

В. Б. Л а р и н

## О КОМПЕНСАЦИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ДАТЧИКОВ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: model@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** A problem of navigation of the simple wheeled transport robot is considered. This problem is solved in the statement that does not use the accelerometers and sensors of angle velocity, but uses the measurement of kinematical parameters of motion. It is supposed that the sensor of steering wheel turn angle has a regular error that should be compensated. A correction of navigating parameters is carried out by means of GPS's signals. The proposed approach is based on that the wheeled robot is considered as a system with non-holonomic constraints. Efficiency of such navigating system is shown on an example.

**Key words:** nonholonomic system, navigating system, GPS.

### Введение.

В проблеме управления подвижными объектами можно выделить задачи управления движением объекта в той или иной постановке (см., например [6, 9, 10]) и навигационные задачи, связанные с определением параметров движения (координаты скорости и т. п.). В этой связи можно констатировать актуальность задач навигации и управления колесными транспортными системами (см., например [13], где есть дальнейшие ссылки). Для навигации таких объектов используются различные системы, в том числе: сравнительно дешевые инерциальные навигационные системы (ИНС), которые корректируются сигналами GPS [12]; системы стереоскопического машинного зрения [13]; системы, использующие информацию о дороге [5], и др. Существенно, что при разработке систем, использующих ИНС и GPS, значительное внимание уделяется вопросам определения отказов в таких системах [12] или, если это возможно, вопросам компенсации тех или иных ошибок датчиков.

В [1] рассмотрена задача навигации простейшего колесного транспортного робота (ТР). Существенно, что навигационная задача в [1] решена без использования акселерометров и датчиков угловой скорости, т.е. без использования ИНС, а только путем использования кинематических параметров движения ТР (угол поворота рулевого колеса и т.п.). Коррекция вычисленных кинематических параметров движения осуществлялась с помощью сигналов GPS.

Обе эти процедуры базируются на том, что ТР рассматривался как система с неголономными связями. Так, например, в первом случае, для вычисления угловой скорости ТР использован тот факт, что угловая скорость пропорциональна тангенсу угла поворота рулевого колеса. В задаче коррекции эта модель ТР позволяла использовать получаемую от приемника GPS информацию о проекциях скорости для получения оценки ориентации ТР.

Ниже, как и в [1], рассмотрена простейшая задача навигации колесного ТР. Однако, в отличие от [1], предполагается, что датчик угла поворота рулевого колеса имеет систематическую ошибку, которую необходимо компенсировать. Используемый ниже алгоритм компенсации такой погрешности аналогичен алгоритмам [3, 4, 8].

Эффективность функционирования такой навигационной системы демонстрируется на примере.

### §1. Уравнения движения.

Для получения (в кинематическом приближении) уравнения движения ТР с одним рулевым колесом рассмотрим объект, совершающий плоско-параллельное движение в плоскости  $Oxy$ . Его положение характеризуется отрезком  $AB$  (рис. 1).

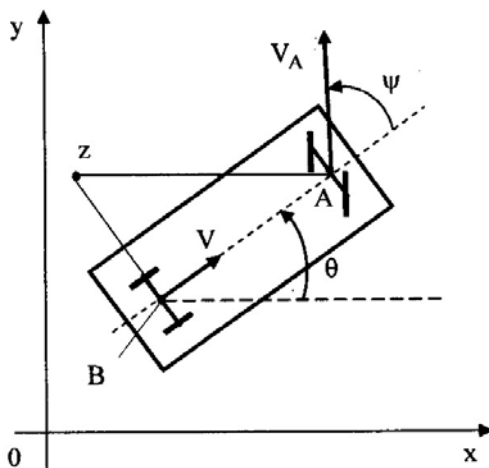


Рис. 1

Предполагаем, что скорость точки  $B$  направлена вдоль отрезка  $AB$ , а скорость точки  $A$  составляет угол  $\psi$  с направлением отрезка  $AB$  ( $\psi$  – можно интерпретировать как угол поворота рулевого колеса). Положение такой системы определяется координатами  $(x, y)$  точки  $B$  и углом  $\theta$ , который образует отрезок  $AB$  и ось  $Ox$ . Если обозначить  $Z$  – мгновенный центр скоростей объекта,  $V_A, V_B$  – скорости точек  $A$  и  $B$ ,  $L = |AB|$  ( $|\cdot|$  – длина отрезка), то можно получить следующее уравнение движения этого объекта:

$$\dot{x} = V \cos \theta; \quad \dot{y} = V \sin \theta; \quad \dot{\theta} = (V/2L) \operatorname{tg} \psi. \quad (1.1)$$

Таким образом, система (1.1) описывают в кинематическом приближении движение транспортного робота с одним рулевым колесом (аналог уравнений [11, ф-ла (11)]).

### §2. Навигация ТР.

В [1] показана возможность построения навигационного комплекса ТР без использования акселерометров и датчиков угловой скорости. Предполагается, что фигурирующая в (1.1), скорость  $V$  может быть получена в результате регистрации угловой скорости задних колес ТР. Как следует из последнего соотношения (1.1) при известной величине  $V$  угловая скорость  $\dot{\theta}$  определяется величиной угла поворота рулевого колеса (величиной  $\psi$ ). В этой ситуации можно путем интегрирования (1.1) находить, как функции времени, координаты объекта  $(x, y)$  и ориентацию объекта (угол  $\theta$ ). Предполагая, что регистрация значений  $V, \psi$  происходит в дискретные моменты времени, для получения оценок текущих значений  $x, y, \theta$  можно использовать ту или иную аппроксимацию. Так, пусть измерение параметров  $V$  и  $\psi$  происходит через равные интервалы времени  $d$ , т. е.  $t_{k+1} = t_k + d$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , где  $t_k$  – момент  $k$ -го измерения.

Обозначим  $u_k$  вектор навигационных параметров в этот же момент времени:

$$u_k = [x_k \quad y_k \quad \theta_k]^T.$$

Здесь и далее верхний индекс «Т» означает операцию транспонирования.

Далее будем использовать следующую аппроксимацию нелинейной системы (1.1), которая определяет последовательность векторов  $u_k$ :

$$u_k = u_{k-1} + d(5w_k + 8w_{k-1} - w_{k-2})/12; \quad (2.1)$$

$$w_k = \left[ V_k \cos \bar{\theta}_k \quad V_k \sin \bar{\theta}_k \quad \frac{V_k}{2L} \operatorname{tg} \psi_k \right]^T; \quad \bar{\theta}_k = \theta_{k-1} + \frac{dV_{k-1} \operatorname{tg} \psi_{k-1}}{2L}.$$

Отметим, что соотношения (2.1) можно рассматривать как аналог соотношению (1) [5]. Точностные характеристики такой навигационной системы (НС) подробно рассмотрены в [1].

### §3. Уравнения фильтра.

Обозначим  $\delta\mu = [\delta x \quad \delta y \quad \delta\theta \quad \delta\psi]^T$  – вектор погрешностей определения навигационных параметров для систем, движение которой описывается уравнениями (1.1). Предполагая, что скорость  $V$  регистрируется точно, а  $\delta\psi$  – погрешность датчика угла поворота рулевого колеса постоянна, можно записать уравнения изменения ошибок навигационной системы, использующей в качестве исходной информации кинематические параметры системы (1.1) (аналог уравнения (3.1) в [8]):

$$\delta\dot{\mu} = F\delta\mu + \eta; \quad (3.1)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -V \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & V \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{V}{L \cos^2 \psi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где  $\eta$  – вектор шумов измерений.

В качестве дискретного аналога (3.1), т.е. соотношения связывающего изменение ошибок через малый интервал времени  $d$ , принимается следующее уравнение (аналог уравнения [8, (3.2)]):

$$\delta\mu_{k+1} = \Phi_k \delta\mu_k + n_k; \quad (3.2)$$

$$\Phi = I + dF = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -dV \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & dV \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{dV}{L \cos^2 \psi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $n_k$  – вектор случайных помех. Здесь и далее  $I$  – единичная матрица соответствующего размера. Пусть на  $k$ -ом такте работы системы имеет место следующий процесс наблюдений:

$$z_k = H\delta\mu_k + \xi_k \quad (\xi_k \text{ – погрешность измерений}). \quad (3.3)$$

Конкретизируем эту процедуру применительно к рассматриваемому ТР. Пусть GPS приемник установлен в точке  $B$  (рис. 1). В этом случае он дает возможность получать (наблюдать) оценки координат и скорости точки  $B$ . Отметим, что как следствие того, что ТР рассматривается как система с неголономными связями, скорость

точки  $B$  направлена вдоль отрезка  $AB$ , т.е. образует угол  $\theta$  с осью  $Ox$ . Таким образом, располагая полученной информацией о проекциях скорости точки  $B$  на координатные оси, можно получить оценку угла  $\theta$ . Другими словами, можно принять, что GPS приемник, располагаемый в точке  $B$ , дает информацию о координатах  $x, y$  и угле  $\theta$ ; однако GPS приемник не дает информацию о величине систематической погрешности  $\delta\psi$ . Поэтому, можно принять, что матрица  $H$  в (3.3) имеет следующую структуру:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Таким образом, используя соотношения (3.3), (3.4), задачу коррекции НС можно формулировать как задачу оптимальной фильтрации. Известно (см., например, п.12.4 в [2]), что решение этой задачи имеет вид

$$\delta\mu_k = \delta\bar{\mu}_k + K_k (z_k - H\delta\bar{\mu}_k); \quad \delta\bar{\mu}_k = \Phi_k \delta\mu_k. \quad (3.5)$$

Матрица коэффициентов усиления фильтра ( $K_k$ ), генерирующего вектор оптимальной оценки  $\delta\mu_k$ , определяется следующим образом (уравнения фильтра):

$$K_k = M_k H^T (H M_k H^T + R_k)^{-1}; \quad (3.6)$$

$$M_{k+1} = \Phi_k S_k \Phi_k^T + Q_k; \quad (3.7)$$

$$S_k = M_k - K_k (H M_k H^T + R_k) K_k^T. \quad (3.8)$$

Здесь матрицы  $Q_k, R_k$  являются ковариационными матрицами шумов  $n_k, \xi_k$ , которые фигурируют в (3.2), (3.3). Матрица  $M_0$  – ковариационная матрица начальной оценки вектора  $\delta u$ , предполагается заданной. Отметим, что обычно коррекция ошибок НС происходит через  $j > 1$  тактов. В этом случае, в промежутках между моментами коррекции, изменение ошибок НС происходит в соответствии с уравнением (3.2), а изменение их корреляционной матрицы – в соответствии с (3.7) (можно полагать, что на этих тактах  $H = 0$ , т.е. фигурирующая в (3.6) матрица  $K = 0$ ). На такте, на котором осуществляется коррекция, изменения корреляционной матрицы описываются уравнением (3.8).

Коррекция систематической погрешности  $\delta\psi$  происходит следующим образом. Полученная в результате коррекции (3.5) на такте, когда  $H \neq 0$ , оценка  $\delta\tilde{\psi}$  систематической погрешности  $\delta\psi$  (четвертая компонента вектора  $\delta\mu_k$ ) вычисляется из показаний датчика угла поворота рулевого колеса (до следующего момента коррекции, при котором  $H \neq 0$ ).

Так, пусть  $t_n$  – моменты коррекции (моменты, когда  $H \neq 0$ ). Обозначим  $\delta\psi_{n-}, \delta\psi_{n+}$  – значения систематической погрешности  $\delta\psi$  до и после  $t_n$ , а  $\delta\tilde{\psi}_n$  – оценку систематической погрешности в момент  $t_n$ . В этом случае имеем

$$\delta\psi_{n+} = \delta\psi_{n-} - \delta\tilde{\psi}_n. \quad (3.9)$$

Для повышения точности вычислительных процедур в такого рода задачах обычно используются алгоритмы, позволяющие вычислять множители Холецкого соответствующих ковариационных матриц. Ниже описан алгоритм [7], базирую-

щийся на QR-разложении матрицы. Предполагается, что матрица  $R_k$  – обратима (общий случай см. в [7]).

#### §4. Вычисление множителей Холецкого.

Пусть  $m_k, p_k, q_k, r_k$  – множители Холецкого матриц  $M_k, S_k, Q_k, R_k$ , соответственно, т.е.

$$M_k = m_k m_k^T; \quad S_k = p_k p_k^T; \quad Q_k = q_k q_k^T; \quad R_k = r_k r_k^T. \quad (4.1)$$

В рассматриваемом случае обратимости матрицы  $R_k$  соотношение (3.8) можно переписать в следующем виде:

$$p_k p_k^T = m_k \left( I + m_k^T H^T R_k^{-1} H m_k \right)^{-1} m_k^T. \quad (4.2)$$

Представим выражение, стоящее в скобках, в виде произведения двух прямоугольных матриц

$$I + m_k^T H^T R_k^{-1} H m_k = N_k N_k^T; \quad N_k = \begin{bmatrix} I & m_k^T H^T r_k^{-1} \end{bmatrix}.$$

С помощью ортогональной матрицы  $U$ , используя алгоритм QR-разложения, преобразуем матрицу  $N^T$  следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \Lambda_k \\ 0 \end{bmatrix} = U_k N_k^T, \quad (4.3)$$

где  $\Lambda_k$  – обратимая матрица.

Итак, согласно (4.2), (4.3) имеем равенство

$$p_k = m_k \Lambda_k^{-1}. \quad (4.4)$$

Аналогично, представим правую часть (3.7) в виде произведения двух прямоугольных матриц и используем QR-разложение этих матриц, которое осуществляет ортогональная матрица  $Z_k$ .

$$m_{k+1} m_{k+1}^T = T_k T_k^T; \quad T_k = \begin{bmatrix} \Phi_k p_k & q_k \end{bmatrix}; \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} X_k^T \\ 0 \end{bmatrix} = Z_k T_k^T; \quad (4.6)$$

$$m_{k+1} = X_k. \quad (4.7)$$

Таким образом, по заданным  $m_k, r_k$ , согласно (4.3), (4.4), вычисляется множитель  $p_k$ , а далее, согласно (4.5 – 4.7), находим множитель  $m_{k+1}$ .

*Пример.* Рассмотрим ТР (рис. 1), расстояние между осями которого  $L = 1$  м, движется по окружности, радиус которой  $R = 10$  м, с постоянной скоростью  $V = 1$  м/с. Согласно последнему соотношению (1.1)  $\operatorname{tg} \psi = L / R = 10^{-1}$ . Измерения происходят с частотой 50 Hz, т.е.  $d = 0,02$  с. Принимаются следующие гипотезы о погрешностях измерений кинематических параметров ТР: скорость  $V$  регистрируется без помех, измерения угла поворота рулевого колеса  $\psi$  сопровождаются аддитивными погрешностями. Так, погрешность измерений угла поворота  $\delta\psi = m + n$  содержит систематическую погрешность  $m$  и случайную  $n$ , которая моделируется последовательностью случайных чисел  $n_k$  с равномерным распределением, нулевым математическим

ожиданием и дисперсией  $\sigma = 0,03$ . Интервал времени, на котором проводилось моделирование, принят равным 120 с. В начальный момент ТР расположен в точке с координатами:  $x = 10$  м,  $y = 0$ . Угол  $\theta$  при  $t = 0$  принят равным  $\pi / 2$ .

Проиллюстрируем возможность использования сигналов GPS для коррекции НС. Частота коррекции принимается равной 1 Hz. Систематическая погрешность измерения угла поворота рулевого колеса принимается равной нулю ( $m = 0$ ) при  $t < 60$  с. Предполагается, что в момент  $t = 60$  с в датчике угла поворота рулевого колеса возникает систематическая погрешность, равная 0,2. Эта погрешность компенсируется в соответствии с соотношением (3.9). Матрица  $H$  задается соотношением (3.4). Определим фигурирующие в (4.2) множители Холецкого.

Полагаем, что матрицы  $q_k, r_k$  не зависят от  $k$ , т.е.  $q_k = q, r_k = r, k = 0, 1, \dots$ . Выберем следующие значения для этих матриц

$$q = 10^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}; \quad r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Определяющая ковариационную матрицу начальной оценки вектора  $\delta\mu$  матрица  $p_0$  принимается в виде:  $p_0 = 10^{-3} I$ .

Результаты моделирования работы описанного алгоритма НС приведены на рис. 2 – 5.

Так, на рис. 2 приведен график оценки траектории движения ТР. Графики погрешностей определения координат приведены на рис. 3 (сплошная линия соответствует координате  $x$ , штриховая –  $y$ ).

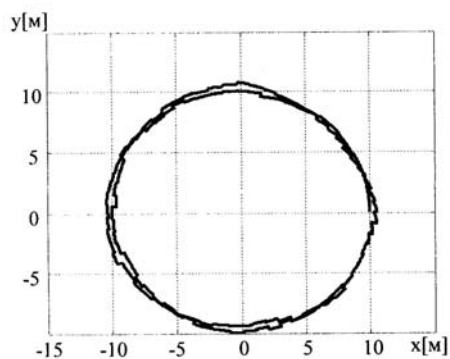


Рис. 2

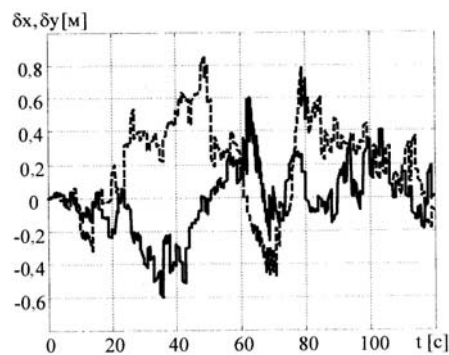


Рис. 3

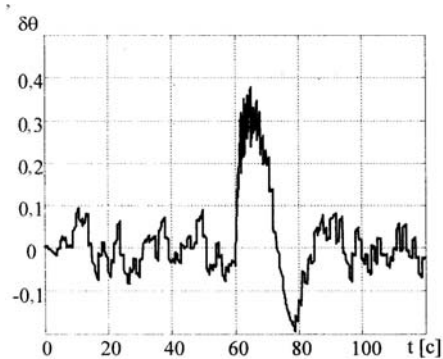


Рис. 4

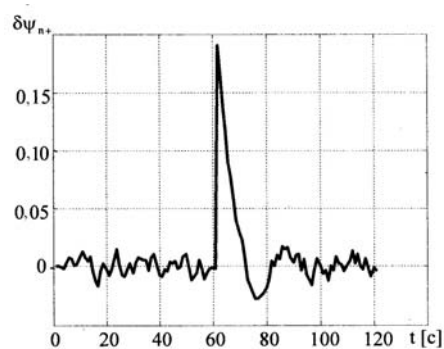


Рис. 5

Далее, на рис. 4 показан график погрешности определения ориентации ТР (график  $\delta\theta$ ). Рис. 5 дает представление о динамике процесса компенсации (в соответствии с (3.9)) систематической погрешности датчика угла поворота рулевого колеса.

Отметим, что согласно результатам, приведенных на этих графиках, описанный алгоритм НС позволяет компенсировать значительные систематические погрешности датчика.

#### **Заключение.**

Рассмотрена задача навигации простейшего колесного транспортного робота. Задача решена без использования акселерометров и датчиков угловой скорости, а только с использованием измерения кинематических параметров движения. Предполагается, что датчик угла поворота рулевого колеса имеет систематическую ошибку, которую необходимо компенсировать. Коррекция навигационных параметров осуществляется с помощью сигналов GPS. Излагаемый подход базируется на том, что колесный робот рассматривается как система с неголономными связями. Эффективность функционирования такой навигационной системы демонстрируется на примере.

**Р Е З Ю М Е .** Розглянуто задачу навігації найпростішого колісного транспортного робота. Задача розв'язана в постановці, яка не використовує акселерометри і датчики кутової швидкості, а використовує тільки вимірювання кінематичних параметрів руху. Припущено, що датчик кута повороту рулевого колеса має систематичну помилку, яку необхідно компенсувати. Корекція навігаційних параметрів здійснюється за допомогою сигналів GPS. Запропонований підхід базується на тому, що колісний робот розглянуто як систему з неголономними в'язями. Ефективність функціонування такої навігаційної системи демонструється на прикладі.

1. *Ларин В.Б.* О навигации колесного транспортного робота // Проблемы управления и информатики. – 2014. – № 4. – С. 89 – 95.
2. *Bryson A.E. Jr., Ho-Yu-Chi.* Applied Optimal Control. Optimization, Estimation and Control.– Braisidell Publishing Company. – Massachusetts: Waltham, 1969.– 544 p.
3. *Coopmans C.* Aggienav: A Small, Well Integrated Navigation Sensor System for Small Unmanned Aerial Vehicles // Proc. of the ASME 2009 Int. Design Engineering Technical Conf. & Computers and Information in Engineering Conference / IDETC/CIE 2009, August 30 – September 2, 2009. – San Diego, California, USA, DETC2009–87636. – P. 1 – 6.
4. *Coopmans C., Chao H., Chen Y.Q.* Design and Implementation of Sensing and Estimation Software in Aggienav, a Small Uav Navigation Platform // Proc. of the ASME 2009 Int. Design Engineering Technical Conf. & Computers and Information in Engineering Conference / IDETC/CIE 2009, August 30 – September 2, 2009. – San Diego, California, USA DETC2009–87675. – P. 1 – 6.
5. *El Najjar, M.E. d Bonnifait, Ph.* A Road-Matching Method for Precise Vehicle Localization Using Belief Theory and Kalman Filtering // Autonomous Robots. – 2005. – **19**. – P. 173 – 191.
6. *Khoroshun A.S.* Using Multicomponent Lyapunov Functions to Analyze the Absolute Parametric Stability of Singularly Perturbed Uncertain Mechanical Systems // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 2. – P. 206 – 221.
7. *Larin V.B.* Attitude-Determination Problems for a Rigid Body // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 7. – P. 870 – 898.
8. *Larin V.B., Tunik A.A.* On Inertial Navigation System Error Correction // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 2. – P. 213 – 223.
9. *Martynyuk A.A., Khoroshun A.S., Chernienko A.N.* Practical Stability of a Moving Robot with Respect to Given Domains // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 1. – P. 79 – 86.
10. *Martynyuk A.A., Khoroshun A.S.* Revisiting the Theory of Stability over a Finite Interval // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 3. – P. 335 – 340.
11. *Murray R.M., Sastry S.S.* Nonholonomic Motion Planning: Steering Using Sinusoid // IEEE Trans. Automatic Control. – 1993. – **38**, N 5. – P.700 – 716.
12. *Sukkarieh S., Nebot E.M., Durrant-Whyte H. F.* A High Integrity IMU/GPS Navigation Loop for Autonomous Land Vehicle Applications // IEEE Trans. Robot. Autom. – 1999. – **15**, N 3. – P. 572 – 578.
13. *Wei L., Cappelle C., Ruichek Y., Zann F.* GPS and Stereovision-Based Visual Odometry: Application to Urban SceneMapping and Intelligent Vehicle Localization // Int. J. of Vehicular Technology. – Vol.2011, Article ID 439074. – P. 1 – 17.

Поступила 15.09.2014

Утверждена в печать 22.12.2015