

А. М. Багно

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОМ СЛОЕ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕМ СО СЛОЕМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: desc@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** Basing on the three-dimensional linearized Navier-Stokes equations for a viscous fluid and the linear equations of classical theory of elasticity for an elastic layer, the dispersion curves are built and the propagation of acoustic waves is studied within the broad range of frequencies. An effect of the viscosity of fluid, the thickness of elastic and fluid layers on the phase velocities and coefficients of attenuation of modes is analyzed both for the thin, and the thick solid layers. It is shown that in the case of thick elastic layer the fluid layers of some thickness and some frequencies exist, for which an effect of viscosity of fluid on the phase velocities and attenuation coefficients of modes is minimal. It is also revealed that some frequencies and frequency intervals exist for a row of modes, for which an effect of viscosity of fluid on the phase velocities and attenuation coefficients of modes is significant. The approach developed for the wave processes and the results obtained in this report allow to establish the validity range of the model of ideal fluid. The numerical results are presented in the form of plots and their analysis is given.

**Key words:** elastic layer, layer of viscous compressible fluid, harmonic waves.

### Введение.

К числу основных направлений, по которым проводятся исследования волновых процессов в гидроупругих системах, можно отнести следующие. Это, прежде всего, направление, связанное с привлечением более сложных моделей упругого тела. Второе направление включает работы, в которых применяются более сложные модели жидкой среды. Следующее направление связано с проведением исследований в рамках более сложных моделей волновых движений.

Среди значительного количества статей, посвященных указанным направлениям, отметим лишь некоторые работы, опубликованные сравнительно недавно [3 – 24]. В статьях [3, 4, 6 – 13, 18 – 20, 24], относящихся к первому направлению, для исследования волновых процессов использованы модели, учитывающие начальные напряжения, слоистость упругой среды, а также структуру композитных и новых наноматериалов. В частности, в публикациях [8 – 11] рассмотрен волновой процесс в предварительно напряженных слое и стратифицированной полуплоскости. Изучению дисперсии волн в слоистых композитных материалах с учетом проскальзывания слоев посвящена работа [20]. Результаты исследования закономерностей распространения волн в новых материалах из нанокompозитов приведены в [7, 18]. Развитию ультразвукового неразрушающего метода определения напряжений в приповерхностных слоях материалов (в рамках трехмерной линеаризованной теории упругости конечных деформаций) посвящены работы [6, 17]. В работах [3, 4, 6], относящихся к первому направлению, предложена модель упругого тела, учитывающая начальные напряжения и построенная на основании трехмерной линеаризованной теории упругости при конечных начальных деформациях. Разработке модели покоящейся и движущейся

вязкой сжимаемой жидкости с привлечением трехмерных линеаризованных уравнений Навье – Стокса посвящены публикации [5, 13 – 16], относящиеся ко второму направлению. Процесс распространения акустических волн вдоль границы контакта предварительно деформированного высокоэластичного несжимаемого упругого тела и вязкой жидкой среды рассмотрен в [19]. Обзор работ, относящихся к первому и второму направлениям, и анализ полученных результатов выполнены в [3 – 6, 12 – 16, 19]. К третьему направлению относятся статьи [21, 23] и монография [22], в которых приведены результаты исследования распространения нелинейных поверхностных упругих волн в рамках модели Мурнагана с учетом геометрической и физической нелинейностей.

Отметим, что волны, распространяющиеся вдоль границы контакта упругого слоя и слоя жидкости, относятся к числу обобщений основательно исследованных основных типов акустических волн (Рэлея, Стоунли, Лява и Лэмба). Обзор работ и анализ результатов, полученных в рамках классической теории упругости и модели идеальной сжимаемой жидкости, приведены в [1]. Отметим, что значительное практическое использование поверхностных волн требует учета свойств, которые присущи реальным средам. К числу таких факторов относится вязкость жидкости. Рассмотренные задачи и результаты, полученные с учетом этого свойства жидкости, приведены в [2, 4, 5, 12 – 16, 19].

В данной работе для исследования распространения волн в системе слой жидкости – упругий слой привлекается модель вязкой сжимаемой ньютоновской жидкости. При этом используются трехмерные линеаризованные уравнения Навье – Стокса для жидкости и линейные уравнения классической теории упругости для твердого тела. Предполагается, что жидкость находится в состоянии покоя и тепловые эффекты не учитываются. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости и упругого тела, предложенные в работах [3 – 6, 13 – 16].

### 1. Постановка задачи.

Рассмотрим задачу о распространении акустических волн в гидроупругой системе, состоящей из изотропного упругого слоя и слоя вязкой сжимаемой жидкости. Решение получим с привлечением трехмерных линейных уравнений классической теории упругости для твердого тела и линеаризованных уравнений Навье – Стокса для жидкости, находящейся в состоянии покоя. В рамках принятых моделей основные соотношения для системы упругое твердое тело – вязкая сжимаемая жидкость принимают такой вид:

$$\mu \Delta \bar{u} + (\lambda + \mu) \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 0, \quad \sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \bar{\nabla} \bar{u}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \nu^* \Delta \bar{v} + \frac{1}{\rho_0} \bar{\nabla} p - \frac{1}{3} \nu^* \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{v}) = 0, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{v} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2, \quad a_0 = \text{const}; \quad (2)$$

$$P_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} \bar{\nabla} \bar{v} + \mu^* \left( \frac{\partial v_i}{\partial z_j} + \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \right), \quad \lambda^* = -\frac{2}{3} \mu^*. \quad (3)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $u_i$  – компоненты вектора перемещений твердого тела;  $\rho$  – плотность материала упругого слоя;  $\lambda$  и  $\mu$  – константы Ляме материала твердого тела;  $v_i$  – составляющие вектора возмущений скорости жидкости;  $\rho^*$  и  $p$  – возмущения плотности и давления в жидкости;  $\nu^*$  и  $\mu^*$  – кинематический и динамический коэффициенты вязкости жидкости;  $\rho_0$  и  $a_0$  – плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя;  $P_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  – составляющие напряжений соответственно в жидкости и упругом теле.

Равенства (1) описывают поведение твердого тела. Малые колебания вязкой сжимаемой жидкости, находящейся в состоянии покоя и без учета тепловых эффектов, описывают соотношения (2), (3).

Далее предположим, что упругий слой заполняет объем:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $-h_2 \leq z_2 \leq 0$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$  и контактирует со слоем вязкой сжимаемой жидкости, занимающим объем:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $0 \leq z_2 \leq h_1$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$ . Примем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси  $oz_3$ . Поскольку в этом случае волна, которая распространяется в направлении оси  $oz_1$  и возмущения, ее вызывающие, не зависят от переменной  $z_3$ , то задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости  $oz_1z_2$ .

Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений (1) – (3) при следующих граничных условиях:

$$P_{21}|_{z_2=0} = \sigma_{21}|_{z_2=0}, \quad P_{22}|_{z_2=0} = \sigma_{22}|_{z_2=0}, \quad v_1|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{z_2=0}, \quad v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0}; \quad (4)$$

$$\sigma_{21}|_{z_2=-h_2} = 0, \quad \sigma_{22}|_{z_2=-h_2} = 0, \quad P_{21}|_{z_2=h_1} = 0, \quad P_{22}|_{z_2=h_1} = 0. \quad (5)$$

В дальнейшем для решения задачи гидроупругости воспользуемся представлениями общих решений для твердых упругих тел и вязкой сжимаемой жидкости, предложенными в работах [3 – 6, 13 – 16], т.е.

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi_1; \quad (6)$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t}, \quad (7)$$

где введенные потенциалы  $\chi_i$  являются решениями следующих уравнений:

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

$$\left[ \left( 1 + \frac{4\nu^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \nu^* \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] \chi_3 = 0. \quad (8)$$

Для анализа распространения возмущений, которые гармонически изменяются во времени, решения системы уравнений разыскиваем в классе бегущих волн

$$\chi_i = X_i(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)], \quad i = \overline{1,3}, \quad (9)$$

где  $k$  ( $k = \beta + i\gamma$ ) – волновое число;  $\gamma$  – коэффициент затухания волны;  $\omega$  – круговая частота.

Заметим, что выбранный в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Далее решаем две задачи Штурма – Лиувилля на собственные значения для уравнений движения упругого тела и жидкости, а также находим соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (4), (5) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения, приравняв определитель системы к нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \left\| e_{mn} \left( c, \gamma, \lambda, \mu, \rho, \rho_0, a_0, \bar{\mu}^*, \omega h_1 / c_s, \omega h_2 / c_s \right) \right\| = 0, \quad m, n = \overline{1, 8}, \quad (10)$$

где  $c$  – фазовая скорость мод в гидроупругой системе;  $h_1$  – толщина слоя жидкости;  $h_2$  – толщина упругого слоя;  $c_s$  ( $c_s^2 = \mu / \rho$ ) – скорость волны сдвига в твердом теле.

Как известно, в неограниченном сжимаемом упругом теле существуют продольная и сдвиговая волны. В идеальной сжимаемой жидкой среде распространяется только продольная волна. В вязкой сжимаемой жидкости существуют как продольная волна, так и волна сдвига. Именно эти волны, взаимодействуя между собой на свободных граничных поверхностях, а также на поверхностях контакта сред, порождают сложное волновое поле в гидроупругой системе.

Заметим, что особенность распространения возмущений в гидроупругом волноводе указанной структуры обусловлена наличием в упругом теле и жидкости граничных поверхностей. Это значительно усложняет картину волнового поля в нем. Причиной этого является то, что в формировании поля в гидроупругой системе существенную роль играют не только наличие жидкости, а также взаимодействие волн с поверхностью упругого тела, контактирующего с жидкой средой, но и наличие свободных границ и их взаимовлияние. Взаимодействие продольных и сдвиговых волн на граничных поверхностях приводит к возникновению в гидроупругом волноводе довольно сложного спектра мод.

Отметим, что полученное дисперсионное уравнение (10) является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев, которые рассмотрены в работах [1, 2, 12]. В частности, если  $a_0$  устремить к бесконечности, то (10) переходит в уравнение для определения параметров мод в случае взаимодействия с вязкой несжимаемой жидкостью. Если  $\bar{\mu}^*$  положить равным нулю, то из (10) получим результаты для гидроупругой системы с идеальной жидкостью. При  $\rho_0 = 0$  равенство (10) перейдет в уравнение для определения скоростей волн Лэмба [1]. Если дополнительно устремить  $h_2$  к бесконечности, получим соотношение для определения скоростей поверхностных волн Рэлея [1]. При  $\rho_0 \neq 0$  и  $h_1 \rightarrow \infty$  равенство перейдет в уравнение Стоунли [1].

## 2. Анализ численных результатов.

В дальнейшем дисперсионное уравнение (10) решаем численно. При этом числовые расчеты проводим для системы органическое стекло – вода, которая характеризуется следующими параметрами: упругий слой –  $\rho = 1160$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 3,96 \cdot 10^9$  Па,  $\mu = 1,86 \cdot 10^9$  Па; слой жидкости –  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $a_0 = 1459,5$  м/с,  $\bar{\mu}^* = 0,001$ ,  $\bar{a}_0 = a_0 / c_s = 1,1526$ .

Результаты вычислений представлены на рис. 1 – 12.

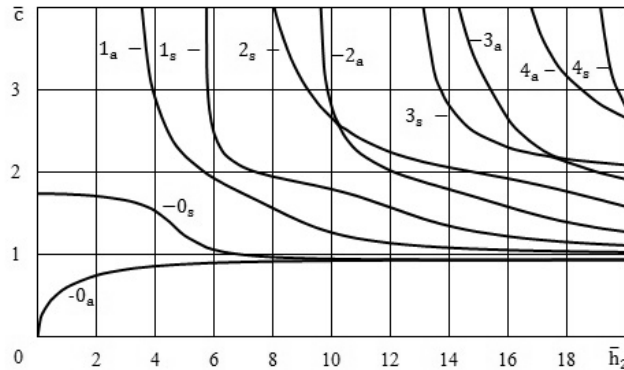


Рис. 1

На рис. 1 для упругого слоя, не взаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}_2$  ( $\bar{h}_2 = \omega h_2/c_s$ ). Номерами  $n_a$  обозначены антисимметричные моды, а  $n_s$  – соответственно, симметричные моды.

На рис. 2 представлены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода (зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) от безразмерной толщины слоя вязкой сжимаемой жидкости  $\bar{h}_1$  ( $\bar{h}_1 = \omega h_1/c_s$ ) для тонкого упругого слоя с толщиной, равной  $\bar{h}_2 = 2$ ).

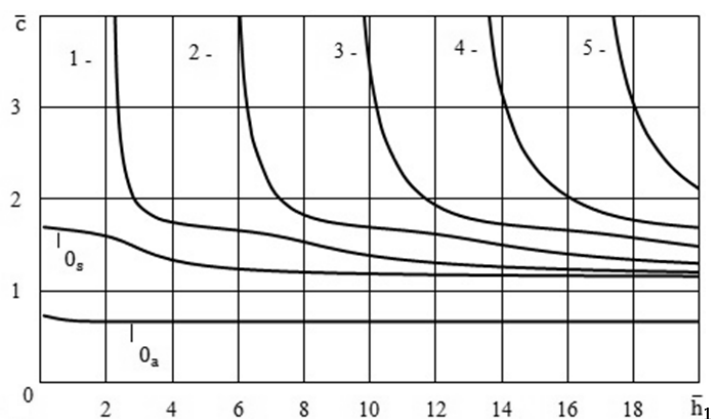


Рис. 2

Характер влияния вязкости жидкости на скорости мод в гидроупругой системе иллюстрируют графики на рис. 3, 4, где представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей мод  $c^*$  ( $c^* = (c_i - c_v)/c_i$ ,  $c_i$  – фазовая скорость нормальных волн в гидроупругой системе с идеальной жидкостью;  $c_v$  – фазовая скорость мод в системе с вязкой жидкостью) от безразмерной величины толщины слоя жидкости  $\bar{h}_1$  для первых 7 мод. На этих рисунках представлены графики для гидроупругого волновода, толщина упругого слоя которого  $\bar{h}_2 = 2$ .

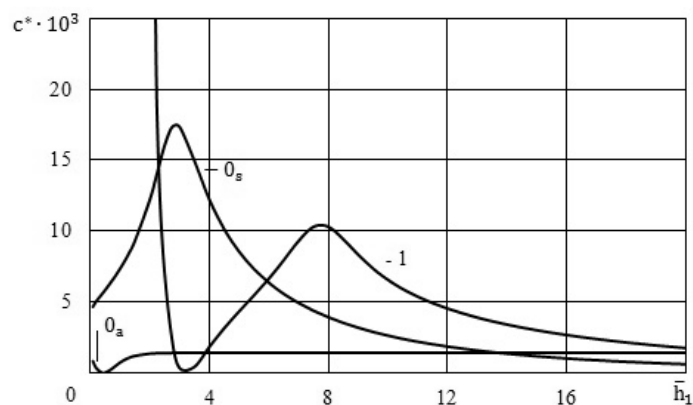


Рис. 3

На рис. 5 показаны зависимости безразмерных величин коэффициентов затухания мод  $\bar{\gamma}$  ( $\bar{\gamma} = \gamma/k_s$ ,  $k_s$  – волновое число волны сдвига в материале упругого слоя) от

безразмерной величины толщины слоя вязкой жидкости  $\bar{h}_1$  для гидроупругого волновода, толщина упругого слоя которого  $\bar{h}_2=2$ .

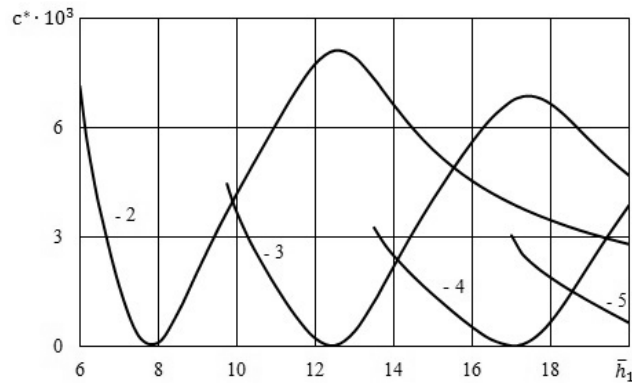


Рис. 4

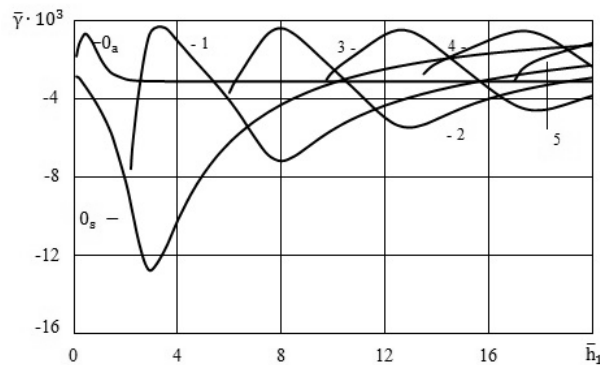


Рис. 5

Из графиков, представленных на рис. 1, следует, что скорость нулевой антисимметричной моды Лэмба при росте толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}_2$  стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,9336$ ) снизу, а скорость нулевой симметричной моды стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  сверху. Скорости всех высших мод Лэмба при увеличении толщины упругого слоя (частоты) стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$ .

Графики для гидроупругой системы, которые приведены на рис. 2, для случая тонкого упругого слоя с  $\bar{h}_2=2$ , показывают, что при росте толщины вязкого жидкого слоя  $\bar{h}_1$  скорость нулевой антисимметричной моды стремится к величине равной 0,6698, которая меньше скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,7691$ ). Скорости нулевой симметричной моды и всех высших мод, порождаемых слоем жидкости, стремятся к скорости распространения звука в жидкой среде  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 1,1526$ ). При этом механические параметры гидроупругого волновода такие, что  $\bar{a}_0 = 1,1526 > \bar{c}_s$ .

Из графического материала, представленного на рисунках 3 – 5, непосредственно следует, что для всех мод, кроме нулевой симметричной моды, существуют жидкие слои определенной толщины, при которых влияние вязкости жидкости на фазовые скорости мод является минимальным и незначительным. Вместе с тем в случае тонкого упругого слоя для ряда мод существуют жидкие слои с толщинами, при которых

влияние вязкости жидкости на фазовые скорости этих мод значительно. Графики, приведенные на рис. 5, показывают, что для большинства мод существуют жидкие слои определенной толщины, при которых величины коэффициентов затухания принимают как наименьшее, так и наибольшее значение.

На рис. 6 представлены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, которые показывают зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод от безразмерной величины толщины слоя вязкой сжимаемой жидкости  $\bar{h}_1$  для толстого упругого слоя с толщиной, равной  $\bar{h}_2=10$ .

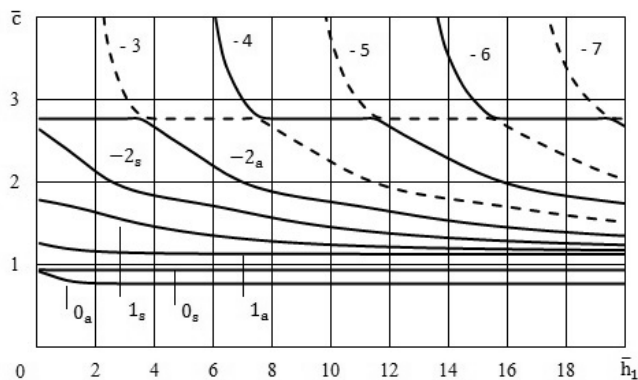


Рис. 6

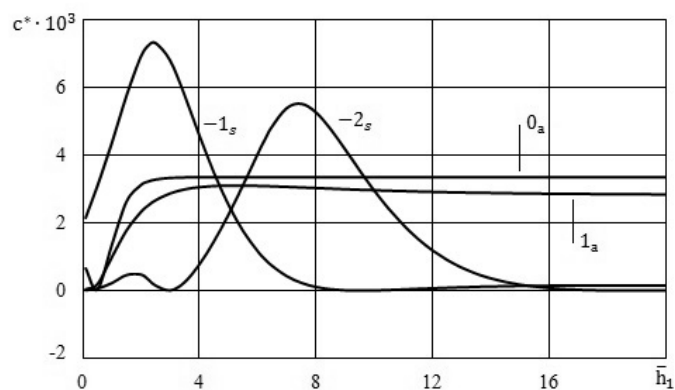


Рис. 7

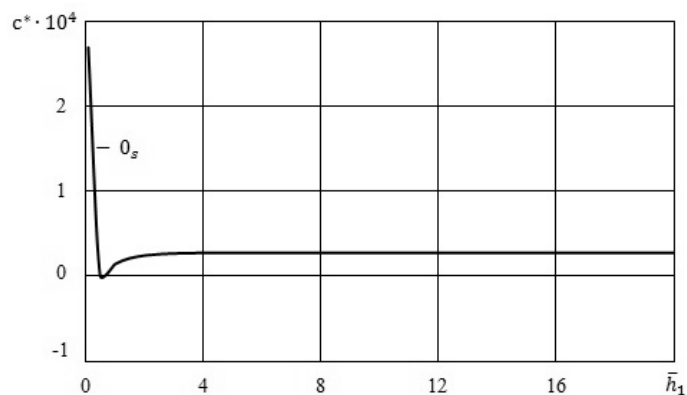


Рис. 8

Характер влияния вязкости жидкости на скорости мод в гидроупругой системе иллюстрируют графики на рис. 7 – 9, где представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей  $c^*$  от толщины слоя жидкости  $\bar{h}_1$  для первых 11 мод. На этих рисунках представлены графики для гидроупругого волновода, толщина упругого слоя которого  $\bar{h}_2=10$ .

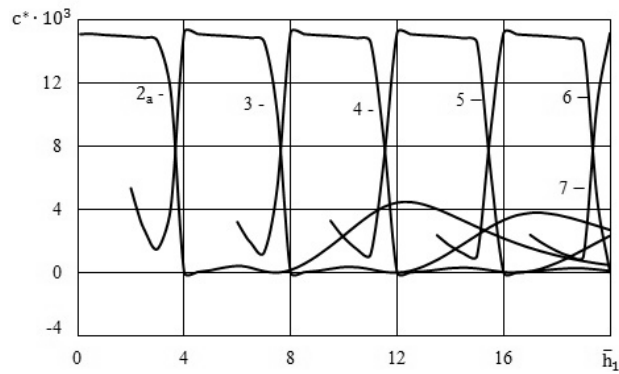


Рис. 9

На рис. 10 – 12 приведены зависимости безразмерных величин коэффициентов затухания мод  $\bar{\gamma}$  от безразмерной величины толщины слоя вязкой жидкости  $\bar{h}_1$  для толстого упругого слоя с толщиной, равной  $\bar{h}_2=10$ .

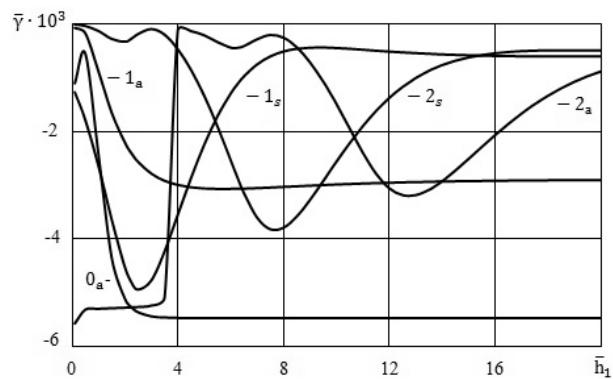


Рис. 10

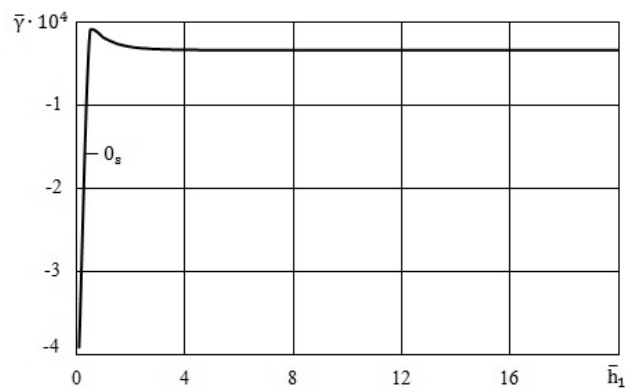


Рис. 11



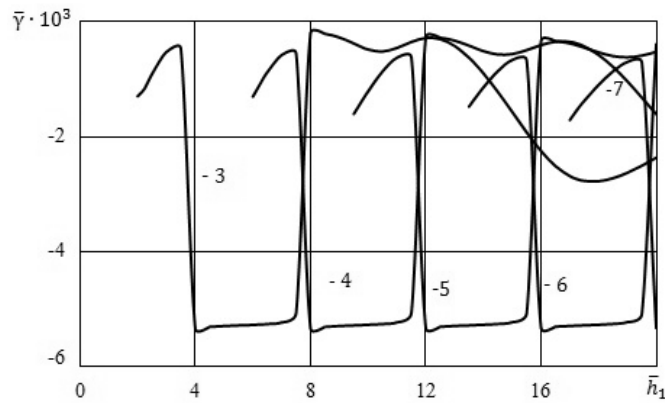


Рис. 12

Графики для гидроупругой системы, которые приведены на рис. 6 для случая толстого упругого слоя с  $\bar{h}_2 = 10$  показывают, что при росте толщины вязкого жидкого слоя  $\bar{h}_1$  скорость нулевой антисимметричной моды стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,7691$ ), а скорость нулевой симметричной моды – к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,9336$ ). При увеличении толщины жидкого слоя скорость первой антисимметричной моды стремится к скорости волны, величина которой (1,1286) меньше скорости распространения звука в жидкости ( $\bar{a}_0 = 1,1526$ ). Фазовые скорости всех высших мод стремятся к скорости распространения звука в жидкой среде  $\bar{a}_0 = 1,1526$ . При этом механические параметры гидроупругого волновода такие, что  $\bar{a}_0 = 1,1526 > \bar{c}_s$ .

Из графического материала, представленного на рисунках 7 – 12, в отличие от тонкого упругого слоя для гидроупругого волновода с толстым упругим слоем следует, существование для ряда мод не только отдельных частот, но и интервалов частот, для которых вязкость жидкости оказывает на их фазовые скорости как наименьшее, так и наибольшее влияние. При этом для мод 3 – 7, порождаемых жидкой средой, существуют также как определенные частоты, так и интервалы частот, при которых величины коэффициентов затухания принимают как минимальное, так и максимальное значение.

#### Заключение.

На основе трехмерных линеаризованных уравнений Навье–Стокса для вязкой жидкости и линейных уравнений классической теории упругости для твердого слоя построены дисперсионные кривые и исследовано распространение акустических волн в широком диапазоне частот. Дан анализ влияния вязкой жидкости, толщин упругого и жидкого слоев на фазовые скорости и коэффициенты затухания мод как для тонкого, так и для толстого упругих слоев. Установлено, что в гидроупругом волноводе с заданными механическими параметрами и упругим слоем произвольной заданной фиксированной толщины при возрастании толщины слоя жидкости фазовые скорости мод высокого порядка стремятся к скорости распространения волны звука в жидкой среде, которая больше скорости волны сдвига в твердом теле. Показано, что в случае толстого упругого слоя для всех мод существуют жидкие слои определенной толщины, при которых влияние вязкой жидкости на фазовые скорости и коэффициенты затухания мод является минимальным. Выявлено также, что для ряда мод существуют как определенные частоты, так и интервалы частот, при которых влияние вязкой жидкости на фазовые скорости и коэффициенты затухания этих мод значительно. Развитый подход и полученные результаты позволяют для волновых процессов установить пределы применимости модели идеальной сжимаемой жидкости.

РЕЗЮМЕ. На основі тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є – Стокса для в'язкої рідини та лінійних рівнянь класичної теорії пружності для пружного шару побудовано дисперсійні криві та досліджено поширення акустичних хвиль у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив в'язкості рідини, товщини пружного та рідкого шарів на фазові швидкості та коефіцієнти згасання мод як для тонкого, так і для товстого твердих шарів. Показано, що у випадку товстого пружного шару для всіх мод існують рідкі шари певної товщини та певні частоти, для яких вплив в'язкості рідини на фазові швидкості та коефіцієнти згасання мод є мінімальним. Виявлено, що для ряду мод існують як певні частоти, так й інтервали частот, при яких вплив в'язкості рідини на фазові швидкості та коефіцієнти згасання цих мод значний. Розвинутий підхід та отримані результати дозволяють для хвильових процесів встановити межі застосування моделі ідеальної стисливої рідини. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
2. *Волькенштейн М.М., Левин В.М.* Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // Акуст. журн. – 1988. – **34**, № 4. – С. 608 – 615.
3. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2 – х т. Т.1. Общие вопросы – К.: Наук. думка, 1986. – 374 с.
4. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. в 2 – х т. Т.2. Закономерности распространения. – К.: Наук. думка, 1986. – 536 с.
5. *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – К.: А.С.К., 1998. – 350 с.
6. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: А.С.К., 2004. – 672 с.
7. *Гузь А.Н., Руцицкий Я.Я., Гузь И.А.* Введение в механику нанокompозитов. – К.: Ин-т механики им. С.П.Тимошенко, 2010. – 398 с.
8. *Akbarov S.D.* Dynamical (time-harmonic) axisymmetric interface stress field in the finite pre-strained half-space covered with the finite pre-stretched layer // Int. J. Eng. Sci. – 2006. – **44**, N 1 – 2. – P. 93 – 112.
9. *Akbarov S. D., Emiroglu I., Tasci F.* The Lamb's problem for a half-space covered with the pre-stretched layer // Int. J. Mech. Sci. – 2005. – N 9. – P. 1326 – 1349.
10. *Akbarov S.D., Ozaydin O.* The effect of initial stresses on harmonic stress fields within the stratified half-plane // Europ. J. Mech. – A/Solids. – 2001. – **20**, N 3. – P. 385 – 396.
11. *Akbarov S.D., Ozisik M.* The influence of the third order elastic constants to the generalized Rayleigh wave dispersion in a pre-stressed stratified half-plane // Int. J. Eng. Sci. – 2003. – **41**, N 17. – P. 2047 – 2061.
12. *Bagno A.M., Guz A.N.* Elastic Waves in Pre-stressed Bodies Interacting with a Fluid (survey) // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, N 6. – P. 435 – 463.
13. *Guz A. N.* Aerohydroelasticity Problems for Bodies with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 1980. – **16**, N 3. – P. 175 – 190.
14. *Guz A.N.* Compressible, Viscous Fluid Dynamics (review). Part I // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 1. – P. 14 – 39.
15. *Guz A.N.* The Dynamics of a Compressible Viscous Liquid (review). Part II // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 3. – P. 281 – 302.
16. *Guz A.N.* Dynamics of compressible viscous fluid. – Cambridge Scientific Publishers, 2009. – 428 p.
17. *Guz A.N.* On the foundations of the ultrasonic non-destructive determination of stresses in near-the-surface layers of materials. Review // J. Phys. Sci. and Appl. – 2011. – **1**, N 1, – P. 1 – 15.
18. *Guz I.A., Rushchitsky J. J.* Computational simulation of harmonic wave propagation in fibrous micro-and nanocomposites // Comp. Sci. and Tech. – 2007. – **67**, N 5. – P. 861 – 866.
19. *Ottenio M., Destrade M., Ogden R.W.* Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid // Int. J. Non-Lin. Mech. – 2007. – **42**, N 2. – P. 310 – 320.
20. *Panasyyuk O.N.* Influence of Interface Conditions on Wave Propagation in Composite Laminates // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 4. – P. 399 – 406.
21. *Rushchitsky J. J.* On a Nonlinear Description of Love Waves // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 629 – 640.
22. *Rushchitsky J. J.* Nonlinear elastic waves in materials. – Berlin: Springer, 2014. – 453 p.
23. *Rushchitsky J. J., Sinchilo S.V.* On Two-Dimensional Nonlinear Wave Equations for the Murnaghan Model // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 5. – P. 512 – 520.
24. *Surkay D., Akbarov S.D.* The influence of the third order elastic constants on the dynamical interface stress field in a half-space covered with a pre-stretched layer // Int. J. Non-Lin. Mech. – 2006. – **41**, N 3. – P. 417 – 425.

Поступила 19.05.2014

Утверждена в печать 22.12.2015