Л.В.Мольченко¹, И.И.Лоос², Л.Н.Федорченко

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ГИБКОЙ ОРТОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, пр. Глушкова, 4-е, 03127, Киев, Украина; e-mail: ¹ Mol lv@univ.kiev.ua, ² Loiri@ univ.kiev.ua

Abstract. In the axisymmetric statement, a solution is obtained for one nonlinear problem of magnetoelasticity, namely, for an orthotropic spherical shell of variable stiffness with orthotropic electrical conduction. The system of nonlinear differential equations is shown that describes the stress-strain state of flexible orthotropic shells of variable stiffness in mechanical and magnetic fields. A numerical example is given. An analysis of the stress state of orthotropic spherical shell is carried out in dependence on the external current and mechanical force.

Key words: orthotropic spherical shell, magnetic field, magnetoelasticity.

Введение.

Тонкие оболочки широко используются в качестве элементов конструкций современной техники. С учетом возрастающих требований, предъявляемых к условиям работы таких конструкций, наряду с жесткими оболочками необходимо применять и гибкие [2, 6, 7, 25]. В современной технике все чаще имеют место проблемы взаимодействия электромагнитных полей с твердыми деформированными телами.

Развитие теории сопряженных полей и теории электромагнитного взаимодействия с телами, которые деформируются, является одним из главных направлений развития современной механики твердого тела [8, 10, 11, 14 – 18, 23, 24].

Наряду с развитием теории гибких оболочек, необходимо создание и разработка теории гибких оболочек, находящихся в нестационарном магнитном поле, с учетом анизотропии их материала [3, 19, 20, 24].

В данной работе проведен анализ деформированного состояния усеченной ортотропной гибкой сферической оболочки переменной толщины, находящейся в магнитном поле под воздействием внешнего электрического поля, в осесимметричной постановке. При построении геометрически нелинейных уравнений ортотропной сферической оболочки, учитывается также ортотропная электропроводность.

1. Постановка задачи. Основные нелинейные уравнения.

Рассмотрим гибкую ортотропную сферическую оболочку переменной толщины в лагранжевых переменных. Такой подход позволяет учитывать нелинейность в соотношениях для деформаций и кривизн. При этом метрика оболочки практически остается недеформированной, так как радиус кривизны и параметры Ламе соответствуют недеформированному состоянию оболочки. Пренебрегаем влиянием процессов поляризации и намагничивания, а также температурными напряжениями. Принимаем, что к оболочке подводится переменный электрический ток. Упругие свойства материала оболочки являются ортотропными, главные направления упругости совпадают с направлениями соответствующих координатных линий. Электромагнитные свойства материала характеризуются тензорами электрической проводимости σ_{ij} , магнитной

проницаемости μ_{ij} и диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$. При этом, согласно [4] и следуя работе [22], для рассматриваемого класса проводящих ортотропных тел с ромбической кристаллической структурой имеем, что тензора σ_{ij} , μ_{ij} ,

Координатную поверхность в недеформированном состоянии относим к криволинейной ортогональной системе координат *s* и θ , где *s* – длина дуги меридиана, θ – центральный угол. Координатные линии *s* = const и θ = const являются линиями главных кривизн координатной поверхности.

С учетом диагонального вида тензоров σ_{ij} , μ_{ij} , ε_{ij} и согласно работам [2, 5, 14 – 17], учитывая геометрию оболочки, полная система уравнений осесимметричных ортотропных оболочек вращения в геометрически нелинейной постановке состоит из:

уравнений магнитоупругости –

$$\frac{\partial (rN_s)}{\partial s} - \cos\varphi \ N_\theta + \frac{r}{R_s}Q_s + r\left(P_s + \rho F_s^{\wedge}\right) = r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial (rQ_s)}{\partial s} - r\left(\frac{N_s}{R_s} - \frac{\sin\varphi}{r}N_\theta\right) + r\left(P_{\gamma} + \rho F_{\gamma}^{\wedge}\right) = r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$
(1)
$$\frac{\partial (rM_s)}{\partial s} - \cos\varphi \ M_\theta - rQ_s - r\left(N_s - \frac{\sin\varphi}{r}M_\theta\right) g_s = 0;$$

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial s} = -\frac{\partial B_{\gamma}}{\partial t} - \frac{\cos\varphi}{r}E_\theta;$$

$$\frac{\partial B_{\gamma}}{\partial s} = -\sigma_2 \mu \left[E_\theta + 0.5\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_s^+ + B_s^-\right) - \frac{\partial u}{\partial t}B_{\gamma}\right] - \frac{B_s^+ - B_s^-}{h};$$

выражений для деформаций -

$$\varepsilon_{s} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_{s}} + \frac{1}{2}g_{s}^{2}; \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{\cos\varphi}{r}u + \frac{\sin\varphi}{r}w; \qquad (2)$$
$$\chi_{s} = \frac{\partial g_{s}}{\partial s}; \quad \chi_{\theta} = \frac{\cos\varphi}{r}g_{s} - \frac{\sin\varphi}{2r}\frac{1}{r}g_{s}^{2},$$

соотношений упругости -

$$N_{s} = \frac{e_{s}h}{1 - v_{s}v_{\theta}} \left(\varepsilon_{s} + v_{\theta}\varepsilon_{\theta}\right); \quad N_{\theta} = \frac{e_{\theta}h}{1 - v_{s}v_{\theta}} \left(\varepsilon_{\theta} + v_{s}\varepsilon_{s}\right); \tag{3}$$

$$M_{s} = \frac{e_{s}h^{3}}{12(1-v_{s}v_{\theta})} \left(\chi_{s} + v_{\theta}\chi_{\theta}\right); \quad M_{\theta} = \frac{e_{\theta}h^{3}}{12(1-v_{s}v_{\theta})} \left(\chi_{\theta} + v_{s}\chi_{s}\right),$$
$$v_{s} = v_{\theta s}, \quad v_{\theta} = v_{s\theta}, \quad e_{s}v_{\theta} = e_{\theta}v_{s}.$$

87

Компоненты силы Лоренца имеют такой вид:

$$\rho F_s^{\wedge} = h J_{\theta CT} B_{\gamma} + \sigma_1 h \bigg[E_{\theta} B_{\gamma} - \frac{\partial u}{\partial t} B_{\gamma}^2 + 0.5 \frac{\partial w}{\partial t} \Big(B_s^+ + B_s^- \Big) B_{\gamma} \bigg];$$

$$\rho F_{\gamma}^{\wedge} = -0.5 h J_{\theta CT} \Big(B_s^+ + B_s^- \Big) - \sigma_2 h \big[0.5 E_{\theta} \Big(B_s^+ + B_s^- \Big) +$$

$$+ 0.25 \frac{\partial w}{\partial t} \Big(B_s^+ + B_s^- \Big)^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} \Big(B_s^+ - B_s^- \Big)^2 - 0.5 \frac{\partial u}{\partial t} \Big(B_s^+ + B_s^- \Big) B_{\gamma} \bigg].$$

$$(4)$$

В (1) – (4) принято: N_s, N_{θ} – нормальные усилия; Q_s, Q_{θ} – поперечные усилия; M_s, M_{θ} – изгибающие моменты; u, w – компоненты перемещений; $\varepsilon_s, \varepsilon_{\theta},$ $\chi_s, \ \chi_{ heta}$ – компоненты тензора деформаций; ϑ_s – угол поворота нормали; $e_s, \ e_{ heta}$ – модули Юнга; v_s , v_{θ} – коэффициенты Пуассона; E_{θ} – компонента напряженности электрического поля; B_{γ} – нормальная составляющая магнитной индукции; B_s^+ , B_s^- - известные составляющие магнитной индукции на поверхностях оболочки; J_{н CT} составляющая плотности электрического тока от внешнего источника; h = h(s) – толщина оболочки.

Для построения разрешающей системы дифференциальных уравнений гибкой ортотропной усеченной сферической оболочки радиуса R, в качестве разрешающих функций выбираем $u, w, \vartheta_s, N_s, Q_s, M_s, B_{\gamma}, E_{\theta}$.

Исходя из геометрии сферической оболочки, полагаем, что $R_s = R_{\theta} = R$ (R –

радиус оболочки); $r = r \sin \varphi$; $\sin \varphi = s / R$; $\cos \varphi = \cos s / R$.

~

1.

В этом случае разрешающая система нелинейных дифференциальных уравнений магнитоупругости имеет такой вид [3, 12, 13]: (1)

88

$$\frac{\partial M_s}{\partial s} = \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{R} (\nu_{\theta} - 1) M_s + \frac{e_{\theta} h^3 \operatorname{ctg}^2 \varphi}{12R^2} \mathcal{G}_s - \frac{e_{\theta} h^3 \operatorname{ctg}\varphi}{8R^2} \mathcal{G}_s^2 + \mathcal{Q}_s + N_s \mathcal{G}_s - \frac{\nu_{\theta}}{R} M_s \mathcal{G}_s ;$$
$$\frac{\partial B_{\gamma}}{\partial s} = -\sigma_2 \mu \bigg[E_{\theta} + 0.5 \frac{\partial w}{\partial t} \big(B_s^+ + B_s^- \big) - \frac{\partial u}{\partial t} B_{\gamma} \bigg] - \frac{B_s^+ - B_s^-}{h} ;$$
$$\frac{\partial E_{\theta}}{\partial s} = -\frac{\partial B_{\gamma}}{\partial t} - \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{R} E_{\theta} .$$

Краевые условия для электромагнитных параметров задаем через компоненты электрического поля или через комбинацию компонент магнитного и электрического полей. При этом начальные условия задаем в классическом виде.

Приведенная система дифференциальных уравнений магнитоупругости отвечает геометрически нелинейной в квадратичном приближении теории тонких ортотропных сферических оболочек переменной жесткости с учетом ортотропной электропроводности. Составляющие силы Лоренца (4) учитывают скорость деформирования оболочки, внешнее магнитное поле, величину и напряженность тока проводимости относительно внешнего магнитного поля. Учет нелинейности в уравнениях движения вызывает нелинейность в пондеромоторных силах.

2. Методика решения нелинейной задачи.

Методика решения задачи магнитоупругости усеченной ортотропной сферической оболочки переменной толщины в осесимметричной постановке основана на последовательном использовании метода квазилинеаризации и метода дискретной ортогонализации [2, 3].

Для разделения переменных по временной координате применяем неявную схему Ньюмарка интегрирования уравнений магнитоупругости [21].

Следующий этап решения нелинейной краевой задачи магнитоупругости основан на применении метода квазилинеаризации [1], с помощью которого нелинейную краевую задачу сводим к решению последовательности линейных краевых задач на каждом временном шаге. Далее каждую из линейных краевых задач последовательности на соответствующем временном интервале решаем численно с помощью устойчивого метода дискретной ортогонализации.

3. Числовые результаты и их анализ.

Исследуем напряженно-деформированное состояние металлической (бороалюминий) усеченной ортотропной сферической оболочки радиуса R = 0,5м, переменной толщины $h = 5 \cdot 10^{-2} (1 - 0,3 \sin \pi x / l)$ м (l - длина оболочки). Оболочка находится под воздействием нормальной составляющей механической нагрузки $P_{\gamma} = P_0 \sin \omega t$ и круговой составляющей внешнего электрического тока $J_{\theta CT} = J_0 \sin \omega t$.

Контура оболочки закреплены следующим образом:

$$u = w = \vartheta_s = 0$$
; $B_{\gamma} = 0,3 \sin \omega t$ при $s = s_0$;

$$u = w = M_s = 0$$
; $E_{\theta} = 0$ при $s = s_N$.

Параметры оболочки и материала приняты в таком виде:

$$s_0 = 0, 4\text{m}; s_N = 0,78\text{m}; \mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \,\Gamma\text{H} \,/\,\text{m};$$

$$e_s = 22,9 \cdot 10^{10} \,\mathrm{H} \,/\,\mathrm{m}^2$$
; $e_\theta = 10,7 \cdot 10^{10} \,\mathrm{H} \,/\,\mathrm{m}^2$;

89

$$v_s = 0,262; v_\theta = 0,32; \rho = 2600 \text{ kg / m}^3; \omega = 314,16 \text{ c}^{-1};$$

 $\sigma_1 = 0,454 \cdot 10^8 (\text{Om} \cdot \text{m})^{-1}; \sigma_2 = 0,454 \cdot 10^8 (\text{Om} \cdot \text{m})^{-1}; B_s^{\pm} = 0,5 \text{ g}$

Решение задачи получено на интервале времени $t = 1 \cdot 10^{-2} c$, шаг интегрирования по времени $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} c$.

При исследовании напряженного состояния оболочки рассмотрены следующие варианты изменения механической нагрузки и стороннего тока:

1)
$$P_{\gamma} = 1, 3 \cdot 10^2 \sin \omega t$$
; $J_{\theta CT} = 5 \cdot 10^{-3} \sin \omega t$; 2) $P_{\gamma} = -1, 3 \cdot 10^2 \sin \omega t$;
 $J_{\theta CT} = -5 \cdot 10^{-3} \sin \omega t$; 3) $P_{\gamma} = -1, 3 \cdot 10^2 \sin \omega t$; $J_{\theta CT} = 5 \cdot 10^{-3} \sin \omega t$;

На рис. 1 – 3 (для вариантов нагружения 1 – 3) приведено распределение прогиба w(s) при $t = 2 \cdot 10^{-3} c$; $t = 7 \cdot 10^{-3} c$; $t = 9 \cdot 10^{-3} c$, соответственно. Исходя из представленных результатов, можно исследовать влияние комбинированного нагружения на напряженное состояние ортотропной оболочки переменной толщины. Максимальная нелинейность w/h = 4,5 имеет место в точке s = 0,628м для варианта нагружения 3 (рис. 2), т. е. при отрицательном значении механической силы и положительном направлении протекания стороннего тока. Значения прогиба для вариантов нагружения 1 и 2 близки к нулю.



Puc. 1

На рис. 1 максимальная нелинейность w/h = 2,1 имеет место в точке s = 0,628м для варианта нагружения 1.

Для остальных вариантов нагружения значения прогиба близки к нулю.

Из анализа результатов, представленных на рис. 3, следует, что значения прогибов для всех вариантов нагружения близки. Нелинейность, по сравнению с результатами, представленными на рис. 1, увеличивается и достигает w/h=3 для варианта нагружения 2.



На рис. 4 представлено распределение прогиба от времени w(t) при s = 0,628м. Максимальное значение w/h = 4,5 имеет место при $t = 7 \cdot 10^{-3} c$, что согласуется с результатами, приведенными выше.

Для вариантов нагружения оболочки, рассмотренных выше, на рис. 5 показано распределение по верхней поверхности оболочки напряжений Максвелла $T_s(t) H / M^2$ и механических напряжений $\sigma_s(t) H / M^2$, представленных на рис. 6 в точке s = 0,628м.



Из анализа графиков (рис. 5 и 6) следует вывод о подтверждении результатов, приведенных выше.

Также необходимо отметить, что напряжения Максвелла превосходят по величине механические напряжения. Это свидетельствует о существенном влиянии электромагнитного поля на напряженно-деформированное состояние оболочки согласно решению задач в нелинейной постановке.

Заключение.

В работе получено решение нелинейной задачи магнитоупругости для осесимметричной ортотропной усеченной сферической оболочки переменной жесткости с учетом ортотропной электропроводности.

Представлена разрешающая система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая напряженно-деформированное состояние гибкой ортотропной сферической оболочки переменной толщины. На основе результатов числового примера проведен анализ напряженного состояния гибкой сферической ортотропной оболочки переменной толщины, находящейся под действием переменной по времени механической силы, переменного по времени магнитного поля и стороннего электрического тока, с учетом механической и электромагнитной ортотропий.

Р Е З Ю М Е. В осесиметричній постановці отримано розв'язок нелінійної задачі магнітопружності для ортотропної сферичної оболонки змінної жорсткості з ортотропною електропровідністю. Приведено розв'язувальну систему нелінійних диференціальних рівнянь, яка описує напружено-деформований стан гнучких ортотропних оболонок змінної жорсткості в механічному та магнітному полях. Наведено числовий приклад. Проведено аналіз напруженого стану ортотропної сферичної оболонки в залежності від зовнішнього струму та механічної сили.

- 1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968. 184 с.
- 2. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основы теории пластин и оболочек. К.: Либидь, 1993. 231с.
- Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основы теории пластин и оболочек с элементами магнитоупругости. Учебник. – К.: ИПЦ «Киевский университет», 2010. – 403с.
- 4. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979. 639с.
- Улитко А.Ф., Мольченко Л.В., КовальчукВ.Ф. Магнитоупругость при динамическом нагружении. Учеб. пособие. – К.: Либідь, 1994. – 154 с.
- 6. Flugge W. Stresses in shells. Berlin: Springer-Verlag, 1973. 525 p.
- Hussain M.A., Pu S.L. Dinamic stress intensity factors for anunbounded plate having collinear cracks // Eng. Fact. Mech. – 1972. – 4, N 4. – P. 865 – 876.
- 8. Lippmann H.G. Principle de la conservation de l'electricite // Ann. Chim. 1976. N 2. P. 17 35.
- Maugin G. A. Nonlinear electromechanical effects and applications. Singapore: World Scientific, 1985. 168 p.
- Mol'chenko L.V., Loos I.I. Effect of Conicity on Axisymmetrical Strain State of Flexible Orthotropic Conical Shell in Non-stationary Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 11. – P. 1261 – 1267.
- Mol'chenko L. V., Loos I. I. Influence of the Boundary Conditions on the Stress State of a Flexible Cylindrical Shell of Variable Stiffness in a Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 1. – P. 94 – 100.
- Mol'chenko L. V., Loos I. I. The Stress State of a Flexible Orthotropic Spherical Shell Subject to External Current and Mechanical Force in a Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 5. – P. 528 – 533.
- Mol'chenko L. V., Loos I. I., Fedorchenko L. M. Axisymmetric Magnetoelastic Deformation of a Flexible Orthotropic Ring with Orthotropic Conductivity // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 3. – P. 322 – 327.
- Mol'chenko L.V., Loos I.I., Indiaminov R.Sh. Nonlinear Deformation of Conical Shells in Magnetic Fields // Int. Appl. Mech. – 1997. – 33, N 3. – P. 221 – 226.
- Mol'chenko L.V., Loos I.I., Indiaminov R.Sh. Determining the Stress State of Flexible Orthotropic Shell of Revolution in Magnetic Field // Int. Appl. Mech. –2008. – 44, N 8. – P. 882 – 891.
- Mol'chenko L. V., Loos I. I. Indiaminov R. Sh. Stress-Strain State of Flexible Ring Plates of Variable Stiffness in a Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 11. – P. 1236 – 1242.
- Mol'chenko L. V., Loos I. I., Plyas I.V. Stress Analysis of a Flexible Ring Plate with Circumferentially Varying Stiffness in a Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 5. – P. 567 – 573.
- Mol'chenko L. V., Loos I. I., Plyas I.V. Effect of the Tangential Components of Magnetic-Flux Density on the Stress State of a Flexible Circular Cylinder with Variable Stiffness // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N 3. – P. 313 – 319.

- 19. Moon F. C. Magneto-solid mechanics. N.-Y.: John Wiley & Sons Inc., 1984. 448 p.
- Moon F. C., Chattopadhyay S. Magnetically induced stress waves in a conducting solid-theory and experiment // J. Appl.Mech. Trans. ASME. 1974. 41, N 3. P. 641 646.
- Newmark N.M. A Method of Computation for Structural Dynamics // J. Eng. Mech. Div., ASCE. 1959.
 85, N 7. P. 67 97.
- 22. Nye J. F. Physical properties of crystals. Oxford: Clarendon Press, 1964. 329 p.
- Pao Y.-H., Hutter K. Electrodynamis for moving elastic solids and viscous fluids // Proc. IEEE. 1975. –
 63, N 7. P. 1011 1021.
- Smith R. T. Stress-induced anisotropy in solids the acousto-elastic effect // Ultrasonics. 1963. 1, N 3. – P. 135 – 147.
- Truesdeil C., Noll W. The nonlinear field theorie of mechanics / in S. Flugges Handbuch der Physic. 1960. – III/3. – Berlin:Springer-Verlag. – P. 1 – 602.

Поступила 03.06.2014

Утверждена в печать 22.12.2015