Я.Я.Рущицкий, В.Н.Юрчук

ОДИН ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ОДИНОЧНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ МАТЕРИАЛАХ

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: rushch@inmech.kiev.ua

Abstract. Two types of solitary elastic waves are considered: the plane longitudinal wave of displacement (wave of longitudinal displacement in direction of abscissa axis in Cartesian coordinates) and the cylindrical radial wave of displacement (wave of displacement in direction of radial coordinate in cylindrical coordinates). The basic novelty consists in that the corresponding to these waves nonlinear wave equations can be written in the similar structural form and then can be analyzed by the common for both waves approximate method. As a result, the distortion of wave initial profile in the form of Whittaker (plane wave) or Macdonald (cylindrical wave) functions is theoretically described.

Key words: solitary elastic wave, plane longitudinal wave, cylindrical radial wave, approximate method, distortion of wave initial profile, Whittaker and Macdonald functions.

1. Постановка задачи об одиночных волнах в материалах, деформирующихся нелинейно упруго.

Теория нелинейных волн в материалах в настоящее время не считается законченной по концепциям, подходам и методам анализа и развивается по ряду направлений [5 – 7, 9, 10, 13 – 15, 19, 21 – 24]. Задача, которая рассматривается в этом сообщении, относится к направлению, в котором используются классическая концепция упругости, методы последовательных приближений и медленно изменяющихся амплитуд, а нелинейность материала описывается упругим потенциалом Мэрнагана [21, 22]

$$W(\varepsilon_{ik}) = \frac{1}{2}\lambda(\varepsilon_{mm})^2 + \mu(\varepsilon_{ik})^2 + \frac{1}{3}A\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km} + B(\varepsilon_{ik})^2\varepsilon_{mm} + \frac{1}{3}C(\varepsilon_{mm})^3, \qquad (1)$$

где обозначения стандартны для нелинейной теории упругости: ε_{ik} – компоненты нелинейного тензора деформаций Коши – Грина $\varepsilon_{nm} = (1/2)\left(u_{n,m} + u_{m,n} + u^{k,n}u_{k,m}\right)$; u_k – компоненты вектора смещений; λ, μ, A, B, C – упругие постоянные модели Мэрнагана.

Пятиконстантная модель Мэрнагана допускает различные упрощения, основанные на пренебрежении высшими степенями градиентов смещений. Наиболее простой является модель, в которой при представлении потенциала Мэрнагана (1) учтены только вторые и третьи степени градиентов смещений

$$W = \frac{1}{2}\lambda\left(u_{m,m}\right)^2 + \frac{1}{4}\mu\left(u_{i,k} + u_{k,i}\right)^2 + \left(\mu + \frac{1}{4}A\right)u_{i,k}u_{m,i}u_{m,k} +$$
$$+\frac{1}{2}(\lambda + B)u_{m,m}\left(u_{i,k}\right)^2 + \frac{1}{12}Au_{i,k}u_{k,m}u_{m,i} + \frac{1}{2}Bu_{i,k}u_{k,i}u_{m,m} + \frac{1}{3}C\left(u_{m,m}\right)^3. \qquad (2)$$

Тогда на основании представления (2) можно строить разнообразные варианты нелинейных волновых уравнений.

Остановимся на двух типах упругих волн: плоских продольных волн смещения (продольного смещения – смещения в направлении оси Ox_1 – в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$) и цилиндрических радиальных волн смещения (радиального смещения в направлении радиальной координаты r в цилиндрической системе координат $Or\varphi z$). Далее для таких волн будут выбраны соответствующие нелинейные волновые уравнения.

Примечание 1. Эти волновые уравнения пригодны для анализа как гармонических (периодических) так и одиночных (непериодических) волн.

Примечание 2. Гармонические упругие волны изучены значительно более глубоко и этим волнам за двухсотлетнюю историю теории упругости посвящено большое количество научных книг и статей. Тем не менее, в наше время еще существуют некоторые невыясненные проблемы гармонических волн [1]. Одиночные волны в материалах активно исследуются в последние годы [3, 4, 10, 16, 20, 24, 25].

2. Плоская продольная волна смещения. Нелинейное волновое уравнение.

Выберем традиционный для плоской волны случай, когда смещения зависят только от одной пространственной координаты и времени $u_k = u_k(x_1, t)$. Тогда потенциал (2) приобретает более простой вид

$$\begin{gathered} W = (1/2)\Big[(\lambda + 2\mu)(u_{1,1})^2 + \mu\Big[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2\Big]\Big] + \\ + \big[\mu + (1/2)\lambda + (1/3)A + B + (1/3)C\big](u_{1,1})^3 + (1/2)(\lambda + B)u_{1,1}\Big[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2\Big] \end{gathered} \tag{3}$$

и компоненты тензора напряжений Кирхгоффа записываются таким образом:

$$\begin{gathered} t_{11} = (\lambda + 2\mu)u_{1,1} + (3/2)\big[\lambda + 2\mu + 2(A + 3B + C)\big](u_{1,1})^2 + \\ + (1/2)\big[\lambda + 2\mu + (1/2)A + B\big]\Big[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2\Big]; \end{gathered} \tag{4}$$

$$t_{12} = \mu u_{2,1} + (1/2)\big[\lambda + 2\mu + (1/2)A + B\big]u_{1,1}u_{2,1};$$

$$t_{13} = \mu u_{3,1} + (1/2)\big[\lambda + 2\mu + (1/2)A + B\big]u_{1,1}u_{3,1}.$$

Подстановкой представлений (4) в уравнения движения $\rho u_{1,tt} - t_{ik,i} = 0$ получаются простейшие нелинейные волновые уравнения – квадратично нелинейные волновые уравнения для трех упругих поляризованных (продольно поляризованная, поперечная горизонтально поляризованная, поперечная вертикально поляризованная) плоских волн

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} = N_1 u_{1,11}u_{1,1} + N_2(u_{2,11}u_{2,1} + u_{3,11}u_{3,1}); \tag{5}$$

$$\rho u_{2,tt} - \mu u_{2,11} = N_2(u_{2,11}u_{1,1} + u_{1,11}u_{2,1}); \tag{6}$$

$$\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = N_2(u_{3,11}u_{1,1} + u_{1,11}u_{3,1}); \tag{7}$$

$$N_1 = 3\big[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)\big];\; N_2 = \lambda + 2\mu + (1/2)A + B. \tag{8}$$

Наиболее простое нелинейное уравнение для продольной волны получается из уравнения (5) в рамках так называемой первой стандартной задачи, когда первоначально возбуждается лишь продольная волна

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} = N_1 u_{1,11}u_{1,1} \to u_{1,tt} - (c_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho)u_{1,11}u_{1,1}, \tag{9}$$

где скорость линейной плоской продольной волны обозначена как $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$.

Именно к этому уравнению в [3] был применен приближенный метод анализа решения в виде одиночной волны с начальным профилем, который описывается аналитически функцией Чебышова – Эрмита.

3. Плоская продольная одиночная волна смещения с начальным профилем, который описывается аналитически функцией Уиттекера. Приближенный метод анализа.

Применим к уравнению (9) приближенный метод анализа решения в виде одиночной волны. Для этого представим уравнение (9) в виде

$$u_{1,tt} - \left\{(c_L)^2 + (N_1/\rho)u_{1,1}\right\} u_{1,11} = 0 \to u_{1,tt} - \left\{1 + \alpha u_{1,1}\right\}(c_L)^2 u_{1,11} = 0; \tag{10}$$

$$\alpha = \left[N_1/(\lambda + 2\mu)\right]. \tag{11}$$

Предположим, что начальный профиль волны описывается подходящей для одиночной волны функцией (финитной или с финитным весом) $u(x_1, t=0) = F(ax_1)$ и одиночная волна распространяется в виде

$$u(x_1, t) = F\left[a(x_1 - vt)\right], \tag{12}$$

где скорость волны определяется выражением

$$v = \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}}\; c_L . \tag{13}$$

Примечание 3. Скорость v можно трактовать как локальную скорость волны в точке x_1 и момент времени t, что в таком случае напоминает трактовку Лайтхилла простых волн Римана. Поскольку из (13) следует, что скорость v зависит нелинейно от $u_{1,1}$, т. е., от решения (профиля волны в точке x_1 и момент времени t), то одиночную волну (12) также можно трактовать как простую волну.

Примем далее ограничение в представлении (13):

$$|\alpha u_{1,1}| \ll 1, \tag{14}$$

которое позволяет записать корень в (13) в виде ряда

$$\sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} = (1 + \alpha u_{1,1})^{1/2} = 1 + (1/2)\alpha u_{1,1} - (1/8)(\alpha u_{1,1})^2 + \cdots$$

и представить приближенно решение (12) в виде

$$u(x_1, t) \cong F\left[a\left(x_1 - c_L t - (1/2)\alpha u_{1,1} t\right)\right]. \tag{15}$$

Примечание 4. Ограничение (14) желательно привязать к классу конструкционных материалов, для которых модель Мэрнагана достаточно приемлема. Тогда для параметра α может быть указан примерный диапазон изменения $-2 < \alpha < -19$ [2]. Далее достаточно принять очень распространенное в теории упругого деформирования материалов ограничение малости деформации, обычно записываемое как $|u_{1,1}| \ll 1$ (малый градиент перемещения). Как известно [22, 23], потенциал Мэрнагана описывает нелинейное деформирование в рамках малых деформаций.

Обозначим фазу волны с постоянной фазовой скоростью через $\sigma = a(x_1 - c_L t)$ и дополнительный малый параметр через $\delta = -(1/2)\alpha a c_L u_{1,1} t$ и представим решение (15) в виде ряда Тейлора

$$u(x_1, t) \approx F(\sigma + \delta) \approx F(\sigma) + F^{/}(\sigma)\delta + (1/2)F^{//}(\sigma)\delta^2 + \cdots. \tag{16}$$

Ограничим рассмотрение первыми двумя членами в (16), предположив малость δ, т.е. $|\delta| = |-(1/2)\alpha a c_L u_{1,1} t| \ll 1$ (поскольку малость $|\alpha u_{1,1}|$ уже предположена в (14), то это фактически условие на $a c_L t$ – для класса конструкционных материалов, пройденное волной расстояние должно быть примерно 1 – 10 м и характерный размер волны a (длина, подошва) должен быть значительно меньше этого расстояния). Тогда ввиду следующего из (16) равенства $u_{1,1}(x_1,t) \approx F'_\sigma(\sigma+\delta)\cdot\sigma'_{x_1} = F'_\sigma(\sigma+\delta)\left(1-(1/2)\alpha a \times \times c_L u_{1,11} t\right) \approx F'_\sigma$ соотношению (16) можно придать вид

$$u(x_1,t) \approx F(\sigma) + F'(\sigma)\left[\delta = -(1/2)\alpha a c_L u_{1,1} t\right] = F(\sigma) - (1/2)\alpha a c_L t\left[F'(\sigma)\right]^2. \quad (17)$$

Приближенное представление решения (17) имеет общий характер и для разных конкретно выбранных функций описывает один и тот же нелинейный волновой эффект – возникновение второй гармоники или подобных ей новых составляющих и увеличение амплитуды второй составляющей со временем распространения волны.

Для гармонического $F(x_1) = e^{-ik_L x_1}$ и колоколообразного $F(x_1) = e^{-((a x_1)^2/2)}$ профилей решение (17) имеет вид, соответственно,

$$u_1(x_1,t) = a^o e^{-ik_L(x_1-c_L t)} - (1/2)t\alpha(k_L)^2(a^o)^2 e^{-2ik_L(x_1-c_L t)}; \quad (18)$$

$$u_1(x_1,t) = A^o e^{-\left[a^2(x_1-c_L t)^2/2\right]} - (1/8)t\alpha a^2 c_L a^2(x_1-c_L t)^2(A^o)^2 e^{-a^2(x_1-c_L t)^2}. \quad (19)$$

Примечание 5. Для анализа колоколообразного профиля понятия первой и второй гармоник неприменимы и функции $e^{-\left[a^2(x_1-c_L t)^2/2\right]}$, $e^{-a^2(x_1-c_L t)^2}$ можно считать первой и второй гармониками весьма условно, однако структура приближенного решения (19) очень похожа на структуру решения (18).

Примечание 6. Очевидное отличие между решениями (18) и (19) состоит в том, что нелинейная добавка для гармонической волны не зависит прямо от фазы волны $\sigma = k_L x_1 - \omega t$, тогда как для колоколообразной волны квадрат фазы волны $\sigma = a(x_1 - c_L t)$ входит явно выражение для амплитуды. Это значит, что дисторсия начального профиля волны (19) увеличивается от центральной части колокола до его хвостовой части – профиль как бы «расплывается».

Примечание 7. Приближенное решение (18) идентично с соответствующими решениями нелинейного волнового уравнения (9) (с точностью до постоянного множителя, что не меняет качественную картину эволюции волны), полученными методом последовательных приближений и методом медленно изменяющихся амплитуд [7, 22].

Формула (17) позволяет записать эволюцию одиночной волны с любым профилем в виде функции финитного веса, для которой известно аналитическое представление производной. К примеру, профиль в виде функции Уиттекера уже рассматривался ранее в рамках микроструктурной модели смеси [3] и он соответствует условию финитного веса. Выберем профиль в виде функции Уиттекера $W_{-1/4;1/4}(x_1)$ [12, 17], исследованный в [7].

Поскольку для функции $W_{\kappa,\mu}(z)$ аналитическое представление производной вычисляется по формуле [12]

$$\frac{d}{dz}W_{\lambda,\mu}(z) = (\lambda/z - 1/2)W_{\lambda,\mu}(z) - \frac{1}{z}\left[\mu^2 - (\lambda - 1/2)^2\right]W_{\lambda-1,\mu}(z)$$

и первая производная для $W_{-1/4;1/4}(x_1)$ имеет вид

$$\left(W_{-1/4;1/4}(\sigma)\right)^{/}=\left(-\frac{1}{4\sigma}-\frac{1}{2}\right)W_{-1/4,1/4}(\sigma)-\frac{1}{2\sigma}W_{-5/4,1/4}(\sigma),$$

то решение (17) записывается в таком виде:

$$u_1(x_1,t)=A_oW_{-1/4,1/4}\left(a(x_1-c_Lt)\right)-(1/2)t\alpha c_La^2(A_o)^2\times$$

$$\times\left[\left(-\frac{1}{4\left(a(x_1-c_Lt)\right)}-\frac{1}{2}\right)W_{-1/4,1/4}\left(a(x_1-c_Lt)\right)-\frac{1}{2\left(a(x_1-c_Lt)\right)}W_{-5/4,1/4}\left(a(x_1-c_Lt)\right)\right]^2. \quad (20)$$

Две особенности решения (20) следуют из его вида: оно описывает изменение начального профиля одиночной волны (вследствие прямой зависимости нелинейной составляющей от времени) и «расплывание» начального профиля (вследствие зависимости нелинейной составляющей от значения фазы волны – фактически, от расположения точки на начальном профиле волны).

4. Цилиндрическая радиальная волна смещения. Нелинейное волновое уравнение.

Цилиндрической радиальной волной смещения называют в классической линейной теории упругости волну, которая распространяется в бесконечном пространстве с цилиндрической круговой полостью, к граничной поверхности которой приложен импульс, возбуждающий движение в радиальном направлении. В простейшем случае импульс равномерный в пространстве и гармонический во времени. Цилиндрическая система координат $Or\vartheta z$ выбирается таким образом, что ось Oz совпадает с осью полости, и задача о движении волны становится осесимметричной и зависимой лишь от радиуса r и времени t. Ненулевыми являются только радиальное смещение u_r и три компонента тензора напряжений $\sigma_{rr},\sigma_{\vartheta\vartheta},\sigma_{zz}$. Уравнение движения имеет вид [3, 22]

$$\mu\left(u_{r,rr}+\frac{1}{r}u_{r,r}-\frac{u_r}{r^2}\right)+(\lambda+\mu)\left[\frac{1}{r}(ru_r)_{,r}\right]_{,r}-\rho u_{r,tt}=0. \quad (21)$$

Обычно вводится потенциал $\Phi(r,t)$

$$u_r=\Phi_{,r} \quad (22)$$

и тогда уравнение (21) преобразуется в более простое

$$\Phi_{,tt}-(c_L)^2\left(\Phi_{,rr}+\frac{1}{r}\Phi_{,r}\right)=0. \quad (23)$$

Основанное на модели Мэрнагана нелинейное уравнение, соответствующее линейному уравнению (21), имеет вид [22]

$$(c_L)^{-2}u_{r,tt}-\left(u_{r,rr}+\frac{u_{r,r}}{r}-\frac{u_r}{r^2}\right)=S(u_r,u_{r,r},u_{r,rr}); \quad (24)$$

$$S\left(u_r,u_{r,r},u_{r,rr}\right)=-\tilde{N}_1u_{r,rr}u_{r,r}-\tilde{N}_2\frac{1}{r}u_{r,rr}u_r-\tilde{N}_3\frac{1}{r^2}u_{r,r}u_r-\tilde{N}_4\frac{1}{r}\left(u_{r,r}\right)^2-\tilde{N}_5\frac{1}{r^3}\left(u_r\right)^2; \quad (25)$$

$$\tilde{N}_1=3+\frac{2(A+3B+C)}{\lambda+2\mu};\ \tilde{N}_2=\frac{\lambda+2B+2C}{\lambda+2\mu};\ \tilde{N}_3=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu};$$

$$\tilde{N}_4=\frac{2\lambda+3\mu+A+2B+2C}{\lambda+2\mu};\ \tilde{N}_5=\frac{2\lambda+3\mu+A+2B+C}{\lambda+2\mu}.$$

Частная задача о гармонической во времени волне смещения, распространяющейся от цилиндрической полости радиуса r_o вследствие приложенных гармонической во времени нагрузки $\sigma^{rr}(r_o, t) = p_o e^{i\omega t}$ или гармонического во времени смещения $u_r(r_o, t) = u_{ro} e^{i\omega t}$, описана в [22] для уравнения (25) в рамках метода последовательных приближений с удержанием лишь первых двух аппроксимаций.

Первая (линейная) аппроксимация описывается аналитически через функцию Ханкеля первого рода и первого порядка

$$u_r^{(1)}(r,t) = u_r^o\, H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t}, \tag{26}$$

где u_r^o – заданный в условии на поверхности полости амплитудный множитель

$$u_{ro} = -\frac{p_o k_L}{k_L(\lambda+2\mu) H_0^{1)}(k_L r_o) - \dfrac{2\mu}{r_o} H_1^{1)}(k_L r_o)};$$

$k_L = (\omega/v_L),\ v_L = \sqrt{[(\lambda+2\mu)/\rho]}$ – волновое число и фазовая скорость линейной плоской продольной волны.

Примечание 8. Решение (26) свидетельствует, что волна гармонична во времени, а по пространственной координате гармонична лишь асимптотично. Интенсивность линейной радиальной цилиндрической волны уменьшается со временем распространения вследствие свойств функции Ханкеля $H_1^{(1)}$.

Нелинейная волна в рамках первых двух аппроксимаций аналитически представляется в виде [22]

$$u_r(r,t) = u_r^{(1)}(r,t) + u_r^{(2)}(r,t). \tag{27}$$

Второе приближение определялось двумя способами. Первый способ основан на предположении, что четыре из пяти нелинейных составляющих в (25) включают множители r^{-1}, r^{-2}, r^{-3} и поэтому с увеличением расстояния от полости мало влияют на окончательный результат. Иными словами, уравнение (24) анализируется при условии

$$S(u_r, u_{r,r}, u_{r,rr}) = -\tilde{N}_1 u_{r,rr} u_{r,r}. \tag{28}$$

Далее используется приближенное представление функций Ханкеля [12, 18]

$$H_p^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i[z-\pi/2(p+1/2)]} \left\{ 1 + i\frac{4p^2-1}{8z} - \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)}{2!(8z)^2} + \cdots \right\}. \tag{29}$$

В итоге, нелинейное решение имеет вид

$$u_r(r,t) = u_r^{(1)}(r,t) + u_r^{(2)}(r,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_r^o e^{i(k_L r - \omega t - \pi/4)} \frac{1}{\sqrt{k_L r}} \left(1 - \frac{1}{8}\frac{i}{k_L r} - \frac{9}{128(k_L r)^2} \right) + \tag{30}$$

$$+ \frac{r(u_r^o)^2}{\pi k_L} (k_L)^2 N_1 e^{i2(k_L r - \omega t - \pi/2)} \left[-\frac{2}{3}\frac{1}{k_L r} + \frac{5}{18}\frac{i}{(k_L r)^2} + \frac{151}{288}\frac{1}{(k_L r)^3} \right].$$

Второй способ учитывает все нелинейные составляющие в уравнении (24) и использует рекуррентные формулы для производных функций Ханкеля и факт, что произведения $\left(H_0^{(1)}(k_L r)\right)^2, \left(H_1^{(1)}(k_L r)\right)^2,\ H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r)$ не являются решениями линейного аналога уравнения (24). Соответствующее второму способу решение имеет вид

$$u_r(r,t) = u_r^{(1)}(r,t) + u_r^{(2)}(r,t) = u_{ro}\, H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t} +$$

$$+ \left\{ B_{00} \left[H_0^{(1)}(k_L r) \right]^2 + B_{11} \left[H_1^{(1)}(k_L r) \right]^2 + B_{01} H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r) \right\} e^{2i\omega t}. \tag{31}$$

Проведенное числовое моделирование для металлических конструкционных материалов (см. Примечание 4) показало, что начиная с довольно близкого к полости расстояния решения (30) и (31) практически идентичны. Это дает основания для следующего изменения начального нелинейного уравнения (24): проигнорируем только две из пяти нелинейных составляющих и сохраним справа в (24) выражение

$$-\tilde{N}_1 u_{r,rr} u_{r,r} - \tilde{N}_3 \frac{1}{r^2} u_{r,r} u_r - \tilde{N}_4 \frac{1}{r} \left(u_{r,r}\right)^2 ; \tag{32}$$

представим уравнение (24) в виде

$$u_{r,rr}\left(1-\tilde{N}_1 u_{r,r}\right)+\frac{1}{r} u_{r,r}\left(1-\tilde{N}_4 u_{r,r}\right)-\frac{u_r}{r^2}\left(1-\tilde{N}_3 u_{r,r}\right)-\frac{1}{\left(c_L\right)^2} u_{r,tt}=0 ;$$

примем приближенно, что $\tilde{N}_1 \approx \tilde{N}_3 \approx \tilde{N}_4$ (в действительности, $\tilde{N}_1 > \tilde{N}_4 \gg \tilde{N}_3$), и получим окончательное выражение для нелинейного волнового уравнения

$$\left(c_L\right)^2\left(1-\tilde{N}_1 u_{r,r}\right)\left(u_{r,rr}+\frac{1}{r} u_{r,r}-\frac{u_r}{r^2}\right)-u_{r,tt}=0. \tag{33}$$

Уравнение для цилиндрической радиальной волны (33) имеет такую же структуру, как уравнение (8) для плоской продольной волны.

5. Цилиндрическая радиальная волна смещения. Приближенный метод анализа. Случай, когда начальный профиль описывается аналитически функцией Макдональда.

Применим к уравнению (33) приближенный метод анализа решения в виде одиночной волны, который применялся к уравнению (10).

Предположим, что начальный профиль волны описывается финитной или с финитным весом функцией $u_r(r, t=0)=F(r)$ и одиночная волна распространяется в виде

$$u_r(r, t)=F\left(a(r-v t)\right), \tag{34}$$

где скорость волны определяется выражением

$$v=\sqrt{1+\tilde{N}_1 u_{r,r}}\, c_L . \tag{35}$$

Примечание 9. Параметр a введен в представление (34) с целью выбора длины подошвы одиночной волны – в зависимости от значения этого параметра подошва волны может или сужаться или расширяться. В гармонической волне такой параметр соответствует длине волны $\lambda=(2\pi/k)$.

Примем ограничение в представлении (35)

$$\tilde{N}_1 u_{r,r} \ll 1 \tag{36}$$

и представим приближенно решение уравнения (33) в виде

$$u_r(r, t) \cong F\left[a\left(r-c_L t\right)-(1/2) \tilde{N}_1 u_{r,r} t\right]. \tag{37}$$

Обозначим фазу волны с постоянной фазовой скоростью как $\sigma=a(r-c_L t)$ и дополнительный малый параметр как $\delta=-(1/2)\tilde{N}_1 a c_L u_{r,r} t$, представим решение (37) (одиночную волну) в виде ряда Тейлора подобно формуле (16) и ограничим рассмотрение первыми двумя членами ряда из-за малости δ. Тогда ввиду равенства

$$u_{r,r}(r,t) \approx F_\sigma^{\prime}(\sigma+\delta) \cdot \sigma_r^{\prime}=F_\sigma^{\prime}(\sigma+\delta) \cdot\left(1-(1/2) \tilde{N}_1 a c_L u_{r,rr} t\right) \approx F_\sigma^{\prime}$$

решению (37) можно придать вид

$$u_r(r, t) \approx F(\sigma)+F^{\prime}(\sigma)\left[\delta=-(1/2) \tilde{N}_1 a c_L u_{r,r} t\right]=F(\sigma)-(1/2) \tilde{N}_1 a c_L t\left[F^{\prime}(\sigma)\right]^2 . \tag{38}$$

Как и представление (17) для одиночной плоской продольной волны, приближенное представление решения (38) для одиночной цилиндрической радиальной волны имеет общий характер и для разных конкретно выбранных функций будет описывать один и тот же нелинейный волновой эффект – возникновение второй гармоники или подобных ей новых составляющих и увеличение амплитуды второй составляющей со временем распространения волны.

Однако в данном случае функция $F(r)$ должна быть решением линейного аналога нелинейного волнового уравнения (33) в цилиндрических координатах. Поскольку движение одиночной волны не предполагается гармоничным во времени, то цилиндрическая функция действительного аргумента – функция Ханкеля $H_\lambda(r)$ [12, 18] – уже не является решением уравнения

$$\left(c_L\right)^2\left(u_{r,rr}+\frac{1}{r}u_{r,r}-\frac{u_r}{r^2}\right)-u_{r,tt}=0\,. \tag{39}$$

Решением уравнения (39), имеющим вид (34), является цилиндрическая функция мнимого аргумента – функция Макдональда $K_\lambda(r)$ [12,18].

Итак, выберем форму начального профиля волны в виде функции $K_0(ar)$ и подставим полученное конкретное выражение в формулу (38). Тогда получим

$$u_r\left(r,t\right)\approx K_0\left(\sigma\right)-\left(1/2\right)\tilde{N}_1 ac_L t\left[K_0^{/}\left(\sigma\right)\right]^2\,. \tag{40}$$

Использовав известную [10] формулу $K_0^{/}\left(\sigma\right)=-K_1\left(\sigma\right)$, решение (40) можно преобразовать к другому виду

$$u_r\left(r,t\right)\approx K_0\left(a\left(r-c_L t\right)\right)-\left(1/2\right)\tilde{N}_1 ac_L t\left[K_1\left(a\left(r-c_L t\right)\right)\right]^2\,. \tag{41}$$

Решение (41) подтверждает основной вывод о постепенном изменении профиля волны при ее распространении и также позволяет сделать более конкретное заключение о механизме изменения – для каждого конкретного значения времени и фазы (конкретной точки на профиле волны) соотношение линейной и нелинейной добавок будет своим.

Заключение.

Итак, распространение плоской продольной и цилиндрической радиальной одиночных волн можно описать в простейшем приближенном случае нелинейным волновыми уравнениями одинаковой структуры и получить приближенное решение одним и тем же способом. Полученные решения также имеют одинаковую структуру. Решение для разных конкретно выбранных функций, задающих профиль волны, описывает один и тот же нелинейный волновой эффект – возникновение (помимо первой линейной составляющей) второй нелинейной составляющей и увеличение амплитуды второй составляющей со временем распространения волны. Также для каждого конкретного значения времени и фазы (вследствие зависимости нелинейной составляющей от значения фазы волны – фактически, от расположения точки на начальном профиле волны) соотношение линейной и нелинейной добавок будет своим, что проявляется в том, что дисторсия начального профиля волны увеличивается от центральной части одиночной волны до его хвостовой части – профиль как бы «расплывается».

РЕЗЮМЕ. Розглянуто два типи поодиноких пружних хвиль: плоска поздовжна хвиля зміщення (хвиля поздовжного зміщення в напрямку осі абсцис в декартових координатах) і циліндрична радіальна хвиля зміщення (хвиля зміщення в напрямку радіальної координати в циліндричних координатах). Основна новація полягає у тому, що відповідні цим хвилям нелінійні хвильові рівняння можуть бути записані в однаковому за структурою вигляді і далі можуть бути проаналізовані за допомогою однакового для обох хвиль методу. В результаті, теоретично описано дисторсію початкового профіля хвилі у вигляді функції Уіттекера (плоска хвиля) і функції Макдональда (циліндрична хвиля).

1. *Бабич В.М., Киселев А.П.* Упругие волны. Высокочастотная теория. – Санкт-Петерсбург: БХВ-Петербург, 2014. – 320 с.
2. *Рущицкий Я.Я.* Об ограничениях значений градиентов перемещений для упругих материалов // Прикл. механика. – 2016. – **51**, № 2. – С. 30 – 45.
3. *Рущицький Я.Я., Цурпал С.І.* Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – К.: Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка, 1998. – 377 с.
4. *Alonso M., Reguera N.* Numerical detection and generation of solitary waves for a nonlinear wave equation // Wave Motion. – 2015. – **56**. – P. 137 – 146.
5. *Berezovski A., Maugin G.A., Engelbrecht J.* Numerical Simulation of Waves and Fronts in Inhomogeneous Solids. – Singapore-London: World Scientific, 2008. – 250 p.
6. *Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Spatial Problems of the Fracture of Materials Loaded along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 5. – P. 489 – 560.
7. *Cattani C., Rushchitsky J.* Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro and Nanostructure. – Singapore-London: World Scientific, 2007. – 466 p.
8. *Destrade M., Saccomandi G.* Finite amplitude elastic waves propagating in compressible solids // Physical Reviews E. – 2005. – **72**, N 1. – P. 016620.
9. *Guz A.N.* Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials. Focus on Ukrainian Research (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N3. – P. 231 – 252.
10. *Erofeev V.I.* Wave Processes in Solids with Microstructure. - Singapore-London: World Scientific, 2003. – 276 p.
11. *Janno J., Seletski A.* Reconstruction of coefficients of higher order nonlinear wave equation by measuring solitary waves // Wave Motion. – 2015. – **52**. – P. 15 – 25.
12. *Gradstein I.S., Ryzhik I.M.* Table of Integrals, Series, and Products. 7th revised edition. Eds. Jeffrey A., Zwillinger D. – New York: Academic Press Inc., 2007. – 1200 p.
13. *Hamilton M.F., Il'inskii Yu.A., Zabolotskaya E.A.* Model equations for nonlinear surface waves // J. Acoust. Soc. Am. – 1998. – **103**, N5. – P. 2925.
14. *Hussein M.I., Khayehtourian R.* Nonlinear elastic waves in solids: Deriving simplicity from complexity // Bulletin of the American Physical Society. – 2015. – **60**, N1. http://meetings.aps.org/link/BAPS.2015,MAR Q8.10.
15. *Maugin G.A.* Nonlinear Waves in Elastic Crystals. – Oxford: Oxford University Press, 1999. – 324 p.
16. *Narahara K.* Asymmetric solitary waves in coupled nonlinear transmissions lines // Wave Motion. – 2015. – **58**. – P. 13 – 21.
17. *Olde Daalhuis A.B.* Confluent Hypergeometric Functions. Chapter 13. P. 383 – 402. Whittaker Functions. 13.14 – 13.26. In: Olver F.W.J., Lozier D.W., Bousvert R.F., Clark C.W. (eds) NIST (National Institute of Standards and Technology) Handbook of Mathematical Functions. – Cambridge: Cambridge University Press, 2010. – 968 p.
18. *Olver F.W.J., Maximon L.C.* Bessel Functions. Chapter 10. P.215-286. In: Olver F.W.J., Lozier D.W., Bousvert R.F., Clark C.W. (eds) NIST (National Institute of Standards and Technology) Handbook of Mathematical Functions. – Cambridge: Cambridge University Press, 2010. – 968 p.
19. *Porubov A.V.* Amplification of Nonlinear Strain Waves in Solids. – Singapore-London: World Scientific, 2003. – 228 p.
20. *Richoux O., Lombard B., Mercier J.-F.* Generation of acoustic solitary waves n a lattice of Helmholtz resonators // Wave Motion. – 2015. – **58**. – P. 85 – 99.
21. *Rushchitsky J.J.* Certain Class of Nonlinear Hyperelastic Waves: Classical and Novel Models, Wave Equations, Wave Effects // Int. J. Appl. Math. and Mech. – 2013. – **9**, N 12. – P. 600 – 643.
22. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 455 p.
23. *Rushchitsky J.J., Guz I.A.* Theoretical Description of a Delamination Mechanism in Fibrous Micro- and Nanocomposites // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 10. – P. 1129 – 1136.
24. *Salupere A., Tamm K., Engelbrecht J.* Numerical simulation of solitary deformation waves in microstructured solids // Int. J. Non-Linear Mech. – 2008. – **43**. – P. 201 – 208.
25. *Stroisz A.M.* Nonlinear Elastic Waves for Estimation of Rock Properties // PhD Thesis, Norges Teknisk Universitet. 2013.

Поступила 30.12.2014 Утверждена в печать 31.03.2016