

Л. П. Хорошун

О ДЕФОРМИРОВАНИИ И КРАТКОВРЕМЕННОЙ  
ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО ВОЛОКНИСТОГО  
ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО КОМПОЗИТА

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина: e-mail: stochac@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** A structural theory of coupled processes of deformation and short-time damageability is constructed for the unidirectional fibrous composite materials with the physically nonlinear components, diagrams of deformation of which have the decreasing branches. The process of damaging is modeled by the dispersed damage of component microvolumes and forming instead of them the stochastically arranged quasi-spherical micropores. As a condition of the short-time damage of microvolume of material, the deformation criterion of strength relative to the second invariant of macrostrain deviator is assumed. A regularity of effect of fiber volume fraction on deformation and damageability of the fibrous unidirectional composite is studied.

**Key words:** fibrous unidirectional composite, short-time damageability, physical nonlinearity, stochastic structure, effective characteristics, balance equation of damage (porosity).

**Введение.**

В механике разрушения наряду с теорией трещин [1, 6, 10, 13] существенное внимание уделяется теории накопления повреждений [2 – 5, 7 – 9, 11, 12, 14], слияние которых ведет к образованию магистральных трещин. Здесь можно выделить направление, базирующееся на структурных представлениях [3, 7, 9 – 12, 14], и направления, связанные с введением определенных формальных параметров повреждаемости и уравнений, описывающих их эволюцию [2, 4, 5].

Структурные модели связанных процессов деформирования и повреждаемости однородных и композитных материалов [7, 9, 11, 12] основаны на представлении о стохастической микронеоднородности прочностных свойств материала, что ведет при нагружении к появлению и росту числа рассеянных микроразрушений. Моделирование микроразрушений квазисферическими пораами дает возможность описать связанные процессы деформирования и повреждаемости материала на основе моделей и методов механики стохастически неоднородных сред [8].

Разрушение микрообъемов материала в работах [7, 11, 12] определено силовыми критериями прочности Губера – Мизеса или Шлейхера – Надаи относительно соответствующих микронапряжений. Это позволило исследовать закономерности роста поврежденности (пористости) материала с увеличением макродеформаций и нелинейности зависимостей микронапряжений от макродеформаций, обусловленной повреждаемостью, для однородных и композитных материалов при заданных законах (линейных и нелинейных) деформирования неповрежденной части материала в случае однозначных зависимостей между микронапряжениями и микродеформациями. Очевидно, что при силовом критерии микропрочности относительно микронапряжений повреждаемость материала можно описать только для восходящей части нелинейной диаграммы деформирования микрообъема.

Данная работа посвящена построению структурной модели кратковременной повреждаемости однонаправленного волокнистого композитного материала на основе деформационного критерия микропрочности компонентов. Это дает возможность описать полный ресурс несущей способности композитного материала, включая и ниспадающие участки деформирования компонентов. Условие кратковременного разрушения микрообъемов компонентов принято в виде деформационного критерия прочности относительно вторых инвариантов девиаторов микродеформаций компонентов. Пределы кратковременной прочности компонентов являются случайными функциями координат, одноточечные распределения которых описываются степенными функциями на некотором отрезке или распределениями Вейбулла.

Деформированное состояние и эффективные деформативные свойства компонентов с системой стохастически расположенных микроразрушений определяются на основе стохастических уравнений нелинейной упругости пористых сред при заданных макродеформациях пористых компонентов. Макродеформации пористых компонентов и эффективные деформативные свойства волокнистого композита определяются на основе стохастических уравнений нелинейной упругости однонаправленного волокнистого нелинейно упругого материала при заданных макродеформациях композита. Исходя из условия эргодичности случайных полей кратковременной микропрочности из условия эргодичности случайных полей кратковременной микропрочности компонентов и свойств функций распределения, строятся уравнения баланса поврежденности (пористости) компонентов. Это позволяет замкнуть систему уравнений, описывающих связанные процессы деформирования однонаправленного волокнистого физически нелинейного материала и повреждаемости его компонентов на всем диапазоне микродеформаций неразрушенных частей компонентов.

На основе изложенной теории рассмотрены задачи о деформировании и повреждаемости однонаправленного волокнистого материала при условии, что волокна деформируются линейно-упруго без повреждений, а в нелинейно-упругом связующем, имеющем ниспадающую ветвь диаграммы деформирования, происходят микроповреждения. Исследовано влияние объемного содержания волокон на характер диаграмм деформирования композита и вид зависимостей упругих свойств от макродеформаций.

### §1. Исходные уравнения.

Рассмотрим двухкомпонентный композитный материал, образованный системой однонаправленных непрерывных изотропных волокон и связывающих их изотропной матрицей, имеющих объемные содержания соответственно  $c_1, c_2$ . Упругое деформирование компонентов принимаем физически нелинейным, которое сопровождается образованием рассеянных разрушений микрообъемов, обусловленным стохастической неоднородностью микропрочности. Разрушенные микрообъемы компонентов моделируем квазисферическими порами, причем их размеры и расстояния между ними принимаем пренебрежимо малыми по сравнению с диаметрами волокон и расстояниями между ними. Обозначим начальные пористости и полные пористости компонентов, соответственно,  $p_{10}, p_{20}$  и  $p_1, p_2$ , объемные модули сжатия и модули сдвига неразрушенных частей компонентов, соответственно,  $K_1, K_2$  и  $\mu_1, \mu_2$ , а также эффективные модули сжатия и модули сдвига пористых компонентов – соответственно,  $K_1^*, K_2^*$  и  $\mu_1^*, \mu_2^*$ .

Тогда определение напряженно-деформированного состояния и эффективных свойств однонаправленного волокнистого материала с пористыми компонентами сводится к двум однотипным последовательным задачам: 1) определение напряжений и деформаций неразрушенных частей компонентов  $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle < \varepsilon_{ij}^1 \rangle < \sigma_{ij}^2 \rangle < \varepsilon_{ij}^2 \rangle$  и эффективных свойств пористых компонентов  $K_1^*, \mu_1^*$  и  $K_2^*, \mu_2^*$  при заданных макродеформациях пористых компонентов  $\langle \varepsilon_{ij}^{*1} \rangle < \varepsilon_{ij}^{*2} \rangle$  и пористостях  $p_1, p_2$ ; 2) определе-

ние напряженно-деформированного состояния пористых компонентов  $\langle \sigma_{ij}^{*1} \rangle < \varepsilon_{ij}^{*1} \rangle < \sigma_{ij}^{*2} \rangle < \varepsilon_{ij}^{*2} \rangle$  и эффективных свойств однонаправленного волокнистого материала  $\lambda_{11}^*$ ,  $\lambda_{12}^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{33}^*$ ,  $\lambda_{44}^*$  при заданных макродеформациях композита  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ .

Каждая из выше указанных задач сводится к следующей формулировке. Рассматривается двухкомпонентный стохастический композитный материал с идеальной связью компонентов, представляющий собой микронеоднородную физически нелинейную статистически однородную упругую среду. Тогда зависимости между микронапряжениями  $\sigma_{ij}$  и микродеформациями  $\varepsilon_{ij}$  для произвольной точки можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijmn}(\varepsilon_{\alpha\beta}) \varepsilon_{mn}, \quad (1.1)$$

где тензор модулей упругости  $\lambda_{ijmn}$ , детерминировано зависящий от деформаций  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ , является случайной статистически однородной функцией координат  $x_r$ .

Если макрообъем композита находится в условиях макрооднородного деформирования, то микронапряжения  $\sigma_{ij}$  и микродеформации  $\varepsilon_{ij}$  будут статистически однородными случайными функциями координат, удовлетворяющими свойству эргодичности. Поэтому их математические ожидания  $\langle \sigma_{ij} \rangle < \varepsilon_{ij} \rangle$  в произвольной точке макрообъема равны, соответственно, макронапряжениям и макродеформациям [8]. На основе уравнений равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (1.2)$$

соотношений Коши

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.3)$$

и зависимостей (1.1) приходим к физически и статистически нелинейным уравнениям равновесия относительно перемещений  $u_i$

$$\left[ \lambda_{ijmn}(\varepsilon_{\alpha\beta}) u_{m,n} \right]_{,j} = 0. \quad (1.4)$$

Представляя случайные поля напряжений, деформаций и перемещений в виде суммы математических ожиданий и флуктуаций

$$\sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle + \sigma_{ij}^0; \quad \varepsilon_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \varepsilon_{ij}^0; \quad u_i = \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j + u_i^0, \quad (1.5)$$

приведем уравнение (1.4) к виду

$$\lambda_{ijmn}^c u_{m,nj}^0 + \left\{ \left[ \lambda_{ijmn}(\varepsilon_{\alpha\beta}) - \lambda_{ijmn}^c \right] \varepsilon_{mn} \right\}_{,j} = 0, \quad (1.6)$$

где  $\lambda_{ijmn}^c$  – тензор модулей упругости некоторого однородного тела сравнения. Граничное условие на бесконечно удаленной границе  $S$  области  $V$  макрообъема согласно (1.5) будет следующим:

$$u_i^0|_S = 0. \quad (1.7)$$

С помощью функции Грина  $G_{ij}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)})$ , удовлетворяющей уравнению

$$\lambda_{ijmn}^c G_{mk,jn}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) + \delta(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) \delta_{ik} = 0, \quad (1.8)$$

краевая задача (1.6), (1.7) сводится к интегральному уравнению относительно деформаций

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + K_{ijpq}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) \left[ \lambda_{pqmn}^{(2)}(\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)}) - \lambda_{pqmn}^c \right] \varepsilon_{mn}^{(2)}, \quad (1.9)$$

где интегральный оператор  $K_{ijpq}$  определяется правилом

$$K_{ijpq}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) \varphi^{(2)} = \int_{V^{(2)}} G_{(ip,j)q}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) \left( \varphi^{(2)} - \langle \varphi \rangle \right) dV^{(2)}, \quad (1.10)$$

причем индекс в круглых скобках сверху обозначает соответствующую точку пространства.

Нелинейные зависимости (1.1) для точки, находящейся в  $k$ -компоненте, имеют вид

$$\sigma_{ij}^k = \lambda_{ijmn}^k(\varepsilon_{\alpha\beta}^k) \varepsilon_{mn}^k, \quad (1.11)$$

где напряжения и деформации можно представить суммами средних и соответствующих флуктуаций по  $k$ -компоненту

$$\sigma_{ij}^k = \langle \sigma_{ij}^k \rangle + \sigma_{ij}^{k0}, \quad \varepsilon_{ij}^k = \langle \varepsilon_{ij}^k \rangle + \varepsilon_{ij}^{k0}. \quad (1.12)$$

Пренебрегая флуктуациями  $\sigma_{ij}^{k0}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{k0}$ , из (1.11), (1.12) получаем

$$\langle \sigma_{ij}^k \rangle = \lambda_{ijmn}^k \left( \langle \varepsilon_{\alpha\beta}^k \rangle \right) \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle, \quad (1.13)$$

откуда усреднением по макрообъему находим выражение для макронапряжений  $N$ -компонентного материала

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sum_{k=1}^N c_k \lambda_{ijmn}^k \left( \langle \varepsilon_{\alpha\beta}^k \rangle \right) \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle. \quad (1.14)$$

Усредним интегральное уравнение (1.9) по условной плотности  $f(\varepsilon_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(2)})$ ,  $\lambda_{ijmn}^{(2)} \Big|_v^{(1)}$  (плотность распределения деформаций в точках  $x_r^{(1)}$ ,  $x_r^{(2)}$  и модулей упругости в точке  $x_r^{(2)}$  при условии, что точка  $x_r^{(1)}$  находится в  $v$ -компоненте). Тогда, пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах компонента, получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \sum_{k=1}^N K_{ijpq}^{vk} \left[ \lambda_{pqmn}^k \left( \langle \varepsilon_{\alpha\beta}^k \rangle \right) - \lambda_{pqmn}^c \right] \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle \quad (v=1, \dots, N). \quad (1.15)$$

Матричный оператор  $K_{ijpq}^{vk}$  определяется согласно (1.10) равенством

$$K_{ijpq}^{vk} = K_{ijpq}(x_r^{(1)} - x_r^{(2)}) p_{vk} \left( x_r^{(1)} - x_r^{(2)} \right) \quad (v, k=1, \dots, N), \quad (1.16)$$

где  $p_{vk} \left( x_r^{(1)} - x_r^{(2)} \right) = f \left( \begin{smallmatrix} (2) \\ k \end{smallmatrix} \Big| \begin{smallmatrix} (1) \\ v \end{smallmatrix} \right)$  – вероятность перехода из  $v$ -компонента в точке  $x_r^{(1)}$  в  $k$ -компонент в точке  $x_r^{(2)}$ , удовлетворяющая условиям

$$c_k P_{vk}(x_r) = c_v P_{vk}(x_r), \quad P_{vk}(0) = \delta_{vk}, \quad P_{vk}(\infty) = c_k, \quad \sum_{k=1}^N P_{vk}(x_r) = 1. \quad (1.17)$$

Рассмотрим двухкомпонентный композитный материал с изотропной матрицей и изотропными однонаправленными квазисфероидальными включениями, т.е.

$$\lambda_{ijmn}^k (< \varepsilon_{\alpha\beta}^k >) = \lambda_k (< \varepsilon_{\alpha\beta}^k >) \delta_{ij} \delta_{mn} + 2\mu_k (< \varepsilon_{\alpha\beta}^k >) I_{ijmn} \quad (k=1, 2); \quad (1.18)$$

$$\lambda_{ijmn}^c = \lambda_c \delta_{ij} \delta_{mn} + 2\mu_c I_{ijmn}; \quad P_{vk} = c_k + (\delta_{vk} - c_k) \exp\left[-\sqrt{n_1^2 (x_1^2 + x_2^2) + n_2^2 x_3^2}\right],$$

где  $\lambda_k, \mu_k, \lambda_c, \mu_c$  – модули упругости компонентов и тела сравнения;  $I_{ijmn} = \frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})$  – единичный тензор;  $n_1, n_2$  – величины, обратные к полуосям квазисфероидальных включений в поперечном и продольном направлениях. В этом случае оператор (1.16) имеет вид

$$K_{ijpq}^{vk} = (\delta_{vk} - c_k) \left\{ a_1 \delta_{ij} \delta_{pq} + a_2 I_{ijpq} + a_3 \left[ \delta_{ij} \delta_{3p} \delta_{3q} + \delta_{i3} \delta_{j3} (\delta_{pq} - 2\delta_{3p} \delta_{3q}) + a_4 \delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{3p} \delta_{3q} \right] + a_5 (I_{i3pq} \delta_{j3} + I_{j3pq} \delta_{i3} - 2\delta_{i3} \delta_{j3} \delta_{3p} \delta_{3q}) \right\}; \quad (1.19)$$

$$a_1 = \frac{(\lambda_c + \mu_c)(1 - s_1 - s_2)}{8\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)}; \quad a_2 = -\frac{(\lambda_c + 3\mu_c)(1 - s_1) + (\lambda_c + \mu_c)s_2}{4\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)};$$

$$a_3 = \frac{(\lambda_c + \mu_c)(s_1 + 5s_2 - 1)}{8\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)}; \quad a_4 = \frac{\lambda_c + 5\mu_c - (\lambda_c + 13\mu_c)s_1 - 5(\lambda_c + \mu_c)s_2}{8\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)};$$

$$a_5 = \frac{\mu_c - (2\lambda_c + 5\mu_c)s_1 + 5(\lambda_c + \mu_c)s_2}{4\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)}; \quad s_1 = \frac{1-s}{1-n^2}; \quad s_2 = \frac{1-(1+2n^2)s_1}{2(1-n^2)}; \quad n = \frac{n_1}{n_2};$$

$$s = \begin{cases} -\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \ln(n - \sqrt{n^2-1}), & n \geq 1; \\ \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \arcsin \sqrt{1-n^2}, & n \leq 1. \end{cases}$$

Отсюда, как предельные случаи при  $n=0$ ,  $n=\infty$ ,  $n=1$ , следуют выражения оператора для слоистых, однонаправленных волокнистых и зернистых материалов, соответственно.

## §2. Кратковременная повреждаемость однонаправленного волокнистого материала.

Принимаем, что модули объемного сжатия волокон  $K_1$  и связующего  $K_2$  постоянны, а модули сдвига  $\mu_1, \mu_2$  заданы функциями

$$\mu_i(J_\varepsilon^i) = \begin{cases} \mu_{i0}; & J_\varepsilon^i < \frac{k_i}{2\mu_{i0}}; \\ \mu_i' + \left(1 - \frac{\mu_i'}{\mu_{i0}}\right) \frac{k_i}{2J_\varepsilon^i}; & J_\varepsilon^i \geq \frac{k_i}{2\mu_{i0}}; \end{cases} \quad (2.1)$$

$$J_\varepsilon^i = \left( \langle \varepsilon_{pq}^i \rangle' \langle \varepsilon_{pq}^i \rangle' \right)^{1/2} \quad (i=1,2),$$

где  $\langle \varepsilon_{pq}^i \rangle'$  – девиатор средних по неразрушенной части  $i$ -компонента деформаций. При этом согласно (1.15) – (1.19) для  $n=1$  деформации  $\langle \varepsilon_{pq}^i \rangle$  и эффективные модули пористых волокон и связующего  $K_v^*$ ,  $\mu_v^*$  определяются соотношениями

$$\langle \varepsilon_{pq}^v \rangle = \left[ \frac{\bar{K}_v}{\bar{K}_v + K_v p_v} V_{ijpq} + \frac{\bar{\mu}_v}{\bar{\mu}_v + \mu_v(J_\varepsilon^v)} D_{ijpq} \right] \langle \varepsilon_{pq}^{*v} \rangle;$$

$$K_v^* = \frac{4\mu_{v0}\xi_v(1-p_v)^2}{4+(3\xi_v-4)p_v}; \quad \mu_v^* = \frac{\mu_{v0}\hat{\mu}_v(J_\varepsilon^v)(1-p_v)^2}{1+[\eta_v\hat{\mu}_v(J_\varepsilon^v)-1]p_v}; \quad \mu_{v0}^* = \frac{\mu_{v0}(1-p_v)^2}{1+(\eta_v-1)p_v}; \quad (2.2)$$

$$\mu_v = \mu_{v0}\hat{\mu}_v(J_\varepsilon^v); \quad \bar{K}_v = \frac{4}{3}\mu_{v0}(1-p_v); \quad \bar{\mu}_v = \frac{1}{\eta_v}\mu_{v0}(1-p_v); \quad \xi_v = \frac{K_v}{\mu_{v0}};$$

$$\eta_v = \frac{6(K_v + 2\mu_{v0})}{9K_v + 8\mu_{v0}}; \quad V_{ijpq} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{pq}; \quad D_{ijpq} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{pq}\right) \quad (v=1,2).$$

Средние деформации  $\langle \varepsilon_{ij}^{*v} \rangle$   $v$ -компонента связаны с макродеформациями  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ , согласно (1.15) – (1.19) для  $n=\infty$ , соотношениями

$$\langle \varepsilon_{11}^{*v} \rangle = l_{v1}^* \langle \varepsilon_{11} \rangle + l_{v2}^* \langle \varepsilon_{22} \rangle + l_{v3}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{12}^{*v} \rangle = (l_{v1}^* - l_{v2}^*) \langle \varepsilon_{12} \rangle;$$

$$\langle \varepsilon_{22}^{*v} \rangle = l_{v2}^* \langle \varepsilon_{11} \rangle + l_{v1}^* \langle \varepsilon_{22} \rangle + l_{v3}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{13}^{*v} \rangle = l_{v4}^* \langle \varepsilon_{13} \rangle;$$

$$\langle \varepsilon_{33}^{*v} \rangle = \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{23}^{*v} \rangle = l_{v4}^* \langle \varepsilon_{23} \rangle,$$

где величины  $l_{v1}^*$ ,  $l_{v2}^*$ ,  $l_{v3}^*$ ,  $l_{v4}^*$  определяются формулами

$$l_{v1}^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k_v^* + \bar{k}^*} \left( \frac{c_1}{k_1^* + \bar{k}^*} + \frac{c_2}{k_2^* + \bar{k}^*} \right)^{-1} + \frac{1}{m_v^* + \bar{m}^*} \left( \frac{c_1}{m_1^* + \bar{m}^*} + \frac{c_2}{m_2^* + \bar{m}^*} \right)^{-1} \right];$$

$$l_{v2}^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k_v^* + \bar{k}^*} \left( \frac{c_1}{k_1^* + \bar{k}^*} + \frac{c_2}{k_2^* + \bar{k}^*} \right)^{-1} - \frac{1}{m_v^* + \bar{m}^*} \left( \frac{c_1}{m_1^* + \bar{m}^*} + \frac{c_2}{m_2^* + \bar{m}^*} \right)^{-1} \right]; \quad (2.4)$$

$$l_{v3}^* = \frac{1}{2(k_v^* + \bar{k}^*)} \left[ \left( \frac{c_1}{k_1^* + \bar{k}^*} + \frac{c_2}{k_2^* + \bar{k}^*} \right)^{-1} \left( \frac{c_1\lambda_1^*}{k_1^* + \bar{k}^*} + \frac{c_2\lambda_2^*}{k_2^* + \bar{k}^*} \right) - \lambda_v^* \right];$$

$$l_{v4}^* = \frac{1}{\mu_v^* + \bar{\mu}^*} \left( \frac{c_1}{\mu_1^* + \bar{\mu}^*} + \frac{c_2}{\mu_2^* + \bar{\mu}^*} \right)^{-1}; \quad \lambda_v^* = K_v^* - \frac{2}{3} \mu_v^*; \quad k_v^* = K_v^* + \frac{1}{3} \mu_v^*;$$

$$m_v^* = \mu_v^*; \quad \bar{k}^* = m_c^*; \quad \bar{m}^* = \frac{k_c^* m_c^*}{k_c^* + 2m_c^*}; \quad m_c^* = \left( \frac{c_1}{\mu_{10}^*} + \frac{c_2}{\mu_{20}^*} \right)^{-1};$$

$$k_c^* = \left( \frac{c_1}{K_1^*} + \frac{c_2}{K_{21}^*} \right)^{-1} + \frac{1}{3} m_c^*; \quad \bar{\mu}^* = \mu_c^*; \quad \mu_c^* = m_c^*.$$

Здесь принято, что жесткость поврежденных волокон больше жесткости поврежденного связующего.

Эффективные модули однонаправленного волокнистого материала, согласно (1.14), (1.18), (1.19), (2.4), определяются выражениями

$$k^* = \left( \frac{c_1 k_1^*}{k_1^* + \bar{k}^*} + \frac{c_2 k_2^*}{k_2^* + \bar{k}^*} \right) \left( \frac{c_1}{k_1^* + \bar{k}^*} + \frac{c_2}{k_2^* + \bar{k}^*} \right)^{-1};$$

$$m^* = \left( \frac{c_1 \mu_1^*}{\mu_1^* + \bar{m}^*} + \frac{c_2 \mu_2^*}{\mu_2^* + \bar{m}^*} \right) \left( \frac{c_1}{\mu_1^* + \bar{m}^*} + \frac{c_2}{\mu_2^* + \bar{m}^*} \right)^{-1};$$

$$\lambda_{11}^* = k^* + m^*; \quad \lambda_{12}^* = k^* - m^*; \quad \lambda_{13}^* = \left( \frac{c_1 \lambda_1^*}{k_1^* + \bar{k}^*} + \frac{c_2 \lambda_2^*}{k_2^* + \bar{k}^*} \right)^2 \left( \frac{c_1}{k_1^* + \bar{k}^*} + \frac{c_2}{k_2^* + \bar{k}^*} \right)^{-1};$$

$$\lambda_{33}^* = c_1 (\lambda_1^* + 2\mu_1^*) + c_2 (\lambda_2^* + 2\mu_2^*) + \left( \frac{c_1 \lambda_1^*}{k_1^* + \bar{k}^*} + \frac{c_2 \lambda_2^*}{k_2^* + \bar{k}^*} \right)^2 \left( \frac{c_1}{k_1^* + \bar{k}^*} + \frac{c_2}{k_2^* + \bar{k}^*} \right)^{-1} -$$

$$- \left( \frac{c_1 \lambda_1^{*2}}{k_1^* + \bar{k}^*} + \frac{c_2 \lambda_2^{*2}}{k_2^* + \bar{k}^*} \right); \quad (2.5)$$

$$\mu^* = \left( \frac{c_1 \mu_1^*}{\mu_1^* + \bar{\mu}^*} + \frac{c_2 \mu_2^*}{\mu_2^* + \bar{\mu}^*} \right) \left( \frac{c_1}{\mu_1^* + \bar{\mu}^*} + \frac{c_2}{\mu_2^* + \bar{\mu}^*} \right)^{-1}.$$

Из соотношений (2.2) – (2.4) определяем

$$J_\varepsilon^v = \frac{1 - p_v}{1 + [\eta_v \hat{\mu}_v (J_\varepsilon^v) - 1] p_v} J_\varepsilon^{*v};$$

$$J_\varepsilon^{*v} = \left\{ \frac{2}{3} (l_{v1}^{*2} + l_{v2}^{*2} - l_{v1}^* l_{v2}^*) (\langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \varepsilon_{22} \rangle)^2 - 2 (l_{v1}^* - l_{v2}^*)^2 \langle \varepsilon_{11} \rangle \langle \varepsilon_{22} \rangle - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3} (l_{v1}^* + l_{v2}^*) (1 - l_{v3}^*) (\langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \varepsilon_{22} \rangle) \langle \varepsilon_{33} \rangle + \frac{2}{3} (1 + 2l_{v3}^{*2}) \langle \varepsilon_{33} \rangle^2 + \right.$$

$$\left. + 2 \left[ (l_{v1}^* - l_{v2}^*)^2 \langle \varepsilon_{12} \rangle^2 + l_{v4}^{*2} (\langle \varepsilon_{13} \rangle^2 + \langle \varepsilon_{23} \rangle^2) \right] \right\}^{1/2}. \quad (2.6)$$

Если принять условие разрушения микрообъема неразрушенной части  $v$ -компонента в виде деформационного критерия прочности

$$J_{\varepsilon}^v = r_v \quad (v=1, 2) \quad (2.7)$$

и учесть, что предел прочности  $r_v$  образует эргодическое случайное поле, то, исходя из свойств одноточечной функции распределения  $F_v(r_v)$  и моделируя разрушенные микрообъемы случайно расположенными квазисферическими порами, приходим к уравнению баланса поврежденности (пористости)  $v$ -компонента

$$p_v = p_{v0} + (1 - p_{v0}) F_v(J_{\varepsilon}^v). \quad (2.8)$$

На основе (2.6), (2.8) получим систему нелинейных уравнений относительно инвариантов  $J_{\varepsilon}^v$  и пористостей  $p_v$ ,

$$\begin{aligned} J_{\varepsilon}^v \left\{ 1 + \left[ \eta_v \hat{\mu}_v(J_{\varepsilon}^v) - 1 \right] p_v \right\} = (1 - p_v) & \left\{ \frac{2}{3} (l_{v1}^{*2} + l_{v2}^{*2} - l_{v1}^* l_{v2}^*) (\langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \varepsilon_{22} \rangle)^2 - \right. \\ & - 2 (l_{v1}^* - l_{v2}^*)^2 \langle \varepsilon_{11} \rangle \langle \varepsilon_{22} \rangle - \frac{2}{3} (l_{v1}^* + l_{v2}^*) (1 - l_{v3}^*) (\langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \varepsilon_{22} \rangle) \langle \varepsilon_{33} \rangle + \\ & + \frac{2}{3} (1 + 2l_{v3}^{*2}) \langle \varepsilon_{33} \rangle^2 + \\ & \left. + 2 \left[ (l_{v1}^* - l_{v2}^*)^2 \langle \varepsilon_{12} \rangle^2 + l_{v4}^{*2} (\langle \varepsilon_{13} \rangle^2 + \langle \varepsilon_{23} \rangle^2) \right] \right\}^{1/2}; \end{aligned}$$

$$p_v = p_{v0} + (1 - p_{v0}) F_v(J_{\varepsilon}^v) \quad (v=1, 2). \quad (2.9)$$

Рассмотрим случаи задания простых макродеформаций. В случае одноосной деформации поперек волокон

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0, \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = \langle \sigma_{12} \rangle = \langle \sigma_{13} \rangle = \langle \sigma_{23} \rangle = 0 \quad (2.10)$$

приходим к таким равенствам:

$$\begin{aligned} J_{\varepsilon}^{*v} = & \left\{ \frac{2}{3} (l_{v1}^{*2} + l_{v2}^{*2} - l_{v1}^* l_{v2}^*) (1 - \nu_{21}^*)^2 + 2 (l_{v1}^* + l_{v2}^*)^2 \nu_{21}^* + \frac{2}{3} \left[ (l_{v1}^* + l_{v2}^*) (1 - l_{v3}^*) (1 - \nu_{21}^*) \nu_{31}^* + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1 + 2l_{v3}^{*2}) \nu_{31}^{*2} \right] \right\}^{1/2} \langle \varepsilon_{11} \rangle; \langle \varepsilon_{22} \rangle = -\nu_{21}^* \langle \varepsilon_{11} \rangle; \langle \varepsilon_{33} \rangle = -\nu_{31}^* \langle \varepsilon_{11} \rangle; \end{aligned}$$

$$\nu_{21}^* = \nu_{12}^* = \frac{\lambda_{12}^* \lambda_{33}^* - \lambda_{13}^{*2}}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - \lambda_{13}^{*2}}; \nu_{31}^* = \frac{(\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*) \lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - \lambda_{13}^{*2}}; \langle \sigma_{11} \rangle = (\lambda_{11}^* - \nu_{21}^* \lambda_{12}^* - \nu_{31}^* \lambda_{13}^*) \langle \varepsilon_{11} \rangle. \quad (2.11)$$

При одноосной деформации вдоль волокон

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0; \langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{12} \rangle = \langle \sigma_{13} \rangle = \langle \sigma_{23} \rangle = 0 \quad (2.12)$$

имеют место соотношения



$$J_{\varepsilon}^{*v} = \left[ \frac{8}{3} (l_{v1}^{*2} + l_{v2}^{*2} - l_{v1}^* l_{v2}^*) v_{13}^{*2} - 2 (l_{v1}^* - l_{v2}^*)^2 v_{13}^{*2} + \frac{4}{3} (l_{v1}^* + l_{v2}^*) (1 - l_{v3}^*) v_{13}^{*2} + \frac{2}{3} (1 + 2l_{v3}^{*2}) \right]^{1/2} \times$$

$$\times \langle \varepsilon_{33} \rangle;$$

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle = \langle \varepsilon_{22} \rangle = -v_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad (2.13)$$

$$v_{13}^* = \frac{\lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*}; \quad \langle \sigma_{33} \rangle = (\lambda_{33}^* - 2v_{13}^* \lambda_{13}^*) \langle \varepsilon_{33} \rangle.$$

В случае сдвиговых деформаций

$$\langle \varepsilon_{12} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = \langle \sigma_{13} \rangle = \langle \sigma_{23} \rangle = 0 \quad (2.14)$$

и

$$\langle \varepsilon_{13} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = \langle \sigma_{12} \rangle = \langle \sigma_{23} \rangle = 0 \quad (2.15)$$

имеем, соответственно, формулы

$$J_{\varepsilon}^{*v} = \sqrt{2} (l_{v1}^* - l_{v2}^*) \langle \varepsilon_{12} \rangle; \quad \langle \sigma_{12} \rangle = 2m^* \langle \varepsilon_{12} \rangle; \quad (2.16)$$

$$J_{\varepsilon}^{*v} = \sqrt{2} l_{v4}^* \langle \varepsilon_{13} \rangle; \quad \langle \sigma_{13} \rangle = 2\mu^* \langle \varepsilon_{13} \rangle. \quad (2.17)$$

### §3. Численные результаты.

Численное исследование совместных процессов деформирования и повреждаемости однонаправленного волокнистого материала проведено для стеклопластика на основе отвержденного эпоксидного связующего, диаграмма деформирования которого имеет ниспадающий участок с безразмерными численными значениями следующих характеристик:

$$\frac{K_2}{\mu_{20}} = 3,238; \quad \frac{k_2}{\mu_{20}} = 0,02207; \quad \frac{\mu_2'}{\mu_{20}} = -0,05. \quad (3.1)$$

Одноточечная функция распределения предела микропрочности связующего принята в виде распределения Вейбулла

$$F_2(r_2) = \begin{cases} 0, & r_2 < r_{20}; \\ 1 - \exp[-m_2 (r_2 - r_{20})^{n_2}], & r_2 \geq r_{20}; \end{cases} \quad (3.2)$$

$$m_2 = 1000; \quad n_2 = 2; \quad r_{20} = 0,05; \quad p_{20} = 0.$$

Материал волокон принимается линейно упругим с безразмерными характеристиками

$$\frac{K_1}{\mu_{20}} = 33,584; \quad \frac{\mu_1}{\mu_{20}} = 25,188, \quad (3.3)$$

причем повреждаемость в материале волокон отсутствует, т.е.  $p_1 = p_{10} = 0$ . В этом случае система нелинейных уравнений (2.9) сводится к двум уравнениям

$$J_{\varepsilon}^2 \left\{ 1 + \left[ \eta_2 \hat{\mu}_2 (J_{\varepsilon}^2) - 1 \right] p_2 \right\} = (1 - p_2) \left\{ \frac{2}{3} (l_{21}^{*2} + l_{22}^{*2} - l_{21}^* l_{22}^*) (\langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \varepsilon_{22} \rangle)^2 - \right.$$

$$-2(l_{21}^* - l_{22}^*)^2 \langle \varepsilon_{11} \rangle \langle \varepsilon_{12} \rangle - \frac{2}{3}(l_{21}^* + l_{22}^*)(1 - l_{23}^*)(\langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \varepsilon_{22} \rangle) \langle \varepsilon_{33} \rangle + \frac{2}{3}(1 + 2l_{23}^*) \langle \varepsilon_{33} \rangle^2 +$$

$$+ 2 \left[ (l_{21}^* - l_{22}^*)^2 \langle \varepsilon_{12} \rangle^2 + l_{24}^{*2} (\langle \varepsilon_{13} \rangle^2 + \langle \varepsilon_{23} \rangle^2) \right]^{1/2}; \quad p_2 = F_2(J_\varepsilon^2). \quad (3.4)$$

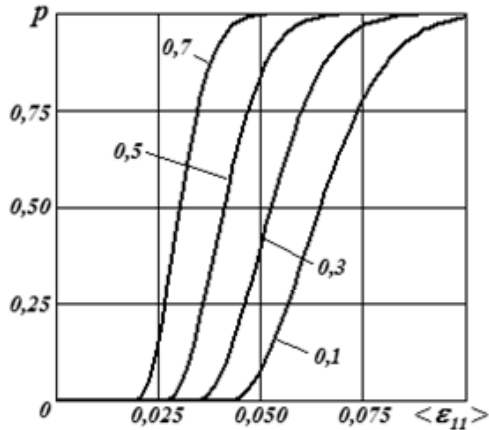


Рис. 1

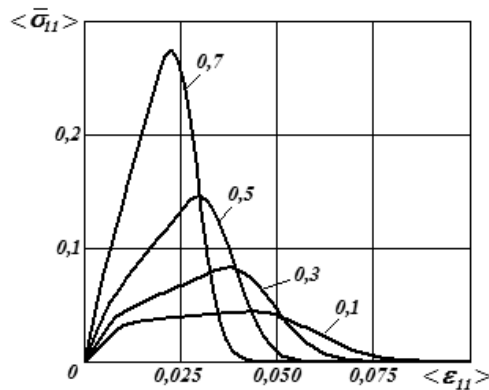


Рис. 2

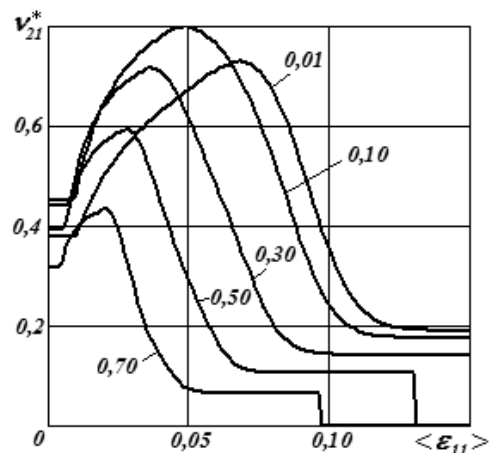


Рис. 3

Численное решение нелинейных уравнений (3.4) с учетом соотношений (2.2), (2.4), (2.5), (2.11), (2.13) для рассматриваемого однонаправленного волокнистого композита при заданных одноосных макродеформациях (2.10) и (2.12) представлены на рис. 1 – 4 и 5 – 7, в виде зависимостей пористости  $p_2$ , макронапряжений

$$\langle \bar{\sigma}_{11} \rangle = \frac{1}{\mu_{20}} \langle \sigma_{11} \rangle,$$

$$\langle \bar{\sigma}_{33} \rangle = \frac{1}{\mu_{20}} \langle \sigma_{33} \rangle$$

и коэффициентов Пуассона  $\nu_{21}^*$ ,  $\nu_{31}^*$ ,  $\nu_{13}^*$ , соответственно, от макродеформаций  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  и  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  для различных значений объемного содержания волокон  $c_1$ .

Как видим, при одноосном растяжении поперек волокон (2.10) повреждаемость связующего (рис. 1) более существенно зависит от объемного содержания волокон, чем при одноосном растяжении вдоль волокон (2.12) (рис. 5).

Закономерности зависимостей коэффициентов Пуассона от объемного содержания волокон и макродеформаций имеют более сложный характер (рис. 3, 4, 7).

Диаграммы деформирования при растяжении поперек волокон (рис. 2) имеют восходящие и нисходящие участки, отличающиеся только количественно в зависимости от объемного содержания волокон  $c_1$ . Нисходящие участки обусловлены совместным влиянием нелинейности и повреждаемости связующего. При растяжении вдоль волокон влияние нелинейности и повреждаемости связующего на диаграммы деформирования является существенным лишь в интервале  $0,001 \leq c_1 \leq 0,05$  (рис. 6). При этом в интервале  $0 < c_1 \leq 0,011$  диаграммы деформирования имеют три участка – восходящий, нисходящий и снова восходящий.

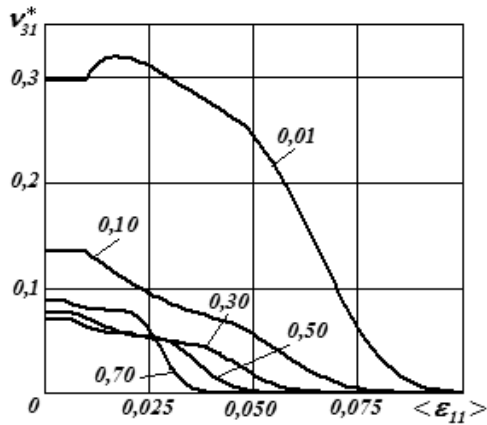


Рис. 4

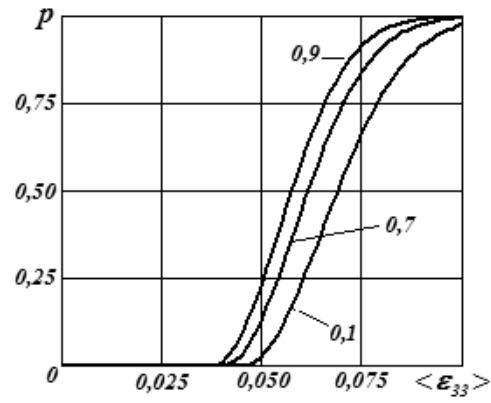


Рис. 5

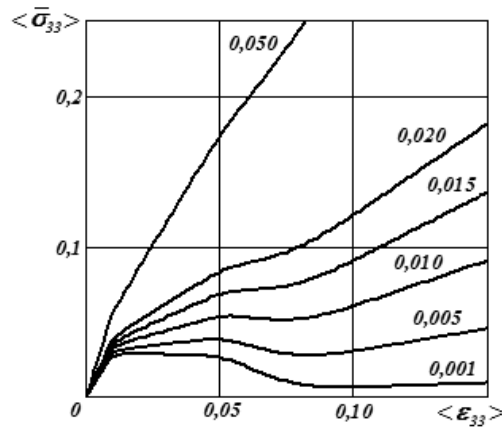


Рис. 6

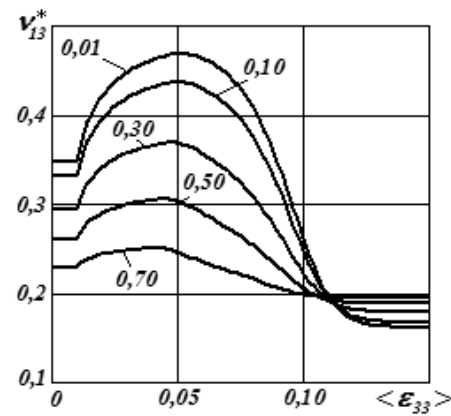


Рис. 7

Характерным для коэффициентов Пуассона  $v_{21}^*$ ,  $v_{13}^*$  является наличие максимума при определенных макродеформациях, соответственно,  $\langle \epsilon_{11} \rangle \neq 0$  и  $\langle \epsilon_{33} \rangle \neq 0$  для всех объемных содержаний волокон. Для коэффициента Пуассона  $v_{31}^*$  подобный максимум наблюдается при  $\langle \epsilon_{11} \rangle \neq 0$  лишь для  $c_1 < 0,04$ .

#### Заключение.

Построение структурных моделей связанных процессов деформирования и повреждения однородных и композитных материалов, основанных на представлении о стохастической микронеоднородности упругих и прочностных свойств, сведено к необходимости формулировки стохастических уравнений статики упругого тела, критериев прочности микрообъемов неповрежденного материала и уравнений баланса поврежденности (пористости). Применение силовых критериев микропрочности позволяет построить модели только для восходящей части нелинейной диаграммы деформирования. Применение деформационных критериев дает возможность строить модели для полной нелинейной диаграммы деформирования неразрушенных микрообъемов однородных и композитных материалов. Исследование деформирования и повреждаемости однонаправленного волокнистого композитного материала с нелинейно упругим связующим, имеющим ниспадающий участок диаграммы деформирования, позволило установить вид и количественные закономерности зависимости упругих свойств и поврежденности от макродеформаций композита для различного объемного содержания армирующих волокон и построить соответствующие диаграммы макродеформирования композита.

РЕЗЮМЕ. Побудовано структурну теорію зв'язаних процесів деформування і короткочасної пошкоджуваності односпрямованих волокнистих композитних матеріалів з фізично нелінійними компонентами, діаграми деформування яких мають спадаючі гілки. Процес пошкоджуваності моделюється розсіяним руйнуванням мікрооб'ємів компонентів і утворенням на їх місці стохастично розташованих квазісферичних мікропор. Умовою короткочасного руйнування мікрооб'єму матеріалу приймається деформаційний критерій міцності відносно другого інваріанта девіатора макродеформацій. Досліджено закономірність впливу об'ємного вмісту волокон на деформування і пошкоджуваність волокнистого односпрямованого композиту.

1. *Amar C.G.* Delamination – a damage mode in composite structures // *Eng. Frac. Mech.* – 1988. – **29**, N 5. – P. 557 – 584.
2. *Baste S., Audoin B.* On internal variables in anisotropic damage // *Eur. J. Mech. A.* – 1991. – **10**, N 6. – P. 587 – 606.
3. *Castaneda P.P., Willis J.R.* The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media // *J. Mech. and Phys. Solids.* – 1995. – **43**, N 12. – P. 1991 – 1951.
4. *Chaboche J.L.* Continuous damage mechanics – a tool to describe phenomena before crack initiation // *Nuclear. Eng. and Design.* – 1981. – N 64. – P. 233 – 247.
5. *Chandranth S., Pandey P.C.* An isotropic damage model for ductile material // *Eng. Fract. Mater.* – 1995. – **50**, N 6. – P. 457 – 465.
6. *Guz A.N.* Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed along Cracks (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N1. – P. 1 – 57.
7. *Khoroshun L.P.* Principles of the Micromechanics of Material Damage. 1.Short-Term Damage // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 10. – P.1035 – 1041.
8. *Khoroshun L.P.* Mathematical Models and Methods of the Mechanics of Stochastic Composites (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N10. – P. 1284 – 1316.
9. *Khoroshun L.P.* Structural Short-Term Damage Model with a Strain-Based Microfailure Criterion // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 1. – P. 62 – 72.
10. *Khoroshun L.P.* Necking Near a Crack Tip in a Plate: a Plane Problem // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 3. – P. 326 – 341.
11. *Khoroshun L.P., Nazarenko L.V.* Deformation and Damage of Composites with Anisotropic Components (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N4. – P. 388 – 455.
12. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Deformation and Damage of Composite Materials of Stochastic Structure: Physically Nonlinear Problems (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N4. – P. 359 – 413.
13. *Perez N.* Fracture Mechanics. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004. – 299 p.
14. *Toi Y., Kiyosue T.* Damage mechanics models for brittle microcracking solids based on three-dimensional mesoscopic simulation // *Eng. Fract. Mech.* – 1995. – **50**, N1. – P. 11 – 27.

Поступила 28.09.2013

Утверждена в печать 31.03.2016