

В.И.Гуляев<sup>1</sup>, П.З.Луговой<sup>2</sup>,  
О.В.Глушак<sup>1</sup>, С.Н.Глазунов<sup>1</sup>

САМОВОЗБУЖДЕНИЕ ТОРСИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ ГЛУБОКИХ  
БУРИЛЬНЫХ КОЛОНН В ВЯЗКОЙ ЖИДКОЙ СРЕДЕ

<sup>1</sup> *Национальный транспортный университет*

*ул. Суворова, 1, 01010, Киев, Украина; e-mail: valery@gulyayev.com.ua*

<sup>2</sup> *Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,*

*ул. П. Нестерова 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: plugovyy@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** The problem on self-excitation of the torsional vibrations of a drill string that rotates in a liquid medium of a deep bore-hole is stated. Three models of mechanical interaction of the drill string with the ambient viscous liquid are discussed. The solving equations with ordinary and partial derivatives are built. A technique of solution of these equations is elaborated. The computer modeling shows that self-vibrations are relaxational ones and the functions that describe them have the intervals of the fast and slow motions. The results of modeling can be used in elaboration of technology of drilling of the deep oil and gas bore-holes.

**Key words:** drill string, torsional self-vibrations, viscous friction forces, mathematical models, Hopf's bifurcation, fast and slow motions.

**Введение.**

Наметившаяся в последние годы мировая тенденция к увеличению потребности в энергетических ресурсах приводит к заметному повышению спроса на углеводородные топлива. Поэтому особую актуальность приобретают вопросы интенсификации их добычи с больших глубин и обеспечения высокого уровня их извлечения. Однако возрастание глубин бурения скважин оказывается связанным с существенным усложнением технологических режимов их проходки и возникновением сопутствующих им нештатных ситуаций. Как правило, они обусловлены сложными динамическими явлениями, протекающими в нижней части бурильной колонны (БК). Поскольку с изменением глубины скважины в процессе бурения необходимо постоянно увеличивать длину БК, то в результате невозможности полного согласования скоростей проходки скважины и спуска БК возникают ситуации, когда БК либо упирается в дно колодца с превышением допустимой силы осевого контактного давления, либо, наоборот, выходит из этого контакта. При этом генерируются продольные (осевые) упругие колебания БК с отскоками и ударами долота о поверхность дна. Они могут приводить к бифуркационному выпучиванию колонны [8, 25] и изгибным колебаниям системы [1, 9], при которых труба БК периодически ударяется о стенки скважины, приводя к нарушению центровки вращающегося долота. В этих случаях долото вступает в контакт со стенкой скважины своей боковой поверхностью и начинает перекатываться по поверхности дна. Такое движение долота получило название колебаний "кружения" (whirling) [24]. Оно представляет наибольшую опасность, когда вращение БК и кружение долота имеют противоположные направления [17, 28].

Существенные риски для процесса бурения связывают также с самовозбуждением торсионных колебаний БК, провоцируемых нелинейным фрикционным взаимодействием долота с поверхностью скважины и проявляющихся вследствие реализации бифуркации Хопфа [5, 6, 9, 18, 23, 26, 27, 31].

Значительный практический интерес представляют также вопросы исследования контактных и фрикционных сил, возникающих при движении бурильных колонн в прямолинейных и криволинейных скважинах, поскольку ими обусловлены эффекты их прихватов [7, 19, 20, 22].

Сложность задачи анализа динамики БК обусловлена не только тем, что каждый из описанных динамических эффектов является нелинейным и обладает сложной природой, но и тем, что обычно отмеченные явления оказываются взаимосвязанными и протекают совместно, усиливая или ослабляя действия каждого из них. Если также учесть многопараметричность задачи теоретического анализа динамики БК, то можно заключить, что вряд ли имеет смысл рассматривать ее в общем виде и представляется целесообразным изучить каждый из описанных эффектов в отдельности, обращая внимание на наиболее общие особенности и закономерности его протекания.

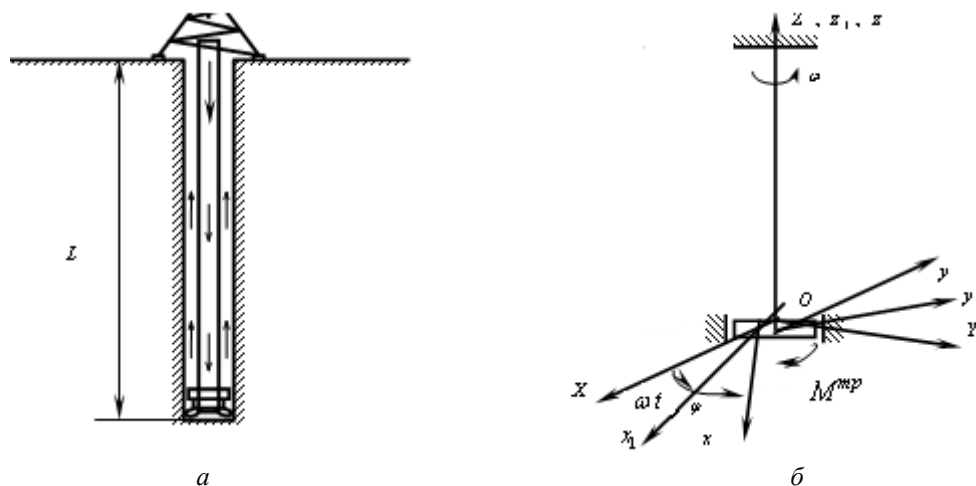


Рис. 1

В данной работе исследованы упругие крутильные автоколебания глубокой бурильной колонны (рис. 1, а), вызванные нелинейной зависимостью приложенного к долоту крутящего момента  $M^{mp}$  (момента сил трения или момента резания породы долотом) от полной угловой скорости  $\alpha = \omega + \dot{\varphi}$  вращения долота относительно разрушаемой им породы (рис. 1, б). Здесь  $OXYZ$  – неподвижная система координат;  $Oxyz$  – система координат, связанная с долотом;  $Ox_1y_1z_1$  – система координат, вращающаяся с угловой скоростью  $\omega$ ;  $\varphi(z, t)$  – угол упругого закручивания бурильной колонны;  $M^{mp}$  – момент сил трения, приложенных к долоту;  $\omega$  – угловая скорость вращения БК в точке подвеса;  $Oz$  – координатная ось, направленная вдоль осевой линии БК;  $t$  – время.

В природе автоколебательные процессы отличаются от вынужденных колебаний тем, что последние вызваны периодическим внешним воздействием и происходят с частотой этого воздействия, в то время как возникновения автоколебаний и их частота определяются внутренними свойствами самой колебательной системы.

Существует два типа автоколебательных систем: системы томсоновского типа (для них характерны малые потери энергии за один период колебаний по сравнению с общей энергией колебаний в контуре) и релаксационного типа (вклад энергии в них за период колебаний сравним с полной энергией колебаний). Поэтому томсоновские

автоколебания по форме близки к гармоническим, а релаксационные автоколебания характерны тем, что их период может быть разделен на несколько резко разграниченных этапов, соответствующих медленным и быстрым изменениям состояния системы, что позволило рассматривать их иногда как разрывные колебания.

При анализе режимов самовозбуждения колебаний в механике, как правило, используются континуальные и дискретные модели колебательных систем. И все же, несмотря на большой объем работ по теории автоколебательных процессов, исследователи обычно не выходят за рамки одно- и двухмассовых систем. Реальные же объекты обычно включают континуальные звенья с распределенными параметрами инерции, упругости и трения, что может приводить к существенным неточностям при описании автоколебательных явлений, а также к появлению новых эффектов, которые не могут быть исследованы с помощью расчетных схем, состоящих из дискретных звеньев.

Ниже дан анализ трех моделей автоколебаний бурильных колонн, построенных в форме упругих торсионных маятников в жидкой среде. Установлено, что при реальных значениях определяющих параметров (угловая скорость вращения БК, момент резания, вязкость промывочной жидкости, упругая податливость трубы БК при кручении, длина БК) влияние гидродинамических сил вязкого трения промывочной жидкости на автоколебательный процесс является несущественным.

Исследованы также эффекты бифуркационных переходов (бифуркаций Хопфа) от состояний стационарного вращения системы к упругим крутильным автоколебаниям и обратно. Показано, что формы этих автоколебаний существенно отличаются от гармонических (томсоновских) и имеют релаксационный характер, заключающийся в чередовании быстрых и медленных движений.

### **§1. Автоколебательные модели торсионного маятника с распределенными параметрами.**

Процесс возбуждения крутильных колебаний долот БК представляет собой проявление одного из наиболее общих эффектов механики, связанных с генерированием автоколебаний при реализации бифуркации Хопфа. Эти колебания имеют достаточно сложную структуру и на начальных этапах теоретических исследований анализировались с помощью весьма упрощенных подходов [17, 18, 28, 31]. В работах [6, 23, 27] было обращено внимание на то, что уравнения крутильных колебаний БК описывают бегущие волны и с учетом этого предложена волновая модель упругого торсионного маятника. С её помощью был получен ряд результатов, связанных с бифуркационными переходами от стационарного вращения к торсионным колебаниям и обратно [5, 26]. Смежные вопросы этого направления были проанализированы в работах [1, 15, 21, 24]. Однако поскольку в волновой модели не учитывались фрикционные эффекты, обусловленные окружением БК вязкой жидкостью, было указано на необходимость разработки диссипативной модели. Она была предложена в [4] с применением основных положений теории вязкой жидкости [10 – 14].

Ниже приведены результаты по разработке математической модели торсионных автоколебаний бурильной колонны в диссипативной среде. В общем случае при построении такой модели необходимо исходить из уравнения динамики кручения стержня, помещенного в жидкость,

$$GI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - k \left( \omega + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (0 \leq z \leq L). \quad (1)$$

Здесь  $\varphi$  – угол упругого закручивания элемента трубы БК;  $G$  – модуль упругости материала трубы при сдвиге;  $\omega$  – угловая скорость вращения трубы;  $k$  – коэффициент, учитывающий вязкое трение в жидкости;  $I$  – полярный момент инерции площади сечения трубы;  $z$  – осевая координата;  $L$  – длина БК;  $t$  – время.

Для уравнения (1) записываем граничные условия в виде

$$\varphi(0) = 0, \quad M^{un}(L) + M^{yup}(L) + M^{TP}(L) = 0, \quad (2)$$

где  $M^{un}(L)$  – момент сил инерции, действующих на долото;  $M^{yup}(L)$  – упругий крутящий момент, передаваемый на долото со стороны БК;  $M^{TP}(L)$  – момент сил трения, представляемый диаграммой резания для данной пары долота и породы.

Эти моменты вычисляются по формулам

$$M^{un}(L) = -J\ddot{\varphi}(L), \quad M^{yup}(L) = GI \cdot \partial\varphi / \partial z|_{z=L}, \quad (3)$$

где  $J$  – момент инерции долота относительно  $Oz$ .

Первое уравнение системы (2) означает, что за начало отсчета изменения угла  $\varphi(z)$  выбрана точка  $z = 0$ ; второе уравнение представляет собой условие динамического равновесия всех моментов, приложенных к долоту относительно оси  $Oz$ .

В публикациях [5, 6, 23, 26, 27] было сделано предположение, что вклад распределенных моментов сил вязкого трения, которые описываются слагаемым  $-k\left(\omega + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$ , в общий баланс всех моментов мал в сравнении с моментом сил трения, действующих на долото. Поэтому этим слагаемым можно пренебречь. После его отбрасывания уравнение (1) становится чисто волновым и с его помощью второе уравнение системы (2) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом  $2L - \beta t$  [5, 6, 23, 27]

$$J\left[\ddot{f}(-\beta t) - \ddot{f}(2L - \beta t)\right] - M^{mp} + (GI / \beta) \cdot \left[\dot{f}(-\beta t) + \dot{f}(2L - \beta t)\right] = 0, \quad (4)$$

где  $f(z - \beta t)$  – функция упругой волны кручения, отходящей от долота;  $\beta = \sqrt{G / \rho}$  – скорость распространения поперечной (крутильной) волны в трубе БК.

Это уравнение представляет собой модель волнового торсионного маятника. Его свойства определяются формой зависимости момента сил трения  $M^{mp}$  от полной угловой скорости  $\alpha = \omega + \dot{\varphi}$  и значениями коэффициентов  $J$  и  $GI / \beta$ . Вид функции  $M^{mp}(\omega + \dot{\varphi})$  зависит от свойств обрабатываемой породы, а также от конструкции и степени изношенности резцов долота. В общем случае она может иметь разный характер, но как показано трибологическими исследованиями, кривая функции трения  $F^{mp}(v)$  обычно имеет точку экстремума  $F^{exc}$ , являющуюся началом ниспадающего участка (рис. 2, а). На обязательное наличие таких участков для функций моментов сил трения, действующих на долото, указано в работах [16, 29].

Однако следует обратить внимание на то, что в процессе бурения имеет место совмещение двух явлений – фрикционного взаимодействия долота с породой и эффекта резания породы алмазными резцами. В научной литературе отсутствуют отдельные описания механизмов этих явлений, однако в общей теории резания [3] общепринятой является диаграмма зависимости силы резания от скорости относительного движения, приведенная на рис. 2, б. Как видно, при малых значениях  $v$  эта сила не определена, но с увеличением  $v$  она достигает максимума  $P^{exc}$  при  $v = v_1$ , за которым следует ниспадающий участок.

В предельных случаях для некоторых видов обрабатываемых материалов в зоне экстремума функция трения становится ломаной [29], а ниспадающий участок преобразуется в вертикальный отрезок (рис. 2, в). Тем не менее принято [17, 30], что даже если для каждого резца долота функция резания имеет вид, представленный на рис. 2, в, суммарная функция момента сил трения  $M^{mp}(\omega + \dot{\varphi})$  для всего долота в результа-

тах усреднения по всем резцам, имеющихся на его поверхности, приобретает более сглаженную форму, показанную на рис. 2, з.

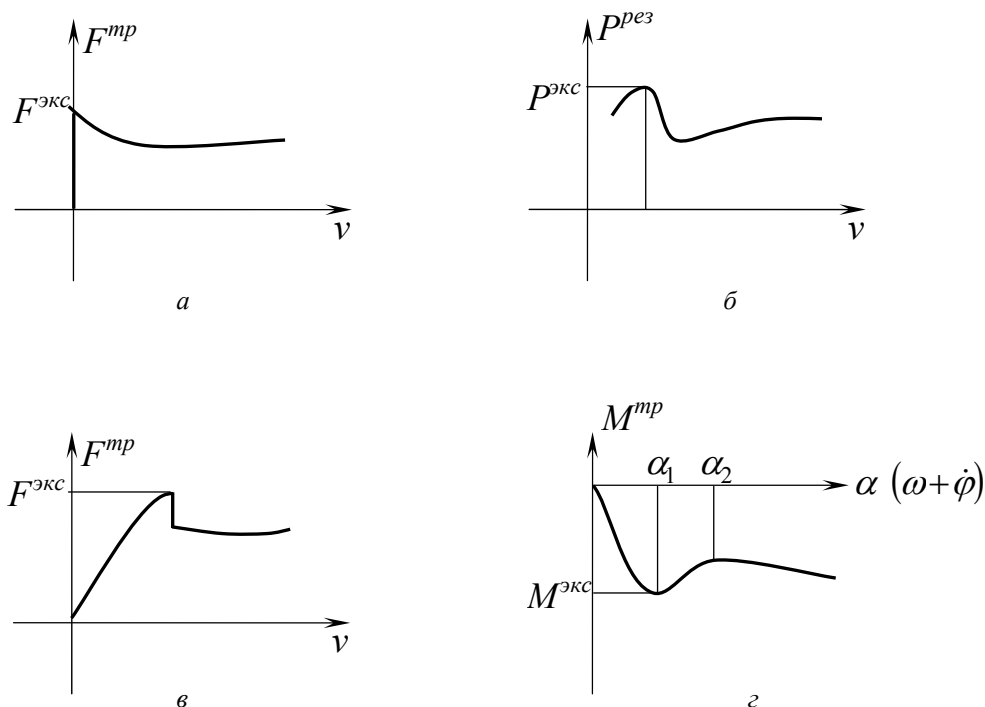


Рис. 2

Влияние значений коэффициентов уравнения (2) на характер автоколебаний оказывается заметным, вследствие малости  $J$  по сравнению с  $GI/\beta$ , поскольку в этом случае роль первого слагаемого со старшей производной  $\ddot{f}$  становится существенной только при больших ускорениях, т.е. при переходах от малых скоростей к большим и обратно. Такие формы колебаний получили название релаксационных, а описывающее их уравнение (4) – сингулярно возмущенного [2].

Для установления особенностей явления самовозбуждения торсионных колебаний БК без учета сил ее вязкого трения с окружающим ее потоком промывочной жидкости выполнено численное моделирование вращений стальной колонны с параметрами  $L = 8000$  м;  $I = 3,12 \cdot 10^{-5}$  м<sup>4</sup>;  $J = 3,1$  кг·м<sup>2</sup>;  $G = 8,077$ ·ГПа;  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> в диапазоне изменения угловой скорости  $0 \leq \omega \leq 4$  рад/с. Принятая форма зависимости  $M^{mp}(\omega + \dot{\varphi})$  показана на рис. 2, з при  $M^{экс} = -82500$  Н·м;  $\alpha_1 = 0,72$  рад/с;  $\alpha_2 = 3,8$  рад/с.

Во всех случаях при выбранном фиксированном значении  $\omega$  уравнение (4) интегрировалось методом Рунге – Кутты при начальных условиях  $f(0) = 0$ ,  $\dot{f}(0) = 0$  с шагом интегрирования по времени  $\Delta t = 6,5 \cdot 10^{-6}$  с.

Вычисления показали, что в зависимости от значений  $\omega$  долото вместе с колонной может находиться либо в состоянии стационарного вращения, повернувшись на некоторый угол  $\varphi_{ст}$  упругого закручивания, либо переходить в режим самовозбужденных торсионных колебаний. В теории нелинейных дифференциальных уравнений периодическое решение, соответствующее автоколебаниям, называется предельным циклом (или аттрактором), а эффект смены стационарного равновесного решения пе-

риодическим при переходе характерного параметра через критическое значение ( $\omega_p$ ) – рождением цикла или бифуркацией Хопфа (рис. 3). Бифуркационный переход из диапазона автоколебаний  $\omega_p \leq \omega \leq \omega_y$  в область стационарных вращений через точку  $\omega_y$  называется утратой цикла. Величины  $\omega_p$ ,  $\omega_y$  определяются видом диаграммы  $M^{mp}(\omega + \dot{\varphi})$ . При этом, как показали вычисления, значение  $\omega_p$  соответствует первой экстремальной точке на этой диаграмме, значение  $\omega_y$  располагается на этой кривой после прохождения второго экстремума. В рассматриваемом случае  $\omega_p = 0,72$  рад/с,  $\omega_y = 3,8$  рад/с, причем эти значения и формы автоколебаний не зависят от начальных условий. Такое самовозбуждение называем мягким.

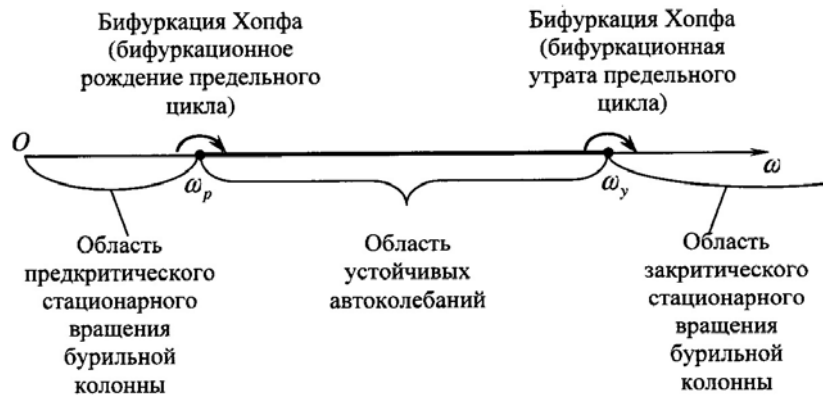


Рис. 3

На рис. 4 показана диаграмма изменения угла  $\varphi(0, t)$  упругого закручивания БК в точке  $z = 0$  присоединения долота при  $\omega = \omega_p = 0,72$  рад/с. Его движение инициируется из состояния покоя всей системы при  $\varphi(0) = 0$ ;  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . После придания колонне вращательного движения в верхней точке  $z = 8000$  м с фиксированной скоростью  $\omega = 0,72$  рад/с БК начинает закручиваться по всей своей длине и по достижении максимального значения угла  $\varphi(t) = 265$  рад в нижней точке  $z = 0$  начинает колебаться с периодом  $T = 341,2$  с около среднего значения  $\varphi_{cp} = 223$  рад. При этом размах колебаний составил  $D = 84$  рад.

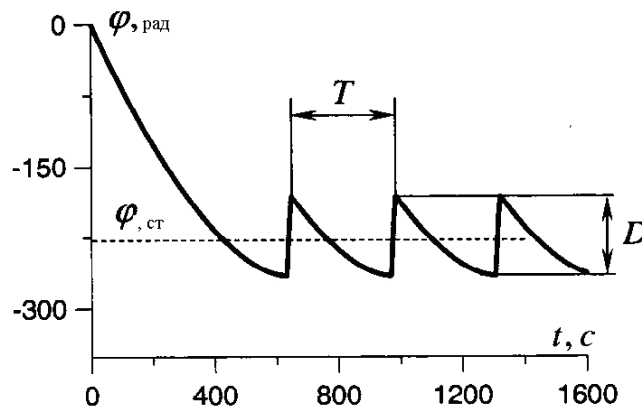


Рис. 4

Заметим, что автоколебания долота являются релаксационными (в отличие от томсоновских автоколебаний, описываемых гармоническими функциями) и имеют вид ломаных кривых. Поэтому на графике функции угловой скорости  $\dot{\varphi}(t)$  (рис. 5) появились участки быстрых и медленных движений, причем медленные движения реализуются на большей части периода и происходят с отрицательной скоростью  $\dot{\varphi}(t) < 0$ , по модулю примерно равной угловой скорости  $\omega_p$ .

Это означает, что на этих участках движения полная угловая скорость  $\omega + \dot{\varphi}$  долота примерно равна нулю и колебания происходят практически с остановками. Установленный расчетным путем эффект наблюдается в практике бурения и отмеченные эффекты остановки вращения долота при вращении верхней части БК с постоянной скоростью  $\omega$  получили название "залипания" [16, 17, 28, 30, 31].

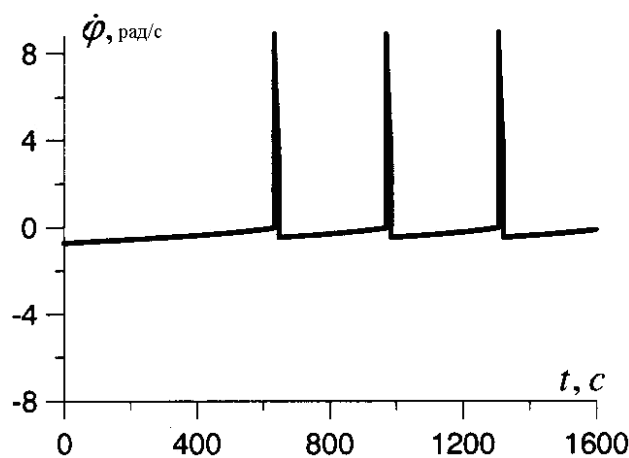


Рис. 5

Отметим также, что несмотря на сложный характер периодических движений долота и использованную волновую модель торсионных колебаний БК, волновые функции  $\varphi(z, t)$ , построенные с помощью предложенной волновой модели торсионных колебаний БК, быстро сглаживаются и усредняются по переменной  $z$ .

В результате они приобретают вид линейных функций, у которых с течением времени изменяется только угол их наклона к оси  $Oz$  (рис. 6).

Аналогичными особенностями обладают также формы автоколебаний долота и в остальных состояниях внутри диапазона  $\omega_p \leq \omega \leq \omega_y$ . На рис. 7, 8 показаны графики колебаний долота при  $\omega = 3,55$  рад/с. Их отличие от диаграмм предыдущего случая заключается только в том, что здесь эффект залипания имеет место дважды за период, при  $\dot{\varphi} \approx 0$  и при  $\dot{\varphi} \approx -\omega$  рад/с. Однако функция  $\varphi(z, t)$  осталась почти линейной вдоль переменной  $z$ .

В то же время пренебрежение эффектом диссипации энергии за счет сил вязкого фрикционного взаимодействия трубы БК с омывающей ее жидкостью оставило открытым вопрос о влиянии этих сил на автоколебательный процесс.

Поэтому в работе [4] была предложена модель автоколебаний колонны в диссипативной среде, основанная на исследовании полного уравнения (1) с граничными условиями (2) на концах.

Поскольку эта модель связана с необходимостью решения линейного дифференциального уравнения с частными производными (1) и с нелинейным граничным условием на нижнем конце, она описывает нелинейную динамическую краевую задачу для системы с распределенными параметрами.

Поэтому построенные уравнения могут быть решены только численными методами. Как правило, для интегрирования таких систем наиболее эффективной оказывается неявная по времени конечно-разностная схема.

Ее преимущество заключается в том, что она всегда устойчива, а вычислительная точность обеспечивается выбором достаточно малого значения шага интегрирования  $\Delta t$ .

Для проверки достоверности построенных моделей исследования, проведенные выше с помощью волновой модели, были повторены с применением второй модели при  $k=0$  в уравнении (1). Они с высокой точностью совпали с результатами анализа, представленными на рис. 4 – 8.

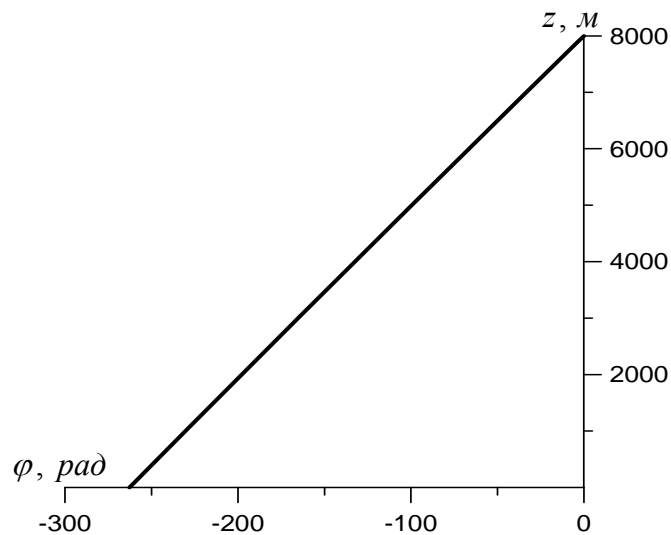


Рис. 6

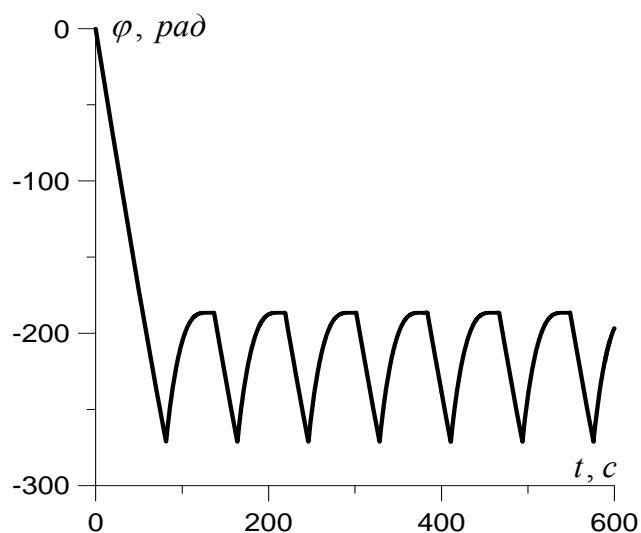


Рис. 7



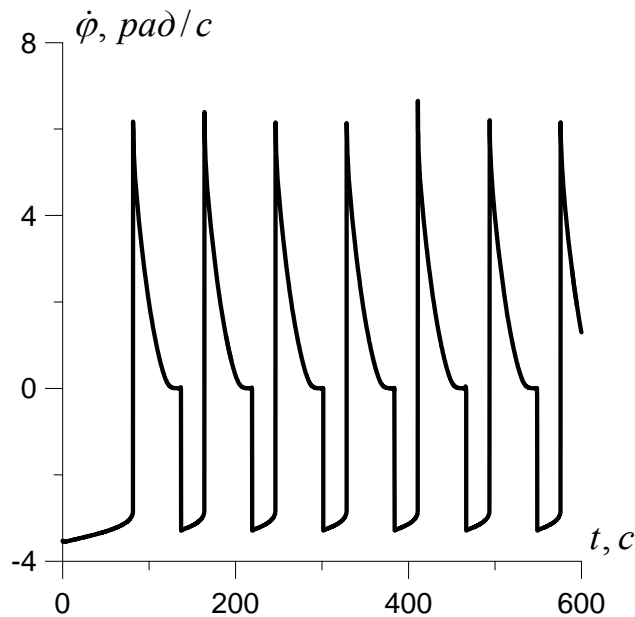


Рис. 8

Следует отметить также, что согласно обеим моделям, несмотря на почти разрывные формы автоколебаний и периодические смены быстрых движений медленными, функции  $\varphi(z)$  изменения углов поворота элементов БК вдоль ее длины являются почти линейными. Если принять во внимание этот факт, то можно сконструировать еще одну модель торсионных автоколебаний (с одной степенью свободы), которая, в отличие от двух предыдущих, описывается одним нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка и не содержит запаздывающего аргумента.

## §2. Модель с одной степенью свободы упругого торсионного маятника в диссипативной среде.

Отмеченное свойство линейного изменения функции угла упругого закручивания БК вдоль ее длины позволяет существенно упростить математическую модель ее динамики.

Для создания модели используем следующие исходные гипотезы:

в точке подвеса БК вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  ;

на долото действует момент сил резания (трения)  $M_0^{mp}$  ;

БК находится в жидкой (диссипативной) среде, на каждый ее элемент действует момент сил вязкого трения  $m^{mp}$  ;

угол упругого закручивания  $\varphi(z)$  элементов БК, а также угловая скорость  $\dot{\varphi}(z)$  и ускорение  $\ddot{\varphi}(z)$  линейно зависят от  $z$  .

Последнее условие формулируется в таком виде:

$$\varphi(z,t) = \frac{\varphi_0(t)}{L}(L-z); \quad \dot{\varphi}(z,t) = \frac{\dot{\varphi}_0(t)}{L}(L-z);$$

$$\ddot{\varphi}(z,t) = \frac{\ddot{\varphi}_0(t)}{L}(L-z). \quad (4)$$

Здесь  $\varphi_\delta$ ,  $\dot{\varphi}_\delta$ ,  $\ddot{\varphi}_\delta$  – угол упругого закручивания, угловая скорость и угловое ускорение долота;  $L$  – длина БК;  $z$  – координата, направленная вдоль оси БК.

Для моделирования автоколебаний долота (и всей бурильной колонны), которые самовозбуждаются в результате его нелинейного фрикционного взаимодействия с разрушаемой скальной породой, условно отделим БК от удерживающих связей в точке ее подвеса  $z = L$  и приложим упругий момент  $M_\kappa^{yup}(L)$ , компенсирующий их действие (рис. 9).

Рассмотрим динамику торсионных движений всей бурильной колонны и долота под действием: момента сил упругости  $M_\kappa^{yup}$ ; распределенных моментов  $m^{mp}$  сил вязкого трения, действующих на элементы БК; момента сил резания породы  $M_\delta^{mp}$ ; распределенных моментов  $m^{un}$  сил инерции, действующих на элементы БК; момента  $M_\delta^{un}$  сил инерции, действующих на долото.

Тогда уравнение динамического равновесия системы можно представить в виде

$$M_\kappa^{un} + M_\delta^{un} + M_\kappa^{mp} + M_\delta^{mp} + M_\kappa^{yup} = 0. \quad (5)$$

Здесь для момента всех сил инерции, приложенных к бурильной колонне, имеем

$$M_\kappa^{un} = \int_0^L m^{un} dz = -\int_0^L \rho I \ddot{\varphi}(z) dz = -\int_0^L \rho I \frac{\ddot{\varphi}_\delta}{L} z dz = -\frac{1}{2} \rho I L \ddot{\varphi}_\delta. \quad (6)$$

Для момента сил инерции долота имеем формулу

$$M_\delta^{un} = -J \ddot{\varphi}_\delta; \quad (7)$$

момент всех сил трения, приложенных к бурильной колонне, подсчитываем так:

$$M_\kappa^{mp} = \int_0^L m^{mp} ds = -\int_0^L k \left[ \omega + \dot{\varphi}_\delta \left( 1 - \frac{z}{L} \right) \right] dz = -k\omega L - \frac{1}{2} kL \dot{\varphi}_\delta, \quad (8)$$

а момент сил трения, приложенных к долоту, определяем равенством

$$M_\delta^{mp} = M_\delta^{mp} (\omega + \dot{\varphi}_\delta), \quad (9)$$

а момент сил упругости, приложенный к бурильной колонне в точке ее подвеса, вычисляем по формуле

$$M_\kappa^{yup} = -GI \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -GI \frac{\varphi_\delta}{L}. \quad (10)$$

Учитывая (6) – (10), из уравнения (5) получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

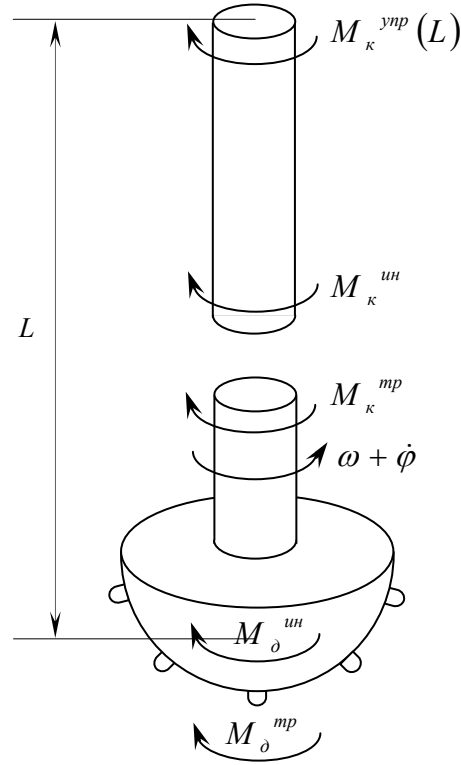


Рис. 9

$$-\left(J + \frac{1}{2} \rho IL\right) \ddot{\varphi}_\delta + M_\delta^{mp} (\omega + \dot{\varphi}_\delta) - k\omega L - \frac{1}{2} kL \dot{\varphi}_\delta - \frac{GI}{L} \varphi_\delta = 0. \quad (11)$$

Как видно, это уравнение имеет простую структуру, поскольку коэффициенты перед искомой функцией  $\varphi_\delta$ , содержащейся в уравнении, и ее производными  $\dot{\varphi}_\delta$ ,  $\ddot{\varphi}_\delta$  являются константами. Возможная его сложность определяется функцией  $M_\delta^{mp} (\omega + \dot{\varphi}_\delta)$ , которая, как отмечено выше, зависит от многих факторов. К ним относятся: сила прижатия долота к дну скважины, конструкция долота, степень изношенности и затупления его резцов; прочность породы, состав промывочной жидкости и др. Эти факторы изменяются по мере проходки скважины, поэтому вряд ли возможно установить универсальный вид функции  $M_\delta^{mp} (\omega + \dot{\varphi}_\delta)$ . Однако можно выбрать наиболее типичные формы этой функции с целью анализа общих закономерностей процесса генерирования автоколебаний долота и режимов его протекания.

Исследования, представленные ниже, проведены при значениях параметров, использованных в §1. Они отличаются лишь учетом момента сил вязкого трения, представленного в (11) слагаемыми  $-k\omega L$ ,  $-kL\dot{\varphi}_\delta/2$ .

При заданной функции  $M_\delta^{mp} (\omega + \dot{\varphi}_\delta)$  и известных начальных условиях для этого уравнения ставим задачу Коши. Как отмечено выше, ее решаем численным методом Рунге – Кутты.

Чтобы изучить влияние вязкости промывочной жидкости на характер крутильных автоколебаний БК, в общем случае необходимо принимать во внимание то, что она движется вверх в полости между двумя цилиндрами, причем внутренний цилиндр вращается с переменной по времени и осевой координате угловой скоростью. Задача анализа такого движения жидкости и его силового влияния на торсионные колебания внутреннего цилиндра представляет самостоятельную сложную проблему. В связи с этим в данной работе ставим вопрос лишь о качественной оценке этого влияния и о проверке необходимости его учета или возможности им пренебрежения. Поэтому далее влиянием осевой компоненты движения потока на вращательное движение БК будем пренебрегать. При моделировании окружного движения жидкости в полости между цилиндрическими поверхностями примем, что оно является установившимся, поскольку даже наименьший период автоколебаний долота  $T \approx 80$  с сравнительно велик. Тогда в каждом кольцевом сечении полости, занимаемой жидкостью, движение можно принять плоским. В рамках теории несжимаемой вязкой жидкости скорость движения ее частиц в окружном направлении определяется формулой [14]

$$v(r) = \frac{\omega_1}{r_2^2 - r_1^2} \left( \frac{r_1^2 r_2^2}{r} - r_1^2 r \right). \quad (12)$$

Здесь  $r$  – радиальная координата частицы жидкости,  $r_1$  – радиус наружной поверхности трубы БК,  $r_2$  – радиус поверхности стенки скважины;  $v(r)$  – скорость частиц промывочной жидкости в окружном направлении.

С помощью равенства (12) можно определить величину  $dv(r_1)/dr$  на поверхности трубы и подсчитать действующую на нее распределенную силу вязкого трения

$$p^{mp} = \eta \frac{dv(r_1)}{dr}. \quad (13)$$

Здесь  $\eta$  – коэффициент пластической вязкости промывочной жидкости. Его значение, в общем случае, зависит от состава жидкости, ее температуры, имеющихся в ней взвешенных частиц шлама и других факторов. Величина  $\eta$  обычно состоит в таких пределах:  $0,006 \leq \eta \leq 0,01$  Па·с.

Сила  $p^{mp}$  создает момент сил трения

$$m^{mp} = -k \left( \omega + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -2\pi r_1^2 \cdot \eta \frac{dv(r_1)}{dr} (\omega + \dot{\varphi}). \quad (14)$$

Сравнивая второй и третий члены в этом двойном равенстве, после учета зависимости (13) получим

$$k = 2\pi r_1^2 \eta \left( \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right). \quad (15)$$

Чтобы оценить величину  $k$  для реальных систем, определим ее значения при  $r_1 = 0,1$  м;  $r_2 = 0,15$  м;  $0,006 \leq \eta \leq 0,01$  Па·с. Тогда  $k$  лежит в пределах  $1 \cdot 10^{-3} \leq k \leq 1,63 \cdot 10^{-3}$  Н·с.

Исследование автоколебаний БК с помощью второй и третьей моделей (система (1) – (3) и уравнение (11), соответственно) при исходных данных, принятых в §2, и подсчитанном коэффициенте  $k$  показало, что в данном случае применение трёх различных моделей привело практически к одному результату, отраженному на рис. 4 – 8. Это значит, что решающее влияние на автоколебательный процесс оказывает момент сил трения (резания)  $M_o^{mp}$ , приложенный к долоту, а действием сил вязкого трения промывочной жидкости на трубу БК можно пренебречь.

Некоторым подтверждением этого вывода может служить решение задачи об упругом кручении БК моментом  $m^{mp}$  в условиях  $M_o^{mp} = 0$  при выведении долота из контакта с породой на дне скважины. Тогда автоколебания отсутствуют,  $\dot{\varphi} = 0$ ,  $\ddot{\varphi} = 0$  и уравнение (1) имеет аналитическое решение. Действительно, в этом случае оно приобретает форму

$$GI \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = k\omega. \quad (16)$$

Его решение имеет такой вид:

$$\varphi(z) = -\frac{k\omega}{2GI} (L^2 - z^2) \quad (17)$$

и свидетельствует о том, что угол  $\varphi(z)$  кручения БК, вызванный вязким трением, изменяется по квадратичному закону вдоль переменной  $z$ . На первый взгляд видно, что это обстоятельство противоречит результатам, представленным в §2 (рис. 6), и основной предпосылке, использованной при построении третьей модели. Однако, как оказалось, при реальных исходных данных значения  $\varphi(z)$  в (17) настолько малы, что этой функцией можно пренебречь по сравнению с амплитудными значениями углов закручивания, обусловленных автоколебаниями системы. Так, по формуле (17) угол поворота конца  $z = 0$  БК составил  $\varphi(0) \approx -0,091$  рад, а при автоколебаниях его наибольшее значение равно  $|\varphi(0)|^{\max} \approx 262$  рад (рис. 4).

### Заключение.

Полученные результаты позволяют заключить, что для используемого в научной литературе закона зависимости крутящего момента, приложенного к долоту при бурении, от угловой скорости вращения долота, влияние момента сил вязкого трения промывочной жидкости на самовозбуждаемый процесс торсионных колебаний колонны оказывается несущественным. В связи с этим рассмотренные математические

модели с распределенными параметрами и с одной степенью свободы, основанные на неучете и учете сил вязкого трения, приводят к практически одинаковым результатам. Все они подтверждают наиболее деструктивный эффект, сопровождающий эти колебания. Он связан с режимом движения долота "застой – скольжение" (stick – slip), который существенно уменьшает его долговечность. При "застое" (stick), когда скорость вращения долота практически равна нулю, бурильная колонна продолжает вращаться в своей верхней части и в ней накапливается энергия упругих деформаций, достаточная для продолжения резания породы. Затем происходит быстрое локальное разрушение породы в зоне ее контакта с резаками, долото "срывается" и начинает "скользить" (slip) с угловой скоростью, в несколько раз превышающей скорость ее вращения в штатном режиме. Эти резкие удары могут вызвать разрушения резцов долота или, по меньшей мере, ускорить их затупление и износ в абразивной среде породы. В более тяжелых случаях они могут также сопровождаться разрушением других элементов БК или снижением общей эффективности бурения. Как показывает практика, происходящие в бурильной конструкции негативные эффекты еще более усиливаются с износом долот.

На основании полученных результатов, можно заключить, что при моделировании крутильных автоколебаний бурильных колонн для практического применения может быть рекомендована модель с одной степенью свободы, обладающая наибольшей простотой. При этом также необходимо отметить, что сформулированные выводы относятся к случаю использования общепринятой в научной литературе по бурению гладкой (дифференцируемой) функции зависимости момента резания от угловой скорости вращения долота. В то же время, в общей теории резания и трибологии рассматриваются случаи, когда эти функции являются ломаными или даже разрывными. Очевидно, что вопрос пригодности сформулированных выводов в этих случаях требует дополнительного изучения.

РЕЗЮМЕ. Поставлено задачу про самозбуждення крутильних коливань бурильної колони, що обертається в рідкому середовищі глибокої свердловини. Розглянуто три моделі механічної взаємодії бурильної колони з в'язкою рідиною, що оточує її, побудовано розв'язувальні рівняння з частинними і звичайними похідними. Розроблено методику їх розв'язання. В результаті проведеного комп'ютерного моделювання встановлено, що автоколивання є релаксаційними і функції, що їх описують, мають ділянки швидких та повільних рухів. Результати моделювання можуть бути використані при розробці технології буріння глибоких нафтових і газових свердловин.

1. Борц Е.И., Ваццилина Е.В., Гуляев В.И. Спиральные бегущие волны в упругих стержнях // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – №2. – С. 143 – 149.
2. Васильева А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. – М.: Изд. МГУ, 1978. – 106 с.
3. Галашев В.А. Резание металлов. – Ижевск: Изд. Удмурт. ун-та, 1996. – 187 с.
4. Глазунов С.М. Консервативні і дисипативні моделі торсіонних автоколивань колон глибокого буріння // Вісн. нац. трансп. ун-ту. / К:НТУ. – 2013. – №28. – С. 88 – 94.
5. Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Глушакова О.В. Бифуркации Адронova – Хопфа в волновых моделях торсионных колебаний бурильных колонн // Прикл. механика. – 2010. – 46, №11. – С. 73 – 83.
6. Гуляев В.И., Глушакова О.В., Худойли С.Н. Квантованные аттракторы в волновых моделях торсионных колебаний колонн глубокого бурения // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2010. – №2. – С. 134 – 147.
7. Гуляев В.И., Луговой П.З., Андрусенко Е.Н. Особенности механического поведения бурильных колонн в криволинейных скважинах с локализованными геометрическими несовершенствами // Прикл. механика. – 2010. – 46, №12. – С. 88 – 99.
8. Гуляев В.И., Луговой П.З., Андрусенко Е.Н. Численное моделирование упругого изгиба бурильной колонны в сверхглубокой криволинейной скважине // Прикл. механика. – 2014. – 50, №4. – С. 67 – 76.
9. Гуляев В.И., Луговой П.З., Борц Е.И. Самовозбуждение колебаний долота бурильной колонны // Прикл. механика. – 2013. – 49, №3. – С. 114 – 124.

10. *Дмитриченко Н.Ф.* Эластогидродинамика: теория и практика. – Львів: Львівська політехніка, 2000. – 224 с.
11. *Костецкий Б.И.* Механико-химические процессы при граничном трении. – М.: Наука, 1972. – 173 с.
12. *Лодж А.* Эластичные жидкости. – М.: Наука, 1969. – 463с.
13. *Мирзаджанадзе А.Х.* Гидравлика глинистых и цементных растворов. – М.: Недра, 1966. – 386с.
14. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969. – 744с.
15. *Akbarzade M., Farshidianfar A.* Application of the amplitude-frequency formulation to a nonlinear vibration system typified by a mass attached to a stretched wire // *Int. Appl. Mech.* — 2014. — **50**, N4. — С. 137 – 144.
16. *Besselink B., van der Wouw N., Nijmeijer H.* A semi-analytical study of stick-slip oscillations in drilling systems // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics.* – 2011. – **6** (December). – P. 1 – 9.
17. *Christoforou A.P., Yigit A.S.* Dynamic modeling of rotating drillstrings with borehole interactions // *J. Sound and Vibration.* – 1997. – **206**. – P. 243 – 260.
18. *Ford B.J.* The genesis of torsional drillstring vibrations // *SPE Drilling Engineering.* – 1992. – **7**, September. – P. 168 – 174.
19. *Gulyayev V.I., Andrusenko E.N.* Sensitivity of resistance forces to localized geometrical imperfections in movement of drill strings in inclined bore-holes // *Interaction and Multiscale Mech.* – 2011. – **4**, N1. – P.1 – 16.
20. *Gulyayev V.I., Andrusenko E.N.* Theoretical simulation of geometrical imperfections influence on drilling operations at drivage of curvilinear bore-holes // *J. Petr. Sci. Eng.* – 2013. – **112**. – P. 170 – 177.
21. *Gulyayev V.I., Borshch O.I.* Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells // *J. Petrol. Sci. Eng.* – 2011. – **78**, N3. – P. 759 – 764.
22. *Gulyayev V.I., Glovach L.V.* The computer simulation of drill column dragging in inclined bore-holes with geometrical imperfections // *Int. J. Solids and Struct.* – 2011. – **48**. – P.110 – 118.
23. *Gulyayev V.I., Glushakova O.V.* Large-scale and small-scale self-excited torsional vibrations of homogeneous and sectional drill strings // *Interaction and Multiscale Mech.* – 2011. – **4**, N4. – P. 291 – 311.
24. *Gulyayev V.I., Shevchuk L.V.* Nonholonomic dynamics of drill string bit whirling in a deep bore-hole // *J. Multi-body Dynamics.* – 2013. – **227**, N3 – P. 234 – 244.
25. *Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Solovjov I.L., Gorbunovich I.V.* The buckling of elongated rotating drill strings // *J. Petrol. Sci. Eng.* – 2009. – **67**, N2. – P.140 – 148.
26. *Gulyayev V.I., Glushakova O.V., Glazunov S.N.* Stationary and non-stationary self-induced vibrations in waveguiding systems // *J. Mech. Eng. and Automat.* – 2014. – **4**, N3. – P. 213 – 224.
27. *Gulyayev V.I., Hudolij S.N., Glushakova O.V.* Simulation of torsion relaxation auto-oscillations of drill string bit with viscous and Coulombic friction moment models // *J. Multi-Body Dynamics.* – 2011. – **225**. – P. 139 – 152.
28. *Leine R.I., Van Campen D.H., Keulties W.J.G.* Stick-slip whirl interaction in drillstring dynamics // *J. Vibr. and Acousti.* – 2002. – **124**. – P. 202 – 209.
29. *Samuel R.* Friction factors: What are they for torque, drag, vibration, bottom hole assembly and transient surge / swab analyses? // *J. Petroleum Scie. and Eng.* – 2010. – **73**. – P. 253 – 266.
30. *Yigit A.S., Christoforou A.P.* Stick-slip and bit-bounce interaction in oil-well drillstrings // *J. Energy Resources Tech.* – 2006. – **128**, N4. – P. 268 – 274.
31. *Zamanian M., Khadem S.E., Ghazavi M.R.* Stick-slip oscillations of drag bits by considering damping of drilling mud and active damping system // *J. Petrol. Sci. Eng.* – 2007. – **59**. – P. 289 – 299.

Поступила 30.10.2014

Утверждена в печать 22.12.2015