УДК 539.3

В. С. ГУДРАМОВИЧ, А. П. ДЗЮБА, Ю. М. СЕЛИВАНОВ

К МЕТОДОЛОГИИ ПОИСКА РАЦИОНАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАТЕРИАЛА ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Цель работы – анализ авторских разработок, созданных за последние годы в области методологии поиска рационального распределения материала тонкостенных элементов конструкций. Рассматриваются: **а**) метод на основе решения задачи оптимизации с использованием принципа максимума Понтрягина при ограничениях общего вида, который позволяет путем математического моделирования создавать конструкции среднего класса сложности с высокой удельной прочностью при достаточно хороших деформационных свойствах, **б**) голографическая методика, позволяющая получать наглядные и приемлемые по точности результаты при определении параметров жесткостных и прочностных характеристик оптимизируемых оболочечно-пластинчатых конструкций на их модельных и натурных образцах, **в**) экспериментально-расчетный подход, дающий возможность улучшить параметры более сложных по форме, распределению материала и нагрузки конструкций, определение напряженно-деформированного состояния которых путем расчета является недостаточно надежным. Их эффективность демонстрируется на примерах анализа перераспределения материала цилиндрической оболочки и ребристой пластины в зоне действия нормальной к поверхности силы картера коробки передач и сцепления автомобиля. Изложена идея перспективного подхода к рациональному распределению материала особо сложных корпусных конструкций. Представленные разработки расширяют класс тонкостенных элементов конструкций современной техники и сооружений, для которых можно эффективно реализовать высокий уровень конструкторских решений по обеспечению рациональных параметров.

Мета роботи – аналіз авторських розробок, створених за останні роки у галузі методології раціонального розподілу матеріалу тонкостінних елементів конструкцій. Розглядаються: **а**) метод на основі розв'язування задачі оптимізації з використанням принципу максимуму Понтрягіна при обмеженнях загального вигляду, який дозволяє шляхом математичного моделювання створювати конструкції середнього класу складності з високою питомою міцністю при досить хороших деформаційних властивостях, **б**) голографічна методика, що дозволяє отримувати наочні і прийнятні за точністю результати при визначенні параметрів жорсткісних і міцнісних властивостей оболонково-пластинчатих конструкції, що оптимізуються, на їх модельних і натурних зразках, **в**) експериментально-розрахунковий підхід, що дає можливість поліпшити параметри більш складних за формою, розподілом матеріалу і навантаження конструкцій, визначення напружено-деформованого стану яких шляхом розрахунку є недостатньо надійним. Їх ефективність демонструється на прикладах аналізу перерозподілу матеріалу циліндричної оболонки і ребристої пластини в зоні дії нормальної до поверхні сили картера коробки передач і зчеплення автомобіля. Викладена ідея перспективного підходу до раціонального розподілу матеріалу особливо складних корпусних конструкцій. Представлені розробки розширюють клас тонкостінних елементів конструкцій сучасної техніки і споруд, для яких можна ефективно реалізувати високий рівень конструкторських рішень по забезпеченню раціональних параметрів.

The work goal is to analyze the recent developments in the field of the methodology for selecting a rational distribution of the material for structural thin-walled members. Based on the solution of the optimization problem, the method is examined using the Pontryagin maximum principle with general limitations. Using mathematical modeling, this method allows the creation of the middle-complexity structures with high specific strength and the reasonably good straining properties. A golography technique is also used to measure the parameters of the rigidity and strength characteristics of shell- plate structures under optimization with their modelled and full-scale samples. The results are descriptive with reasonable accuracy. An experimental and calculating approach used improves the parameters of the structures with more complex configurations, material and load distributions because the measurement of their stressed-strained state is not sufficiently reliable using computations. Their effectiveness is illustrated by examples of the analysis of a redistribution of the material of a cylindrical shell and ribbed plate exposed to a normal surface force, a gear case and a clutch. A concept of an advanced approach to a rational distribution of the material for specifically complex-shaped body structures is proposed. The developments presented enhance the class of the structural thin-walled members for modern engineering and structures using a high- level design of the rational parameters.

Ключевые слова: *тонкостенные элементы конструкций, рациональное распределение материала, принцип максимума Понтрягина, голографическая интерферометрия.*

Введение. Весовая оптимизация несущих тонкостенных элементов современных машин и сооружений во многих случаях приводит к значительному перераспределению их материала и необходимости исследования моде-

лей с нерегулярной жесткостью при большом числе управляющих параметров. При этом результаты существенно зависят от точности и оперативности метода определения их напряженно-деформированного состояния (НДС), а также эффективности используемых методов и алгоритмов оптимизации.

Несмотря на множество теоретических работ по этой сложной и многогранной проблеме и полученные весомые результаты [1, 2, 6 и др.], задачи совершенствования методологии поиска рационального распределения материала и исследования деформационно-прочностных свойств тонкостенных структур с неоднородным распределением жёсткости и нагрузки остаются в числе актуальных. Перспективным представляется развитие и комплексное использование взаимодополняющих теоретических и экспериментальных подходов, основанных на универсальных алгоритмах решения задач оптимального управления с ограничениями общего вида и голографической интерферометрии. Отметим особую важность задач оптимизации оболочечных структур при локальных нагрузках и контактных взаимодействиях, вызывающих существенную неоднородность НДС [3, 5, 7, 13, 14].

Цель данной работы – анализ трех наиболее эффективных подходов к решению указанной проблемы, разработанных при участии авторов.

Математическое моделирование на основе принципа максимума Понтрягина. Методика и численный алгоритм решения проблемы строится с использованием методов теории оптимальных процессов, моментной теории для однородных изотропных упругих тонкостенных оболочек переменной в двух направлениях толщины, сведенных к системе восьми уравнений в частных производных [2]

$$\frac{\partial X_i}{\partial s} = \sum_{m=0}^{4} \sum_{j=1}^{8} \left(a_{ij}^{(m)} \frac{\partial^{(m)} X_j}{\partial \varphi^{(m)}} + f_i^{(m)} \right), \quad i = \overline{1,8}. \tag{1}$$

Здесь X – вектор основных переменных НДС, компонентами которого в общепринятых обозначениях являются перемещения u, v, w, угол поворота ϑ и силовые факторы N_1, S^*, Q_1^*, M_1, а коэффициенты a_{ij}^m, f_i^m могут быть достаточно просто выписаны в процессе получения системы (1).

Задача заключается в определении закона изменения толщины $h(s,\varphi)$ оболочки, которая обеспечивает минимальный объем ее материала

$$V = \int_0^{2\pi} \int_{s_0}^{s_n} r(s)\, h(s,\varphi)\, ds\, d\varphi \tag{2}$$

при выполнении уравнений состояния (1) с краевыми условиями и наличии ограничений прочности, жесткости и конструктивных требований, соответственно:

$$\max_z \tilde{\sigma}(s, \varphi, z) \le [\sigma]; \quad \bar{w}(s, \varphi) \le \bar{w}_{\max}; \quad h_{\max} \ge h(s, \varphi) \ge h_{\min}. \tag{3}$$

В [3] z – координата, которая изменяется по толщине оболочки $-h/2 \le z \le h/2$; $s_0 \le s \le s_n$; $0 \le \varphi \le 2\pi$, а для вычисления эквивалентного напряжения принята зависимость

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 + 3\tau_{12}^2 + 3\tau_{1z}^2 + 3\tau_{2z}^2},$$

где σ_1, σ_2, τ_{12}, τ_{1z}, τ_{2z} – соответствующие нормальные и касательные напряжения в сечениях оболочки.

Для построения численного алгоритма решения задачи прямого расчета (1) и формулировки задачи оптимизации в терминах теории оптимального управления уравнение (1) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, с использованием дифференциально-разностного метода прямых [2]. С этой целью область определения $0 \le \varphi \le 2\pi$ делится на M+1 частей с помощью M точек $\varphi_m = 2\pi(m-1)/M$; $m = \overline{1,M}$. При этом производные по φ в (1) заменяются на их приближенные центральные конечно-разностные значения четвертой степени точности

$$\begin{gathered}
\partial y/\partial \varphi \approx (y_{m-2} - 8y_{m-1} + 8y_{m+1} - y_{m+2})/(12\cdot\Delta); \\
\partial^2 y/\partial \varphi^2 \approx (-y_{m-2} + 16y_{m-1} - 30y_m + 16y_{m+1} - y_{m+2})/(12\cdot\Delta^2); \\
\partial^3 y/\partial \varphi^3 \approx (y_{m-3} - 8y_{m-2} + 13y_{m-1} - 13y_{m+1} + 8y_{m+2} - y_{m+3})/(8\cdot\Delta^3); \\
\partial^4 y/\partial \varphi^4 \approx (-y_{m-3} + 12y_{m-2} - 39y_{m-1} + 56y_m - 39y_{m+1} + 12y_{m+2} - y_{m+3})/(6\cdot\Delta^4),
\end{gathered} \tag{4}$$

где $y(s,\varphi)$ – соответствующая компонента НДС; y_m – ее значение на m-ой прямой для $\varphi_m = 2\pi(m-1)/M$; $\Delta = 2\pi/M$. После замены в (1) выражений $\partial^k X_j/\partial\varphi^k$ их приближенными значениями (4), для каждого $\varphi^* = \varphi_m$ можно получить систему дифференциальных уравнений в обыкновенных производных

$$dX_i^m/ds = \sum_{j=1}^{8} A_{ij}^m X_j^m + F_i^m; \quad i = \overline{1,8}, \tag{5}$$

где коэффициенты F_i^m, $A_{ij}^m = \left(a_{ij}^{(0)} - a_{ij}^{(2)} \cdot \frac{5}{2\Delta^2} + a_{ij}^{(4)} \cdot \frac{28}{3\Delta^4} \right)_m$, которые будут разными для каждой m-ой прямой, достаточно просто выписываются в процессе подстановки (4) (для каждой из компонент вектора $\bar{X}$) в систему (1).

При формулировке и решении задачи оптимизации также используется идея метода прямых. При этом функционал (2) путем замены интегрирования по φ на суммирование преобразуется к виду

$$V = \int_0^{2\pi} \int_{s_0}^{s_n} r(s)\, h(s,\varphi)\, ds\, d\varphi \approx \sum_{m=1}^{M} \int_{s_0}^{s_n} r(s)\, h(s,\varphi_m)\, ds = 2\pi/M \int_{s_0}^{s_n} r(s) \sum_{m=1}^{M} h(s,\varphi_m)\, ds .$$

Таким образом, задача оптимального проектирования конструкции сводится к задаче отыскания минимума функционала

$$V^* = \int_{s_0}^{s_n} r(s) \sum_{m=1}^{M} h(s,\varphi_m)\, ds \tag{6}$$

для объекта, описываемого системой (5) с ограничениями (3). Проведенные преобразования позволяют применить к исходной двумерной задаче принцип максимума Понтрягина в его обычной одномерной форме. При этом гамильтониан задачи принимает вид

$$H(s)=\sum_{m=1}^{M}[-r(s)\,h(s,\varphi_m)+\sum_{j=1}^{8}\lambda_j(s,\varphi_m)\sum_{i=1}^{8}\left(A_{ij}^{(m)}\cdot X_j^{(m)}+F_i^{(m)}\right)+$$
$$+\xi(s,\varphi_m)(\sigma_e(s,\varphi_m)-[\sigma])\,].$$

Здесь $\xi(s,\varphi_m)$ – множитель Лагранжа

$$\xi(s,\varphi_m)\begin{cases}=0;\ \sigma_e<[\sigma];\\ <0;\ \sigma_e\geq[\sigma].\end{cases} \qquad (7)$$

Основные аспекты метода последовательных приближений [2] решения задачи следующие. Задается соответствующее допустимое начальное управление $h^0(s_i,\varphi_m)$ в $N\times M$ фиксированных точках $i=\overline{1,N}$ (узловых для каждой из $m=\overline{1,M}$ условных прямых). В самом простом случае это может быть $h^*(s,\varphi)=\text{const}$. Дальше на любом ω-ом шаге для определения компонент НДС и напряжений $\sigma_e^{(\omega)}(s,\varphi)$ выполняется расчет оболочки при известном значении управления $h_m^{(\omega)}(s)=h^{(\omega)}(s,\varphi_m)$. Функции $\xi_m^{(\omega)}(s)=\xi^{(\omega)}(s,\varphi_m)$ вычисляются для каждой текущей итерации по управлению с использованием (7), откуда

$$\xi^{\omega}(s,\varphi_m)=\frac{r(s)-\sum_{j=1}^{8}\lambda_j^{(\omega)}(s,\varphi_m)\dfrac{\partial}{\partial h_m}\left(\dfrac{dX_j^{(\omega)}(s,\varphi_m)}{ds}\right)}{\partial\sigma_e^{(\omega)}(s,\varphi_m)/\partial h_m}.$$

Принимается также, что $\lambda_j^0(s,\varphi)=0$ ($j=\overline{1,8}$). Дальше с учетом полученных значений $\bar{X}^{\omega}$, $\bar{\xi}^{\omega}$ методом ортогональной прогонки решается краевая задача для сопряженной системы [2] и для каждой прямой определяется $\bar{\lambda}^{(\omega)}(s,\varphi_m)$. После этого оптимальное управление h^* текущего шага приближений отыскивается решением ряда $N\times M$ вспомогательных одномерных задач нелинейного программирования в узловых точках (s_i,φ_m) ($i=\overline{1,N}$; $m=\overline{1,M}$). При этом считается, что сходимость достигнута, если выполнено одно из условий

$$\max_{s_i,\varphi_m}\left|h^{\omega+1}-h^{\omega}\right|/\left|h^{\omega+1}\right|\leq\varepsilon_2;\qquad 0<\varepsilon_2<<1;$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left|h^{\omega+1}-h^{\omega}\right|^2/\left|h^{\omega+1}\right|^2\leq\varepsilon_3;\ 0<\varepsilon_3<<1.$$

Обобщенный алгоритм решения задачи оптимального управления с ограничениями общего вида изложен в [4, 5, 12], а его приложения – в [13, 14].

Голографическая методика. В связи со сложностью расчета неоднородных тонкостенных структур для оценки и анализа их НДС дополнительно привлекают современные интерференционно-оптические методы, из которых все чаще предпочтение получает голографическая интерферометрия [3, 8]. По голографическим интерферограммам можно определять перемещения и деформации поверхности тонкостенного объекта, назначать шаги по рациональному распределению его материала, а также оценивать изменения НДС в процессе исследований. Однако известные способы интерпретации интерферограмм либо могут приводить к большим ошибкам (качественный анализ), либо при высокой точности результатов оказываются неоправданно сложными и трудоемкими (количественный анализ).

Разработана достаточно оперативная и приемлемая по точности голографическая методика исследования деформационно-прочностных свойств оптимизируемых тонкостенных объектов, НДС которых вполне определяется по прогибам срединной поверхности w. Ее суть заключается в следующем.

Усовершенствованным способом качественного анализа тестовой голографической интерферограммы (ТГИ) объекта [9] оценивается его деформированное состояние, определяются наиболее и наименее деформируемые зоны и контрольные сечения в них. В этих сечениях определяются приращения главных кривизн κ_1 и κ_2, обусловленные деформированием поверхности. Заметим, что для определения кривизн информация об абсолютных значениях прогибов необязательна; достаточно найти изменения прогибов в исследуемой зоне и ее ближайшей окрестности по двум главным направлениям.

Для определения значений κ_1 и κ_2 используются два приема.

Сначала, применяя модернизированный муаровый метод экспресс-анализа голографических интерферограмм [10], оцениваются общий характер изменения κ_1 и κ_2 и их значения в первом приближении.

Затем для более точного определения κ_1 и κ_2 выполняется количественный анализ ТГИ вдоль контрольного сечения по главным направлениям с последующей аппроксимацией дискретных результатов сплайнами и дифференцированием последних. При этом данные, полученные муаровым методом, используются для определения величины параметра сглаживания, то есть обеспечения корректности задачи сглаживания.

По величинам κ_1 и κ_2 оцениваются местные главные напряжения $\sigma_{1\max}$, $\sigma_{2\max}$ и изгибная жесткость $D(x,y)$ структуры. Здесь приемлемы простейшие формулы теории изгиба тонких пластин и оболочек переменной толщины $h(x,y)$:

$$\sigma_{1\max}=\pm C\,h(\kappa_1+\mu\kappa_2);\ \sigma_{2\max}=\pm C\,h(\kappa_2+\mu\kappa_1);\ D(x,y)=C\,h^3/6,$$

где $C=E/\left[2(1-\mu^2)\right]$; E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала.

При выработке рекомендаций по рациональному перераспределению материала объекта нижние границы местной толщины $h_*(x,y)$ и жесткости $D_*(x,y)$ определяются по найденным значениям главных напряжений с применением одной из теорий прочности. Оцениваются приращения эквива-

лентных напряжений в объекте, и в соответствии с этой оценкой удаляется материал на недогруженных участках или наращивается на перегруженных.

В усовершенствованном образце аналогично определяются приращения напряжений. По результатам их анализа выполняется следующий шаг по перераспределению его материала. Процесс прекращается, когда определяемые приращения эквивалентных напряжений или изгибная жесткость во всех контрольных точках объекта становятся близкими к заданной величине.

Экспериментально-расчетный подход сочетает достоинства двух рассмотренных подходов и ориентирован на весовую оптимизацию более сложных конструкций, для которых определение НДС путем расчета становится недостаточно надежным. Каждый последующий шаг перераспределения материала такой конструкции уточняется по результатам голографического исследования модели предыдущего шага [7].

Верификация. Представленные методические разработки апробировались на образцах конструктивных элементов различной сложности.

А) Рассчитана и исследована оптимальная по весу конфигурация накладки на цилиндрическую жестко защемленную по торцам оболочку в зоне действия на нее радиальной силы (рис. 1 – 3).

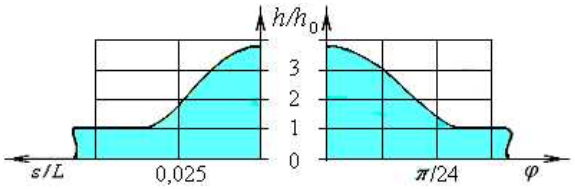


Рис. 1 – Расчетное оптимальное распределение толщины оболочки
в зоне действия сосредоточенной силы в продольном (слева)
и окружном (справа) сечениях

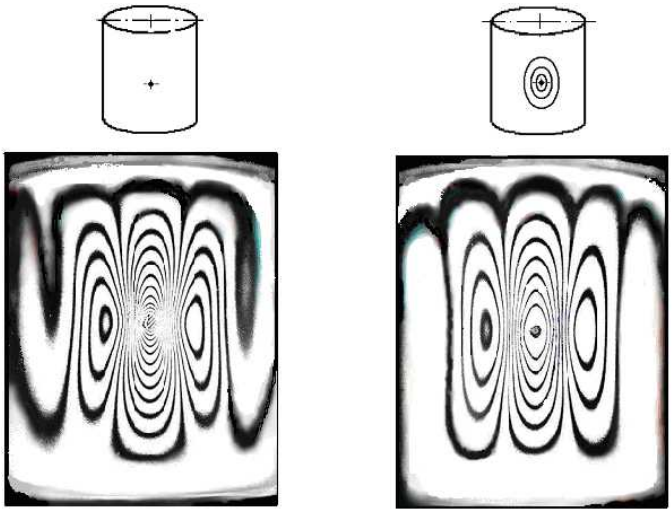
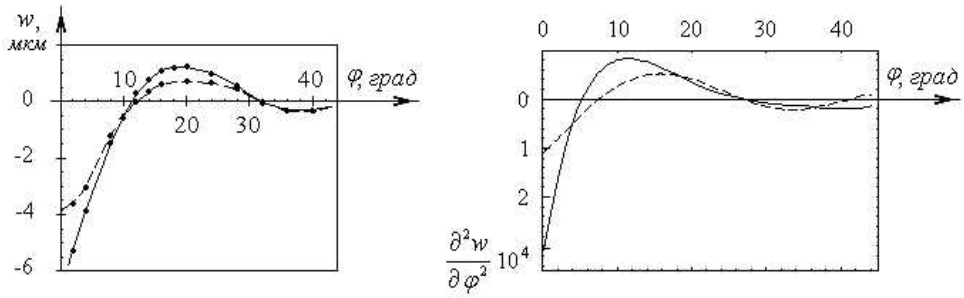


Рис. 2 – Схемы и ТГИ образцов оболочки
(слева – гладкой, справа – с оптимальной накладкой)



а) б)

Рис. 3 – Распределения прогибов (а) и их вторых производных (б) у оболочек без подкрепления (сплошные кривые) и с оптимальной накладкой (штриховые кривые) в окружном направлении; точками показаны результаты расшифровки интерферограмм

Из рис. 2 и рис. 3, а) видим, что оптимальная накладка практически не повлияла на общий волновой характер поля прогибов. Однако в зоне действия силы ~ в 3 раза снизились максимальные величины производных прогибов, характеризующих распределение напряжений (рис. 3, б), т. е. улучшились параметры НДС оболочки в целом. Экономия в объеме материала полученного оптимального проекта в сравнении с оболочкой постоянной толщины такой же прочности составила ~ 60 %. Таким образом, получен проект оболочки, которая по своим весовым, прочностным и жесткостным характеристикам существенно превосходит образец с постоянным распределением толщины.

Б) Выполнена экспериментальная минимизация веса и исследованы свойства модельной ребристой пластины, нагружаемой нормальной силой (рис. 4, 5). После третьего шага перераспределения материала ребер их общий вес был уменьшен ~ на 39 %, графики прогибов стали более пологими, наибольшие эквивалентные напряжения были несколько снижены.

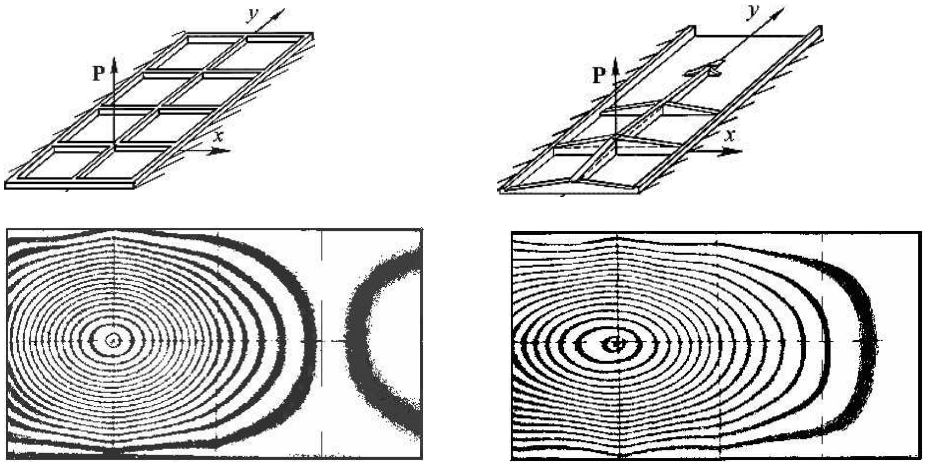
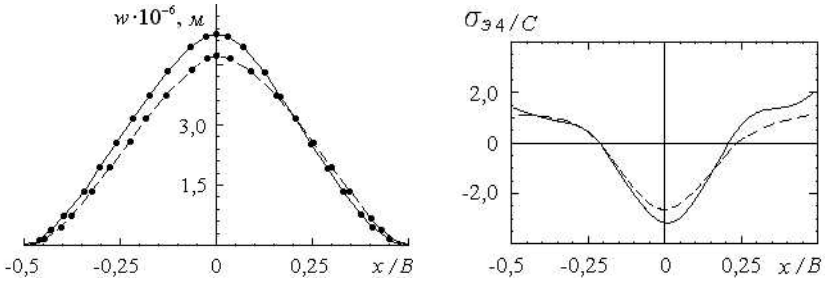


Рис. 4 – Схема оребрения и ТГИ (с тыльной стороны) пластины в исходном состоянии (слева) и после третьего изменения сечений ребер (справа)



а) б)

Рис. 5 – Распределения прогибов (а) и эквивалентных напряжений пластины (б) вдоль оси x в исходном состоянии (сплошные линии) и после перераспределения материала (штриховые линии)

В) С использованием голографической методики были также выработаны конкретные рекомендации по рациональному перераспределению материала более сложной оболочечной структуры – картера (корпуса) коробки передач и сцепления автомобиля [10] (рис. 6, 7).

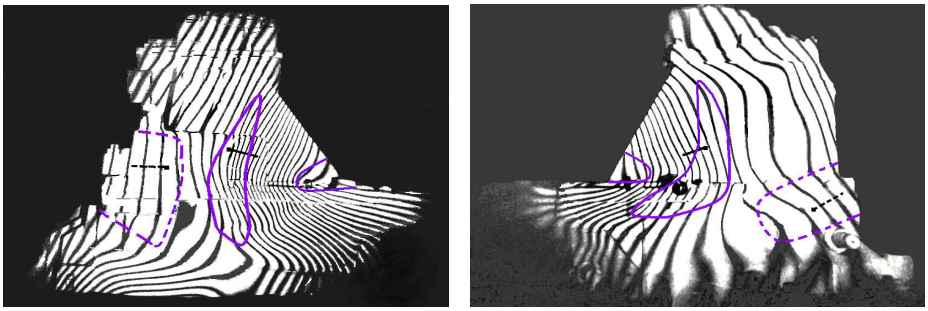


Рис. 6 – ТГИ картера на передаче «задний ход» с двух сторон (сплошными и штриховыми линиями оконтурены наиболее и наименее деформируемые зоны, точкой и отрезком прямой обозначены места возникновения наибольших деформаций и их направление)

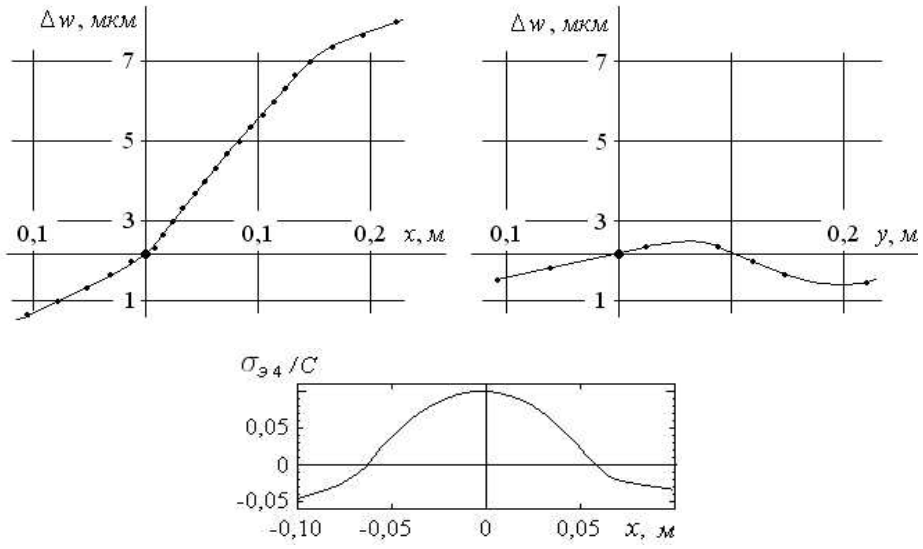


Рис. 7 – Распределения Δw и $\sigma_э$ для зон наибольших деформаций по левому рис. 6

Однако реализация необходимых доработок потребовала замены дорогостоящей (~ $1 млн.) пресс-формы для его отливки.

Для практического решения проблемы оптимизации корпусных конструкций такого класса сложности предлагается на ранних стадиях их проектирования использовать недорогой и легко видоизменяемый механическими способами макет создаваемого корпуса. (Перспективным представляется печатание такого макета на 3D-принтере). Перераспределение его материала выполняется согласно экспериментально-расчетному подходу [7] с привлечением эффективных алгоритмов из представленных разработок в области теоретического и экспериментального моделирования. Предусматриваемое этим подходом использование голографических данных в поверочном расчете методом конечных элементов макета позволяет построить корректную расчетную модель конструкции и, как следствие, повысить достоверность результатов определения НДС последней в окончательном варианте ее исполнения. В итоге многократно снижается цена доработок и значительно возрастает достоверность результатов.

Выводы. Из приведенных результатов следует, что представленные разработки довольно эффективны и существенно дополняют известную методологию оптимального проектирования тонкостенных элементов конструкций. Усовершенствованный метод на основе решения задачи оптимизации с использованием принципа максимума Понтрягина при ограничениях общего вида позволяет создавать конструкции среднего класса сложности с высокой удельной прочностью при достаточно хороших деформационных свойствах. Голографическая методика, основанная на качественном, количественном и муаровом методах анализа интерферограммы объекта, позволяет получать надежные результаты в исследовании, наглядной демонстрации и практической доводке жесткостных и прочностных свойств различных оболочечно-пластинчатых узлов конструкций. Экспериментально-расчетный подход можно успешно использовать при оптимизации конструкций с более сложным распределением материала и нагрузки, для которых определение НДС путем расчета становится недостаточно надежным.

Дальнейшие усилия в решении проблемы поиска рационального распределения материала тонкостенных элементов конструкций современной техники и сооружений целесообразно направить на совершенствование и совместное использование указанных методических разработок, что имеет особое значение для сложных корпусных конструкций.

1. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. В 2-х кн. / *Ф. П. Васильев.* – М. : МЦИМО, 2011 : кн.1. – 620 с., кн.2. – 433 с.
2. *Григоренко Я. М.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / *Я. М. Григоренко, Г. Г. Влайков, А. Я. Григоренко*. – К. : Академпериодика, 2006.– 472 с.
3. *Гудрамович В. С.* Интерференционно-оптические исследования свойств оптимизируемых локально нагружаемых конструкций / *В. С. Гудрамович, А. П. Дзюба, Ю. М. Селиванов* // Актуальні проблеми суцільного середовища і міцності конструкцій : Міжн. науково-техн. конф. пам’яті акад. НАН України В. І. Моссаковського : тез. допов. – Д. : ДНУ, 2007. − С. 182.
4. *Дзюба А. П.* Метод послідовних наближень розв′язування задач оптимального керування з обмеженими фазовими координатами для оптимізації силових елементів конструкцій / *А. П. Дзюба* // Проблеми обчислювальної механіки і міцності констуркцій : сб. научн. тр. – Д. : Навчальна книга, 1999. – Вип. 5. – С. 61 – 85.
5. *Дзюба А. П.* Модели оптимального проектирования оболочечных конструкций на основе принципа максимума Понтрягина с ограничениями общего вида / *А. П. Дзюба* // Техн. механика. – 2005. – № 1 – С. 118 – 125.

6. *Малков В. П.* Оптимизация упругих систем / *В. П. Малков, А. Я. Угодчиков*. – М. : Наука, 1981. – 288 с.
7. Экспериментально-теоретический метод рационального перераспределения материала сложных тонкостенных конструкций / *В. И. Моссаковский, А. П. Дзюба, Ю. М. Селиванов, Д. Г. Галочкин* // Матем. методы и компьют. моделирование в исслед. и проектир. систем: сб. науч. тр. Ин-та кибернетики НАН Украины. – К. : РИО ИК НАНУ. – 1995. – С. 86 – 93.
8. *Островский Ю. И.* Голографические интерференционные методы измерения деформаций / *Ю. И. Островский, В. П. Щепинов, В. В. Яковлев*. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 248 с.
9. *Селиванов Ю. М.* Голографические методики исследования неоднородностей напряженно-деформированного состояния сложных тонкостенных структур / *Ю. М. Селиванов* // Вісник ДДУ. Сер. механіка. – 2010. – Вип. 14, Т. 2. – С. 133 – 140.
10. *Селиванов Ю. М.* Метод муара голографических интерферограмм в задачах оптимизации конструкций / *Ю. М. Селиванов* // Вісник ДДУ. Сер. механіка. – 1999. – Вип. 2, Т. 2. – С. 145 – 152.
11. *Селиванов Ю. М.* О рациональном распределении материала конструкций из нерегулярных оболочек с помощью голографической интерферометрии / *Ю. М. Селиванов* // Методы решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела : сб. научн. трудов. – Д. : ДДУ. – 1999. – С. 118 – 125.
12. *Bulakajev P. I.* An algorithm for the prediction of search trajectory in nonlinear programming problems optimum design / *P. I. Bulakajev, A. P. Dzjuba* // Structural Optimization: Research Journ. of Int. Soc. for Struct. and Multisimpl. Optimiz. – 1997. – V. 13, № 2/3. – P. 199 – 202.
13. *Hudramovich V. S.* Contact interaction and optimization of locally loaded shell structures / *V. S. Hudramovich, A. P. Dzjuba* // Journ. of Math. Sci. – 2009. – V. 162, № 2. – P. 231 – 245.
14. *Hudramovich V. S.* Contact mechanics of shell structures under local loading / *V. S. Hudramovich*. – Int. Appl. Mech. – 2009. – V. 45, № 7. – P. 708 – 729.

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и
Государственного космического агентства Украины,
Днепр

Днепропетровский национальный
университет им. Олеся Гончара

Получено 27.07.2016,
в окончательном варианте 14.09.2016