\vec{e}_R$ – орт оси OX_o (рис. 1).

Подставляя (2) в (1) и проецируя T_C на оси ИСК, получим

$$T_C = \frac{1}{2} M\,(\dot{R}^2 + R^2\dot{\nu}^2)\,, \tag{3}$$

где $\dot{\nu} = \omega_{ou}$ – абсолютная величина угловой скорости движения центра масс КТС по орбите.

Таким образом, из (3) следует, что кинетическая энергия орбитального движения представляет собой произведение массы системы на сумму квадратов радиальной и трансверсальной составляющих скорости орбитального движения.

Запишем выражение кинетической энергии относительного движения КТС, воспользовавшись формулами для кинетической энергии движения тел системы по орбите.

Кинетическую энергию движения тел КТС по орбите представим как сумму

$$T_T = \sum_{i=1}^{2} T_i\,,\ i = 1{,}2\,, \tag{4}$$

где $T_i = \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\vec{R}}_i, \dot{\vec{R}}_i\right)$; $\dot{\vec{R}}_i$ – вектор абсолютной скорости движения i-го тела относительно центра Земли.

В случае движения КТС двух концевых тел, стабилизированной вращением, выражения для $\dot{\vec{R}}_i$ ($i = 1{,}2$) примут вид [1]

$$\dot{\vec{R}}_1 = \dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}, \quad \dot{\vec{R}}_2 = \dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\,,$$

где $\dot{\vec{r}}$ – вектор скорости изменения расстояния между центрами масс 1-го и 2-го концевого тела.

С использованием этих выражений кинетическую энергию движения каждого тела можно представить в виде

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \left[\left(\dot{\vec{R}}, \dot{\vec{R}}\right) - 2\frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\dot{\vec{R}} + \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 \left(\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}\right)\right], \tag{5}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[\left(\dot{\vec{R}}, \dot{\vec{R}}\right) + 2\frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\dot{\vec{R}} + \left(\frac{m_1}{M}\right)^2 \left(\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}\right)\right]. \tag{6}$$

Подставляя (5), (6) в (4), получим

$$T_T = \frac{1}{2} M \left(\dot{\vec{R}}, \dot{\vec{R}}\right) + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{M}\left(\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}\right). \tag{7}$$

Из (7) видно, что кинетическая энергия движения тел по орбите T_T представляет собой энергию движения центра масс системы (3) и энергию относительного движения (движения центров масс тел относительно центра масс системы), или

$$T_{TC} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{M}\left(\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}\right).$$

В [1], с учетом вращения ССК относительно ИСК записано выражение для $\dot{\vec{r}}$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega}_{cu} \times \vec{r} + \dot{r}\vec{e}_r ,$$

где $\vec{\omega}_{cu}$ – вектор угловой скорости ССК относительно ИСК; $\vec{e}_r$ – орт оси $O_c X_c$ (рис. 1).

Подставляя выражение для $\dot{\vec{r}}$ в T_{TC} и проецируя на оси ИСК, получим

$$T_{TC} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{M}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right), \tag{8}$$

где $\dot{\varphi}$ – угловая скорость ССК относительно ИСК ($\omega_{cu} = \dot{\varphi}$), в плоском случае $\varphi = \nu + \varphi'$ (рис. 1).

Кинетическая энергия относительного движения, аналогично энергии орбитального движения, представляет собой произведение приведенной массы системы на сумму квадратов радиальной и трансверсальной составляющих скорости относительного движения.

Кинетическую энергию движения концевых тел вокруг собственных центров масс можно представить как сумму

$$T_{TB} = \sum_{i=1}^{2} T_{iB} , \ i = 1,2, \tag{9}$$

где $T_{iB} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} J_i \omega_i^2$, J_i – момент инерции i-го тела, ω_i – абсолютная угловая скорость движения i-го тела.

Потенциальная энергия системы равна сумме энергий центрального поля силы тяжести $\Pi_{грав}$ и упругой деформации троса $\Pi_{тр}$, $\Pi = \Pi_{грав} + \Pi_{тр}$.

Как известно [1, 4], гравитационные силы, действующие на i-е ($i = 1,2$) концевое тело системы, определяются равенством

$$\vec{F}_{грав,i} = -\frac{\mu m_i}{R_i^2}\vec{e}_{R_i} = -\frac{\mu m_i}{R_i^3}\vec{R}_i , \ i = 1,2 ,$$

где μ – гравитационный параметр Земли.

Элементарная работа сил $\vec{F}_{грав,i}$ на виртуальном перемещении $\delta\vec{R}_i$ равна

$$\delta' A = -\frac{\mu m_i}{R_i^3}\vec{R}_i \delta\vec{R}_i , \ i = 1,2 .$$

Обозначение δ' используется с целью отметить, что речь идет о бесконечно малой величине, не являющейся, однако, вариацией некоторой величины работы A [2].

Замечая, что $\vec{R}_i \delta \vec{R}_i = \frac{1}{2}\delta\left(\vec{R}_i \cdot \vec{R}_i\right) = \frac{1}{2}\delta R_i^2 = R_i \delta R_i$ ($i = 1{,}2$), имеем

$$\delta' A = -\frac{\mu m_1}{R_1^2}\delta R_1 - \frac{\mu m_2}{R_2^2}\delta R_2 = \mu\delta\left(\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2}\right).$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия центрального поля сил, связанная с концевыми телами системы, имеет вид

$$\Pi_{грав} = -\mu\left(\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2}\right). \tag{10}$$

Из геометрии системы (рис. 1), векторы $\vec{R}_i$ связаны соотношениями $\vec{R}_i = \vec{R} + \vec{r}_i$ ($\vec{r}_i$ – радиус-вектор, направленный из центра масс системы O_c в центр масс i-го концевого тела O_i, $i = 1{,}2$), тогда

$$\vec{R}_i^2 = \vec{R}^2 + 2\vec{R}\vec{r}_i + \vec{r}_i^{\,2},\ i = 1{,}2,$$

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{2\vec{R}\vec{r}_i}{R^2} + \frac{r_i^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}},\ i = 1{,}2. \tag{11}$$

Ограничимся в разложении (11) в ряд по степеням $\frac{r_i}{R}$ членами, содержащими только квадраты данного отношения $\left(\frac{r_i}{R}\right)^2$

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{\vec{R}\vec{r}}{R^2} - \frac{1}{2}\frac{r_i^2}{R^2} + \frac{3}{2}\frac{\left(\vec{R}\vec{r}_i\right)^2}{R^4} - \ldots\right),\ i = 1{,}2.$$

Учитывая, что $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ [4], получаем

$$\Pi_{грав} = -\frac{\mu M}{R} - \frac{1}{2}\mu\frac{m_1 m_2}{M}\frac{r^2}{R^3}\left(3\cos^2\varphi' - 1\right). \tag{12}$$

Согласно (12) мы видим, что траектория центра масс системы является невозмущенной кеплеровой орбитой, а воздействие центрального ньютоновского поля сил на относительное движение КТС описывается выражением $\frac{1}{2}\mu\frac{m_1 m_2}{M}\frac{r^2}{R^3}\left(3\cos^2\varphi' - 1\right)$.

Упругие свойства нити описываются законом Гука [1, 4]. Потенциальная энергия упругих колебаний троса примет вид

$$\Pi_{тр} = -\frac{1}{2}\frac{c}{d}\left(r_l - d\right)^2, \tag{13}$$

где d – номинальная длина нити, c – жесткость нити, r_l – начальная длина нити.

С учетом полученных соотношений (3), (8), (9), (12), (13) для кинетической и потенциальной энергий запишем выражение полной механической энергии

$$H = \frac{1}{2}\left[M(\dot{R}^2 + R^2\dot{\nu}^2) + \frac{m_1 m_2}{M}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \sum_{i=1}^{2} J_i \omega_i^2 - 2\frac{\mu M}{R} - \right.$$
$$\left. - \mu\frac{m_1 m_2}{M}\frac{r^2}{R^3}\left(3\cos^2\varphi' - 1\right) + \frac{c}{d}(r_l - d)^2 \right]. \qquad (14)$$

В нашем случае, формулу энергии (14) можно существенно упростить, сделав предположение о том, что при $r/R \ll 1$ центр масс системы будет двигаться по невозмущенной кеплеровой орбите [5]. И мы можем провести оценку значения механической энергии только для относительного движения системы, т. е.

$$H_o = \frac{1}{2}\left[\frac{m_1 m_2}{M}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - \mu\frac{r^2}{R^3}\left(3\cos^2\varphi' - 1\right)\right) + \sum_{i=1}^{2} J_i \omega_i^2 + \frac{c}{d}(r_l - d)^2 \right]. \qquad (15)$$

Расчеты проведены для следующих значений параметров и начальных условий движения КТС, табл. 1.

Таблица 1 – Параметры и начальные условия движения системы

Параметры орбиты движения центра масс системы	
фокальный параметр	$p = 7021000$ м
эксцентриситет орбиты, радиус орбиты, угловая скорость орбитального движения	$e = 0$, $R = \frac{p}{1 + e\cos\nu}$, $\omega_{ou} = \frac{\sqrt{\mu p}}{p^2}$
начальная ориентация ОСК относительно ИСК	$\Omega = 0^\circ$, $u = 0^\circ$, $i = 0^\circ$
начальная ориентация ССК относительно ИСК	$\psi = 45^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $\varphi = 0^\circ$
начальная угловая скорость движения ССК относительно ИСК	$\omega_{cu} = 0{,}1009$ 1/с
Характеристики нити	
номинальная длина нити	$d = 100$ м
жесткость нити	$c = 1160$ Н
начальная длина нити	$r_l = 100{,}01$ м
Массово-геометрические характеристики *i*-го концевого тела	
моменты инерции	$J_{il} = 0{,}135$ кг·м^2 ($l = x, y, z$)

На рис. 2 показано изменение энергии относительного движения КТС во времени на десяти оборотах системы вокруг собственного центра масс.

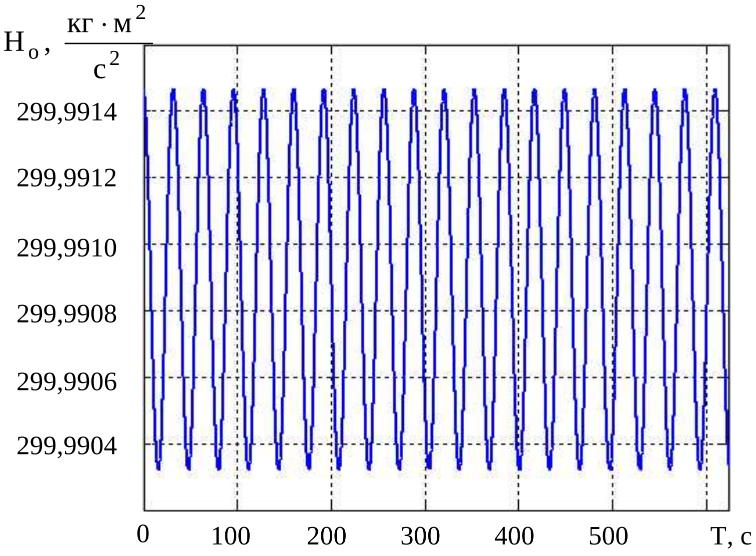

Рис. 2

Из рисунка видно, что происходит незначительное, порядка 10^{-3}, изменение энергии относительного движения системы, обусловленное влиянием гравитационного поля на это движение КТС. Эти результаты подтверждаются аналитическими выражениями, полученными в [3]. Полная же механическая энергия движения системы в потенциальном поле сил сохраняет постоянное значение как показано на рис. 3.

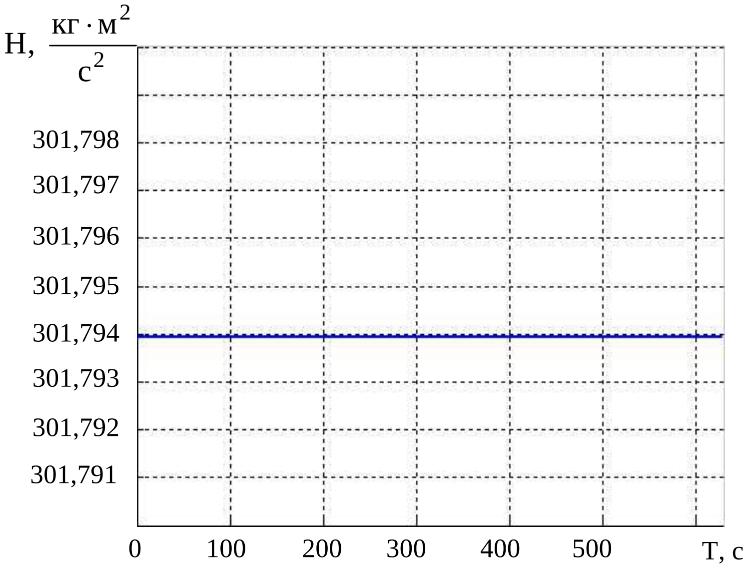

Рис. 3

Выводы. Для модели динамики КТС двух концевых тел, стабилизированной вращением, получено аналитическое выражение полной механической энергии движения системы, в частности, выражение энергии относительного движения. Проведены численные расчеты для заданных параметров и условий движения рассматриваемой КТС. Показано, что в потенциальном поле сил полная механическая энергия движения системы сохраняет свое значение, незначительные изменения энергии относительного движения обусловлены воздействием гравитационного поля.

Таким образом, на примере космической тросовой системы двух концевых тел [1] проведена оценка адекватности математического описания динамики системы, позволяющая подтвердить достоверность результатов численного моделирования КТС рассматриваемого класса.

1. *Волошенюк О. Л.* Математическая модель динамики космической тросовой системы, стабилизированной вращением. Техническая механика. 2004. № 2. С. 17 – 27.
2. *Алпатов А. П., Белецкий В. В., Драновский В. И., Пироженко А. В. и др.* Ротационное движение комических тросовых систем. Днепропетровск: Институт технической механики НАН Украины и НКА Украины, 2001. 404 с.
3. *Пироженко А. В.* Динамика космических тросовых систем, стабилизированных вращением : Дис… докт. физ.-мат. наук. — Донецк, 2007. — 307 с.
4. *Волошенюк О. Л., Пироженко А. В.* К затуханию существенно нелинейных продольных колебаний космической тросовой системы, стабилизированной вращением. Техническая механика. 2000. № 2. С. 3 – 12.
5. *Белецкий В. В.* Очерки о движении космических тел. Изд. 3, испр. и доп. М., 2009. 432 с.

Получено 24.11.2016,
в окончательном варианте 21.12.2016