

А. Н. Гузь, В. А. Декрет

МОДЕЛЬ ВОЛОКОН КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ В ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ  
УСТОЙЧИВОСТИ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ (ОБЗОР)

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. П.Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: guz@carrier.kiev.ua*

**Abstract.** This article is devoted to review and analysis of results obtained in the framework of the three-dimensional linearized theory of deformed bodies stability (TLTDBS) and the new model (the so-called «finite size fibers» model) as applied to the theory of stability of fibrous and laminated composite materials, in comparison with the previous results that were obtained in the framework of the well-known model (the so-called «infinitely long fibers» model). The article consists of two parts.

The first part includes a short historical sketch of experimental and theoretical investigations as applied to the following two problems: 1. The first problem – the stability loss in an inner structure of composites. 2. The second problem – the next failure or fracture of composites when the above mentioned stability loss is an initial stage (start) of failure or fracture. An applicability of the «infinitely long fibers» and «finite size fibers» models as applied to the stability loss of different composites is proved basing on analysis of experimental results of various authors. A specific character of failure or fracture of composites caused by stability loss in the inner structure is presented taking into account the experimental investigations of various authors. A short review of theoretical investigations as applied to the theory of stability of fibrous and laminated composites is presented in the framework of the following two approaches: 1. The first approach is based on application of the two-dimensional and uni-dimensional approximate theories of stability of thin-walled plates and rods (beams). 2. The second approach is based on application of the three-dimensional linearized theory of deformed bodies stability (TLTDBS). The results of above mentioned review of theoretical investigations are presented for the «infinitely long fibers» model.

The second part is devoted to the short representation and review of results of the theoretical investigations obtained in the framework of the TLTDBS and the «finite size fibers» model as applied to the theory of stability of fibrous and laminated composites. These results are obtained as applied to the plane problem, where the «finite size fibers» model allows to take into account the finite size of reinforcing elements (fillers) under the plane strain conditions. The strict mathematical formulation of this problem is presented in the framework of TLTDBS and the piecewise-homogeneous medium model. The method of constructing of the discrete problems is considered using the method of finite differences and the software technology automate construction of discrete models. The results of solution are presented for the problems of composites stability in the cases of one and two short fibers, the periodic series of short fibers and the short fibers near a free boundary surface. An influence of the mechanical and geometrical parameters of composite components on critical strain and buckling of reinforcing elements (fillers) in composite structure is considered. It must be underlined that the above mentioned results for the «finite size fibers» model are obtained in the framework of plane problem with allowance for the perspective consideration of corresponding spatial problem what is highly topical.

**Key words:** composite material, stability loss, inner structure, compression, «infinitely long fibers» model, «finite size fibers» model, failure or fracture, approximate theories of stability of thin-walled plates and rods, three-dimensional linearized theory of deformed bodies stability, fibrous and laminated composites, critical strain, finite differences method, basic scheme, software technology, discrete models, one and two short fibers, periodic series of short fibers, short fibers near surface.

### **Введение.**

В настоящее время в научной литературе по механике композитных материалов и по механике разрушения общепринято, что *впервые явление* микровыпучивания волокон как форма разрушения однонаправленного композитного материала при сжатии описано в работе [39], опубликованной в 1960 г. Таким образом, потеря устойчивости во внутренней структуре композита при сжатии является начальным этапом (стартом) разрушения композита. В последующие годы явление потери устойчивости во внутренней структуре слоистых и волокнистых композитов при сжатии вдоль армирующих элементов (наполнителя) рассмотрено в многочисленных исследованиях и результаты представлены в многочисленных публикациях.

Для теоретических исследований был предложен ряд моделей (расчетных схем) различного уровня строгости и последовательности, которые построены в рамках общей модели «бесконечно длинных волокон». В модели «бесконечно длинных волокон» рассматривается периодическая (вдоль оси армирующих элементов) форма потери устойчивости, что позволяет проводить исследования для материалов бесконечных размеров (матрицы), в которой расположены бесконечно длинные армирующие элементы (волокна), и таким образом не учитывать влияние граничных условий на торцах армирующих элементов (волокон). Эта модель получила экспериментальное обоснование (подтверждение) для ряда конкретных композитных материалов и, естественно, она применима для сравнительно длинных армирующих элементов (наполнителя). Более подробное обсуждение модели «бесконечно длинных волокон» представлено в разделе 1 настоящей статьи; необходимо отметить, что эта модель практически исключительно применялась во всех исследованиях по анализу потери устойчивости во внутренней структуре композитов, начиная с публикации [41] за 1965 г.

Для сравнительно более коротких (вдоль оси армирующих элементов) армирующих элементов (волокон), когда на формы потери устойчивости оказывают влияние граничные условия на торцах армирующих элементов (волокон), модель «бесконечно длинных волокон» уже неприменима. В этом случае уже необходимо применить модель «волокон конечных размеров» (вдоль оси армирующих элементов) и рассматривать при этом конкретные граничные условия сопряжения с матрицей на торцах армирующих элементов (волокон). При этом в модели «волокон конечных размеров», естественно, уже не предполагается периодическая (вдоль оси армирующих элементов) форма потери устойчивости и определяется она (форма потери устойчивости) из решения соответствующей строго сформулированной задачи с учетом граничных условий на торцах армирующих элементов (волокон). Модель «волокон конечных размеров» в вышеизложенной трактовке применительно к плоской задаче предложена в публикациях [9, 52] за 2000 г.; такой подход в последующие годы применялся к исследованию потери устойчивости во внутренней структуре композита применительно к одному, двум и периодическому ряду волокон, а также к волокнам вблизи границы материала. Достаточно подробное изложение результатов, полученных с привлечением модели «волокон конечных размеров», представлено в разделе 2 настоящей статьи.

Дополнительно целесообразно отметить некоторые вопросы терминологического характера. Так, в настоящей статье применяются названия модель «бесконечно длинных волокон» и модель «волокон конечных размеров». Исследования предназначены в то же время для волокнистых однонаправленных и слоистых композитных материалов. Таким образом, применительно к слоистым материалам (относительно размеров слоев в направлении нагружения) целесообразно было бы применять названия модель «бесконечно длинных слоев» и модель «слоев конечных размеров». Следовательно, в общем виде для волокнистых однонаправленных и слоистых композитов оправданно было бы применять названия для рассматриваемых моделей следующим образом: модель «бесконечно длинных армирующих элементов» и модель «армирующих элементов конечных размеров». Все же по представлению авторов статьи терминология – модель «бесконечно длинных волокон» и модель «волокон конечных размеров» является более информативной для специалистов по композитам; в связи с этим в настоящей статье вышеуказанная терминология будет применяться для однонаправленных волокнистых и слоистых композитов.

Также отметим, что в настоящей статье (наряду с вопросами о потере устойчивости во внутренней структуре волокнистых однонаправленных и слоистых композитов) также обсуждаются вопросы механики разрушения вышеуказанных композитов при сжатии. В связи с этим отметим некоторые особенности терминологии, которые используются в механике разрушения применительно к исследованию явлений разрушения материалов и элементов конструкций. Так, под «fracture» обычно понимается разрушение, которое определяется распространением одной или нескольких трещин; при этом «fracture mechanics» занимается исследованием разрушения материалов и элементов конструкций, которое также определяется распространением одной или нескольких трещин. Под «failure» понимается разрушение, которое определяется исчерпанием несущей способности материала или элемента конструкции и, в основном, проявляется не только распространением одиночных трещин или системы трещин, но и других механизмов; при этом «failure mechanics» занимается исследованием вышеотмеченной ситуации. Под «damage» понимается разрушением, которое проявляется в накоплении повреждений в виде диффузно расположенных развивающихся или зарождающихся трещин или других повреждений; при этом «damage mechanics» занимается исследованием закономерностей (кинетики) накопления повреждений, в основном, в рамках континуальных представлений с привлечением определенным образом выбранного «damage indicator». Безусловно, вышеизложенная классификация является достаточно условной и в то же время достаточно полезной и информативной при анализе различных результатов в механике разрушения в широком смысле этого термина.

Информацию о характерных механизмах разрушения во внутренней структуре композитного материала при различных нагрузках можно получить из [8, т. 1, с. 46, рис. 0.1]; при этом в списке литературы к [8] указаны соответствующие публикации. Характерные механизмы разрушения во внутренней структуре однонаправленных композитных материалов также при различных нагрузках схематически показаны на [8, т. 1, с. 47, рис. 0.2].

В случае сжатия композитных материалов вдоль армирующих элементов (вдоль волокон) информацию о характерных механизмах разрушения можно получить из сведений, представленных на снимках в монографии [8]; эти же снимки, наряду с другими снимками, представлены в разделе 1 настоящей статьи. Из вышеотмеченной информации следует, что в рассматриваемом случае сжатия композитов разрушение локализуется в достаточно узких зонах, которые можно моделировать трещинами; причем в этих зонах происходит смятие и разрушение волокон. Таким образом, в рассматриваемой ситуации происходит как бы взаимодействие нескольких механизмов разрушения. Учитывая вышеизложенную терминологию, относящуюся к различным видам разрушения, и сведения, относящиеся к разрушению при сжатии композитов вдоль армирующих элементов (волокон), обоснованно можно считать, что в рассматриваемом случае имеет место явление «failure» и, следовательно, исследования проводятся в рамках «failure mechanics». Следует отметить, что для полноты информации в обсуждаемом случае можно также применять названия «failure or fracture» и «failure or fracture mechanics».

Вышеизложенными сведениями, имеющими вводный характер, ограничимся во Введении. Таким образом, настоящая статья состоит из введения, раздела 1 и раздела 2.

В первом разделе приведен анализ характерных экспериментальных исследований, относящихся к потере устойчивости во внутренней структуре композита при сжатии вдоль армирующих элементов (волокон) и к последующему разрушению материала, в котором потеря устойчивости в структуре композита является начальным этапом (стартом) разрушения. Также, в первом разделе приведены краткий анализ подходов, постановка задач, моделей и расчетных схем, методов решения задач и конкретных результатов; при этом отмеченный анализ построен на полученных результатах в рамках модели «бесконечно длинных волокон».

Во втором разделе представлены в краткой форме основные результаты теоретических исследований по теории устойчивости во внутренней структуре композитных материалов при сжатии вдоль армирующих элементов, полученных в рамках модели «волокон конечных размеров». Указанные результаты получены в рамках плоской задачи с привлечением основных соотношений трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ).

## 1. Анализ экспериментальных и теоретических результатов.

Рассматривается анализ экспериментальных результатов по устойчивости во внутренней структуре композита при сжатии и по дальнейшему разрушению. Рассматривается также анализ теоретических результатов, полученных в рамках модели «бесконечно длинных волокон».

**1.1. Анализ экспериментальных результатов.** Отдельно рассмотрим анализ экспериментальных исследований, свидетельствующих о существовании явлений потери устойчивости во внутренней структуре композитов при сжатии, а также результатов по экспериментальному исследованию характера разрушения композитов при сжатии.

**1.1.1. Экспериментальные результаты по потере устойчивости во внутренней структуре композитов при сжатии.** Прежде всего, необходимо отметить, что анализируемое явление (потеря устойчивости во внутренней структуре) не наблюдается для однородных материалов; оно характерно только для композитных материалов (как для структурно-неоднородных материалов, в которых наличие внутренней структуры учитывается на различных уровнях при их анализе). При этом целесообразно отметить, что структурная однородность или неоднородность конкретного материала в значительной мере определяется уровнем рассмотрения (исследования) процессов, который, в основном, определяется показателями изменчивости полей механических величин (напряжения, деформации, ...) по пространственным переменным.

При анализе экспериментальных результатов по потере устойчивости во внутренней структуре композитных материалов необходимо учитывать следующую ситуацию. При сжатии вдоль армирующих элементов (волокон, наполнителя) композитных материалов в случае экспериментальных исследований наблюдать (фиксировать) потерю устойчивости во внутренней структуре «в чистом виде» весьма затруднительно, так как с самого начала процесса потери устойчивости возникает незначительное или значительное разрушение. В связи с этим для доказательства возможности существования явления потери устойчивости во внутренней структуре композитного материала при сжатии обычно приводят результаты специально поставленных экспериментов, которые заключаются в следующем.

Волокна (наполнитель композита) помещают в эпоксидную (или иную) смолу и производят полимеризацию при определенной температуре; после этого осуществляют процессы охлаждения до определенной температуры и отверждения. Практически во всех случаях рассматриваемых экспериментальных исследований нагружение сжатием осуществляется за счет усадки (shrinkage) матрицы (смолы, связующего) при ее отверждении или остывании блока композитного материала. В этом случае за счет разности коэффициентов теплового расширения волокон и матрицы, соединенных между собой, на волокна действуют сжимающие нагрузки.

Вышеуказанные экспериментальные исследования проводились в различных научных центрах в различное время. Результаты таких экспериментальных исследований представлены в соответствующих публикациях.

По-видимому, впервые обсуждаемые результаты экспериментальных исследований представлены на русском языке в публикации [26] за 1967 г., которая является переводом публикации [67] за 1965 г. на английском языке; в связи с этим ниже приведем некоторые результаты, соответствующие [26, 67]. Так, на рис. 1.1 приведена фотоупругая картина для трех отдельных волокон из Е-стекла (диаметром 0,13; 0,09 и 0,013 мм) в матрице из эпоксидной смолы, заполимеризованной при температуре 120°C. Периодическая (с большим числом периодов) фотоупругая картина на рис. 1.1 для всех трех волокон свидетельствует о синусоидальной (вдоль направления волокон) форме потери устойчивости. Заметим, что рис. 1.1 соответствует [26, фиг. 3.20]; эти результаты, как уже отмечалось, получены методом фотоупругости.

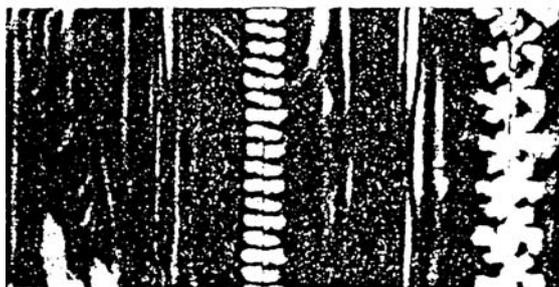


Рис. 1.1

В последующие годы родственные результаты экспериментальных исследований были получены во многих научных центрах, в том числе и при других методах отверждения смолы (связующего).

Ниже в качестве примера приведены результаты экспериментальных исследований при термохимическом отверждении смолы (связующего), при этом до термохимического отверждения смолы

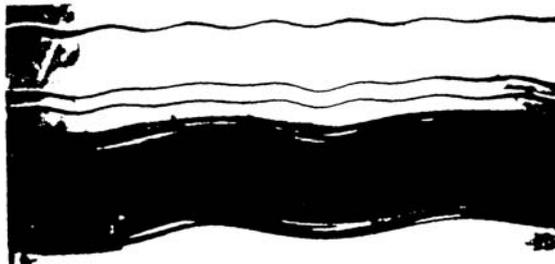


Рис. 1.2

волокна стекла и их пряди свободно плавали в связующем. Результаты указанных экспериментальных исследований опубликованы в статье [41] за 1982 г.; при исследованиях применялись волокна стекла диаметром 0,01 мм. На рис. 1.2, соответствующем публикации [41], представлены результаты (при увеличении в 50 раз) для отдельных волокон и пряди волокон после отверждения смолы (связующего) термохимическим методом. Из рис. 1.2 видно, что вся прядь волокон и отдельные волокна после отверждения смолы (связующего) приобретают явно выраженную периодическую синусоидальную (вдоль направления волокон) форму потери устойчивости.

Следует отметить, что результаты, представленные на рис. 1.1 и 1.2, относятся к потере устойчивости во внутренней структуре композитных материалов, в которых армирующими элементами являются волокна стекла диаметром 0,13; 0,09; 0,013 и 0,01 мм; вышеуказанные результаты экспериментальных исследований опубликованы во второй половине XX века. Родственные экспериментальные исследования проводятся и в настоящее время (в начале XXI века) применительно к случаям, когда армирующими элементами (наполнителем) являются волокна из других материалов; при этом во всех случаях сжатие реализуется за счет усадки (shrinkage) смолы (связующего) при ее отверждении или остывании.

Примером результатов экспериментальных исследований, опубликованных в начале настоящего XXI века, является статья [60], которая опубликована в 2004 г.; результаты этой статьи, которые получены по вышеуказанной методике, относятся к исследованию устойчивости углеродного волокна в полимерной матрице (эпоксидная смола). На рис. 1.3, соответствующем статье [60], представлена периодическая синусоидальная форма потери устойчивости с большим количеством периодов. Форма потери устойчивости, представленная на рис. 1.3, получена при остывании полимерной матрицы и зафиксирована согласно [60] на 68-ой секунде после начала процесса остывания; при этом в левом нижнем углу на рис. 1.3 указан масштаб изображения в микронах.

Наряду с результатами, представленными на рис. 1.1 – 1.3 и относящимися к волокнам стекла и углеродным волокнам, в настоящее время опубликован ряд статей с результатами экспериментальных исследований по рассматриваемому явлению применительно к различным композитным материалам.

Таким образом, вышеприведенные и родственные результаты экспериментальных исследований, относящиеся к достаточно длинным армирующим элементам (волокнам, наполнителю) в матрице (связующем), подтверждают существование явления потери устойчивости во внутренней структуре композитного материала. Обнаруженные при экспериментальных исследованиях формы потери устойчивости (рис. 1.1 – 1.3) являются периодическими (вдоль армирующих элементов, вдоль волокон) синусоидальными формами потери устойчивости во внутренней структуре композита с большим числом периодов; в связи с вышеуказанным граничные условия на торцах армирующих элементов (волокон) не могут оказывать существенного влияния

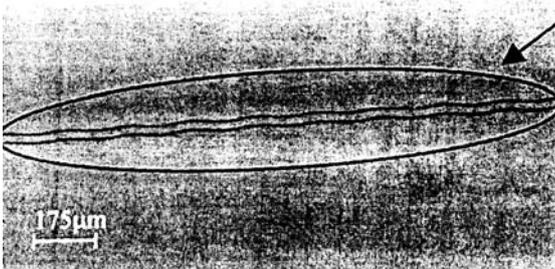


Рис. 1.3

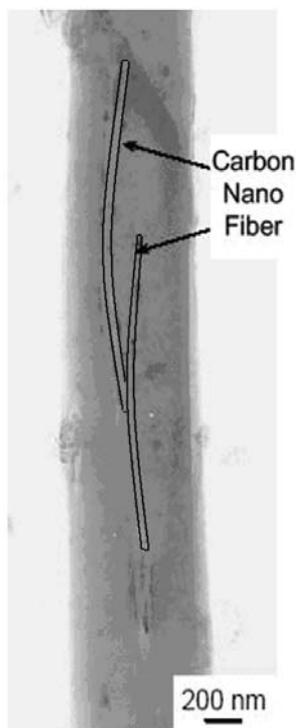


Рис. 1.4

на формы потери устойчивости и на величины критических нагрузок и укорочений. *Вышеизложенные сведения фактически являются экспериментальным обоснованием модели «бесконечно длинных волокон».*

Как уже неоднократно отмечалось выше, модель «бесконечно длинных волокон», очевидно, применима к сравнительно длинным волокнам (армирующим элементам). *A priori* можно ожидать, что в случае сравнительно коротких армирующих элементов (волокон) формы потери устойчивости во внутренней структуре композита могут существенно отличаться от форм потери устойчивости, представленных на рис. 1.1 – 1.3 и соответствующих модели «бесконечно длинных волокон». В качестве примера рассмотрим результаты экспериментальных исследований, опубликованных в статье [69] в 2004 г. и относящихся к устойчивости достаточно коротких углеродных нановолокон в полимерной матрице. На рис. 1.4, соответствующем публикации [69], показаны формы потери устойчивости двух коротких углеродных нановолокон; причем в левом нижнем углу рис. 1.4 указан масштаб изображения в нанометрах. Формы потери устойчивости на рис. 1.4 не имеют ничего общего с формами потери устойчивости, которые представлены на рис. 1.1 – 1.3. Так на рис. 1.1 – 1.3 формы потери устойчивости являются периодическими синусоидальными (вдоль волокон) формами с достаточно большим числом периодов; на рис. 1.4 формы потери устойчивости коротких нановолокон приближенно могут быть аппроксимированы синусоидальными формами с одним полупериодом, в этом

случае величины критических значений нагрузок и укорочений существенно зависят от граничных условий на торцах армирующих элементов (волокон).

*Таким образом, можно считать, что вышеприведенные сведения, относящиеся к рис. 1.4, являются экспериментальным обоснованием модели «волокон конечных размеров».*

Учитывая вышеизложенные сведения и соображения, относящиеся к рис. 1.1 – 1.4, можно считать, что модель «бесконечно длинных волокон» и модель «волокон конечных размеров» имеют экспериментальное обоснование, но они применимы к различного типа композитам. Так, модель «бесконечно длинных волокон» применима к композитам со сравнительно длинными армирующими элементами (волокнами); модель же «волокон конечных размеров» применима к композитам с достаточно короткими армирующими элементами (волокнами); заметим, что отмеченные соображения, следующие из экспериментальных результатов на рис. 1.1 – 1.4, относятся лишь к исследованию явления потери устойчивости во внутренней структуре композита.

В заключительной части настоящего пункта сформулируем некоторые соображения в виде следующих двух примечаний.

**Примечание 1.1.** Экспериментальные исследования, результаты которых представлены на снимках рис. 1.1 – 1.4, являются специально поставленными, можно сказать «модельного характера», которые позволили доказать возможность существования явления потери устойчивости во внутренней структуре композитных материалов. При внимательном анализе снимков на рис. 1.1 – 1.4 получаем, что представленная на них потеря устойчивости во внутренней структуре композитов *зафиксирована «в чистом виде» – без признаков явления разрушения*, так как на указанных снимках *визуально не фиксируется отделение матрицы (связующего) от волокон (наполнителя)*. Указанная ситуация представляется достаточно существенной, так как соответствующее внимание целесообразно уделить при анализе результатов экспериментальных исследований по разрушению композитных материалов при сжатии, который проводится в следующем пункте.

**Примечание 1.2.** Можно считать, что в настоящей обзорной статье рассматриваются различные процессы в композитных материалах при сжатии, в основном, вдоль армирующих элементов (волокон) – вдоль направления преимущественного армирования применительно, в основном, к однонаправленным композитным материалам. Вышеуказанные композитные материалы в континуальном приближении моделируются ортотропными однородными материалами; к последним материалам также относятся композитные материалы с армированием во взаимноперпендикулярных направлениях. Таким образом, применительно к модели ортотропных материалов рассматривается сжатие вдоль направлений осей симметрии свойств материала. Родственная ситуация также имеет место и при других видах нагружения; например, в сжатых зонах при изгибе различных элементов конструкций и в других случаях. При сжатии различных элементов конструкций (стержни, пластины и оболочки) вдоль направлений симметрии (геометрической формы и свойств материала) основным механизмом исчерпания несущей способности элементов конструкций является потеря устойчивости.

Учитывая вышеизложенные сведения, применительно к сжатию композитных материалов вдоль армирующих элементов (волокон) или, в более общем случае, вдоль направления преимущественного армирования *a priori* можно ожидать, что начало (старт) разрушения композитных материалов (как и исчерпание несущей способности элементов конструкций при аналогичном нагружении) определяется потерей устойчивости во внутренней структуре. Вышеотмеченную ситуацию можно рассматривать как **основную концепцию**, которую целесообразно принимать во внимание при анализе экспериментальных исследований применительно к разрушению композитных материалов при сжатии вдоль осей симметрии свойств материалов, которому посвящен следующий пункт.

**1.1.2. Экспериментальные результаты по разрушению композитов при сжатии.** Прежде всего, необходимо отметить, что в настоящем пункте рассматривается анализ экспериментальных исследований по разрушению композитных материалов *при сжатии*, когда уже произошло разрушение композита; таким образом, по существу, анализируются снимки уже разрушенного материала, начальный этап (старт) разрушения, естественно, не фиксируется в таких экспериментах. Следовательно, в настоящее время отсутствуют экспериментальные исследования разрушения композитов при сжатии, в которых фиксируется процесс разрушения, начиная с начального этапа (старта) разрушения, соответствующего потере устойчивости во внутренней структуре композита, и заканчивая заключительным этапом разрушения, соответствующего разделению рассматриваемого блока материала на отдельные части. Целесообразно отметить, что экспериментальные исследования разрушения вышеуказанного типа отсутствуют и применительно к большинству процессов разрушения для других материалов при других нагрузках.

Таким образом, в настоящем пункте рассматривается анализ характера разрушения композитных материалов *при сжатии*, ориентируясь на снимки (при различном увеличении), по существу, уже разрушенного композитного материала. Экспериментальные исследования относятся к сжатию композитных материалов вдоль осей симметрии свойств материала (вдоль армирующих элементов – вдоль волокон в случае однонаправленных композитов; вдоль направления преимущественного армирования в случае композита с армированием во взаимно-перпендикулярных направлениях; в перпендикулярном направлении к плоскости преимущественного армирования в случае композитов с армированием во взаимно-перпендикулярных направлениях). При анализе вышеотмеченных экспериментальных исследований рассматривается влияние специфических особенностей характера разрушения при изучаемом виде нагружения.

Прежде всего, необходимо отметить, что специфические особенности характера разрушения фиксируются не только при сжатии вдоль направления преимущественного армирования, но и при сжатии в перпендикулярном направлении. С целью иллюстрации вышеуказанной ситуации приведем результаты статьи [1], опубликованной в 1968 г.; так, на рис. 1.5 приведен снимок разрушенного образца, соответствующий статье [1], который представлен в книге [21, с. 110]. В [1] рассматривалось одноосное сжатие стеклотекстолита перпендикулярно к армирующим элементам (перпендикулярно к плоскости армирования). Из снимка на рис. 1.5 видно, что разрушение

произошло по плоскостям, перпендикулярным к направлению действия нагрузки, и материал разделился на части. Разрушение рассматриваемых композитов по плоскостям, почти перпендикулярным действию одноосной сжимающей нагрузки, является характерной особенностью *рассматриваемого вида разрушения*.

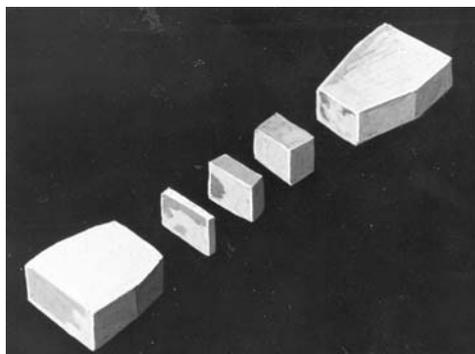


Рис. 1.5

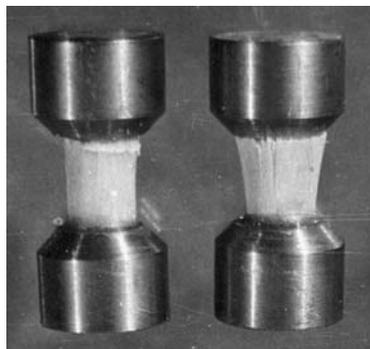


Рис. 1.6

В работе [57], опубликованной в 1969 г., представлены результаты по исследованию характера разрушения образцов из однонаправленного стеклопластика при сжатии вдоль армирующих элементов (волокон); эти результаты получены в Институте механики АН УССР (ныне – Институте механики им. С.П.Тимошенко НАНУ). Цилиндрические образцы диаметром 10 и высотой 45 мм и призматические образцы размером 15x15x70 мм (рис. 1.6) вырезались из стеклопластиковых пластин, изготовленных методом намотки на металлическую оправку с последующим отверждением под прессом при удельном давлении 1МПа. В качестве армирующих элементов (наполнителя) использовалась безщелочная стеклонить марки НС55/6 с замасливателем – парафиновой эмульсией, в качестве матрицы (связующего) использовалось эпоксиднофенольное связующее ЭФБ-4. Содержание связующего в стеклопластике по весу составляло 26,6% со степенью полимеризации 89,9%. Более подробно сведения по технологии изготовления образцов и по испытаниям образцов приведены в статье [57] и в монографии [8, т. 1, с. 189 – 191].

Необходимо только отметить следующую ситуацию. Чтобы избежать смятия торцов образца при сжатии на его концы надевались металлические обоймы, которые заливались эпоксидной смолой холодного отверждения; в результате длина открытой части образца составляла 1,5 – 2 линейного размера поперечного сечения. На снимке (рис. 1.8) показан характер разрушения образца квадратного поперечного сечения и на снимке (рис. 1.7) показан характер разрушения образца кругового поперечного сечения; после разрушения образцы легко разделялись на две представленные на снимках части. Отметим, что разрушение, как правило, происходило возле металлической обоймы; отмеченная ситуация свидетельствует, вероятно, о возникновении в указанных местах первоначального локального разрушения, вызванного срезом крайних волокон.



Рис. 1.7

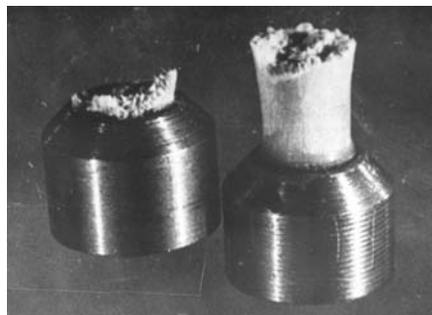


Рис. 1.8

Все же разрушение при сжатии образцов (рис. 1.6) из однонаправленного стеклопластика при сжатии вдоль армирующих элементов (волокон) распространяется по плоскостям, почти перпендикулярным к волокнам и к направлению сжимающей нагрузки.

Таким образом, как при сжатии однонаправленного стеклопластика вдоль волокон, так и при сжатии стеклотекстолита в перпендикулярном направлении к плоскостям армирования разрушение рассматриваемых образцов распространялось по плоскостям, почти перпендикулярным направлению действия одноосной сжимающей нагрузки. Вышеуказанная ситуация является характерной особенностью рассматриваемого вида разрушения; отметим, что в вышеотмеченных двух случаях (рис. 1.5 – 1.8) сжатие осуществляется вдоль осей симметрии свойств материала. Дополнительные соображения, относящиеся к обсуждаемому процессу разрушения, представлены в монографии [8, т. 1, с. 191].

Целесообразно отметить, что результаты экспериментальных исследований, информация о которых представлена на рис. 1.5 – 1.8, относятся к стеклопластикам с полимерной матрицей. Родственные экспериментальные исследования проводились и для других композитных материалов.

В статье [71], опубликованной в 1985 г., представлены результаты экспериментальных исследований для композитного материала с металлической матрицей, в котором наполнителем (армирующими элементами) являются однонаправленные волокна сапфира и связующим (матрицей) является алюминий. Экспериментальные исследования в [71] проводились при одноосном сжатии вдоль системы однонаправленных волокон сапфира (вдоль системы армирующих элементов). На рис. 1.9, соответствующем [71], представлен снимок (при соответствующем увеличении) разрушений в рассматриваемом металлокомпозите (волокон сапфира + алюминий) при одноосном сжатии вдоль однонаправленных волокон сапфира. Разрушения локализованы в сравнительно узкой зоне; если провести плоскость по средней части разрушенной зоны на рис. 1.9, то эта плоскость будет почти перпендикулярна направлению действия сжимающей нагрузки.

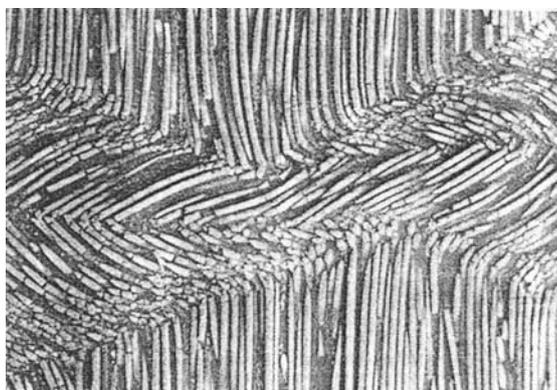


Рис. 1.9

Таким образом, при сжатии однонаправленных композитов вдоль армирующих элементов (вдоль волокон) как в случае стеклопластиков с полимерной матрицей (рис. 1.6 – 1.8), так и в случае металлокомпозитов (рис. 1.9) имеет место характерная особенность рассматриваемого вида разрушения – разрушение происходит или распространяется почти перпендикулярно к направлению действия сжимающей нагрузки. Все же рассматриваемый вид разрушения, очевидно, не должен возникать мгновенно во всей толще материала, хотя и его началом (стартом) является потеря устойчивости во внутренней структуре композита. Вполне естественно, что рассматриваемый вид разрушения может возникать возле какой-либо микрон неоднородности (нарушений, в том числе и сплошности) во внутренней структуре; дальнейшее же распространение разрушения соответствует вышеизложенной характерной особенности. В связи с этим представляется интересным исследование закономерностей распространения разрушений возле макрон неоднородности в композите при

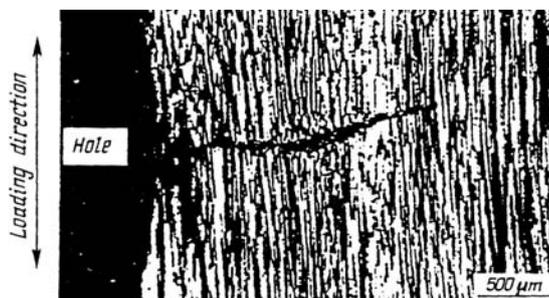


Рис. 1.10

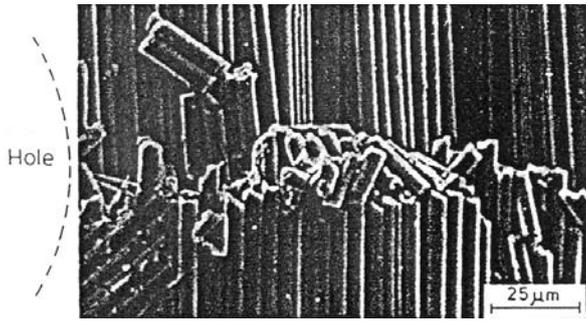


Рис. 1.11

сжатии вдоль армирующих элементов (волокон); ниже рассмотрим такого типа экспериментальные исследования.

В статье [72], опубликованной в 1991 г., представлены результаты экспериментальных исследований по распространению разрушений от кругового отверстия в пластине из композитного материала при сжатии в направлении армирования, результаты исследований показаны на снимках рис. 1.10 – 1.13, соответствующих [72].

На рис. 1.12 представлена расчетная схема с указанием направления осей координат; в соответствии с обозначениями на рис. 1.12 сжатие осуществлялось вдоль вертикальной оси (вдоль оси  $0y$ ). Пластины были изготовлены из слоистого композита, каждый из

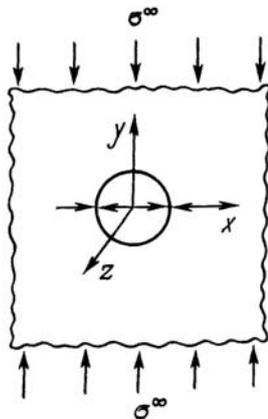


Рис. 1.12

слоев которого представлял собой однонаправленный волокнистый материал (наполнитель – углеродные волокна, матрица – эпоксидная смола). Слои по толщине (вдоль оси  $0z$  на рис. 1.12) укладывались таким образом, что оси  $0x$  и  $0y$  (рис. 1.12) являлись осями симметрии свойств композитного слоистого материала (осуществлялась продольно-поперечная укладка слоев вдоль осей  $0x$  и  $0y$ ).

Следовательно, в континуальном приближении рассматриваемый материал можно считать ортотропным, где оси  $0x$ ,  $0y$  и  $0z$  (рис. 1.12) являются осями симметрии свойств материала; при этом сжатие осуществлялось вдоль оси  $0y$  (вдоль оси симметрии свойств материала). При продольно-поперечной укладке в большинстве слоев однонаправленные волокна были ориентированы вдоль оси  $0y$  (рис. 1.12); в связи с этим полученные слоистые пластины можно считать пластинами с преимущественным армированием вдоль оси  $0y$ , вдоль которой и осуществлялось сжатие.

При рассматриваемых экспериментальных исследованиях разрушение начиналось с двух точек на контуре отверстия, которые указаны значками «x» на рис. 1.12, т.е. с точек с максимальным коэффициентом концентрации сжимающих макронапряжений

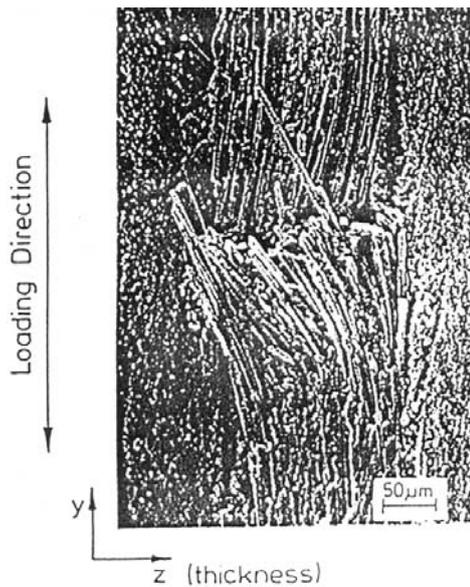


Рис. 1.13

(напряжений в рамках континуальной модели ортотропного материала). Дальнейшее развитие разрушения осуществлялось в виде формирования двух практически прямолинейных трещин, которые выходят с контура отверстия из точек со значками «x» (рис. 1.12) и которые распространяются почти перпендикулярно к направлению действия сжимающей нагрузки; указанные трещины при этом заполнены разрушенным материалом. Информация о характере распространения трещин (разрушения) представлена на микрофотографиях на рис. 1.10, 1.11 и 1.13, полученных на электронном микроскопе и соответствующих [72]; при этом на каждом снимке (рис. 1.10, 1.11 и 1.13) в правом нижнем углу указан масштаб изображения (в микронах). Снимки на рис. 1.10, 1.11 и 1.13 относятся к разрушению, распространяющемуся от правой точки со значком «x» на рис. 1.12. Так, на снимке рис. 1.10 показана трещина, распространяющаяся от

контура отверстия в направлении, которое почти перпендикулярно действию сжимающей нагрузки. На снимке рис. 1.11 при значительно большем увеличении (почти в 20 раз) показана разрушенная часть материала внутри распространяющейся узкой полосы, которую можно моделировать заполненной трещиной. Результаты на снимках (рис. 1.10 и 1.11) соответствуют значениям сжимающей нагрузки порядка 95% от значений общей разрушающей нагрузки для всей пластины с отверстием. На снимке рис. 1.13 представлена по толщине пластины (вдоль оси  $Oz$  на рис. 1.12) структура разрушенной части материала по краю отверстия; на этом снимке четко видны следующие виды разрушения: разрушение (излом) волокон, изгиб разрушенных волокон в сторону отверстия и расслоение слоистого материала. Результаты на рис. 1.13 соответствуют значениям сжимающей нагрузки порядка 80 – 85% от значений общей разрушающей нагрузки для всей пластины с отверстием.

Целесообразно отметить, что многие авторы при анализе разрушений во внутренней структуре композитов (типа разрушений на снимках рис. 1.6 – 1.12 и 1.13) отмечают только *microbuckling* (микровыпучивание при локальной потере устойчивости) и *delamination* (расслоение слоистого композита). В действительности, как это видно на снимке рис. 1.11 например, проявляется значительно больше механизмов разрушения в микроструктуре композитного материала при сжатии; дополнительно можно отметить следующие механизмы разрушения: разрушение (излом) волокна в пределах трещины; изгиб разрушенного волокна; разрушение волокна за пределами трещины; отделение (отслоение) волокна от матрицы; разрушение матрицы и т.п. Все же вышеотмеченные и подобные механизмы разрушения в микроструктуре композита при сжатии вдоль осей симметрии свойств проявляются лишь на последующих этапах разрушения; *первоначальный же этап разрушения (старт) возникает, по-видимому, в указанной ситуации только за счет потери устойчивости во внутренней структуре композита.*

Вышеуказанный старт разрушения, естественно, может возникать как возле локальных неоднородностей во внутренней структуре композита (при срезе, например, крайних волокон металлической обоймой на рис. 1.6 – 1.8), так и возле макронеоднородностей (возле отверстия, например, на рис. 1.10 – 1.13). *Все же возникшее локальное разрушение во всех снимках на рис. 1.5 – 1.13 потом распространяется по плоскостям и поверхностям, которые почти перпендикулярны к направлению сжимающей нагрузки; как уже неоднократно отмечалось, вышеуказанная ситуация является характерной особенностью рассматриваемого вида разрушения.*

Результаты экспериментальных исследований, представленные на снимках рис. 1.5 – 1.13, и им родственные были опубликованы во второй половине XX века в 1968 – 1991 гг.; подобного рода экспериментальные исследования продолжаются и в настоящем XXI веке, в качестве примера ниже рассмотрим экспериментальные результаты статьи [74] за 2004 г. В [74] приведены результаты экспериментальных исследований для случая сжатия вдоль слоев слоистого композитного материала, состоящего из 628 слоев; наличие столь большого числа слоев дает возможность ожидать, что полученные экспериментальные результаты как бы относятся к материалу, состоящему из «бесконечного» числа слоев. В связи с этим условно можно считать, что результаты [74] как бы относятся к явлениям, которые происходят во внутренней структуре слоистого композита и не зависят от граничных условий на граничных поверхностях всего пакета; все же полностью исключать влияние граничных условий, особенно граничных условий на торцах пакета, на все явления, по-видимому, нельзя. Поскольку в [74] сжатие осуществлялось вдоль слоев, то в континуальном приближении можно считать, что сжатие осуществлялось вдоль осей симметрии свойств ортотропного материала. На рис. 1.14, соответствующем [74, с. 1074, fig. 2], приведены формы слоев, которые они приобретают при соответствующем значении сжимающей нагрузки. Из анализа результатов, представленных на рис. 1.14, следует, что появляются как бы узкие полосы разрушенного материала (условно на рис. 1.14 показанные наклонными сплошными линиями); причем указанные полосы как бы периодически повторяются вдоль горизонтальной оси. Обсуждение экспериментальных результатов [74], представленных на рис. 1.14, будет проведено в второй части первого раздела

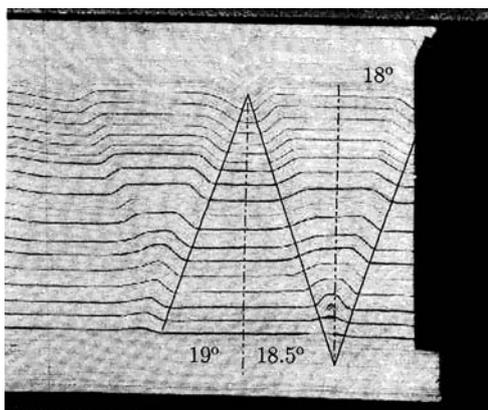


Рис. 1.14

тов) в нанокompозитах. Определенное первоначальное представление о развитии механики нанокompозитов можно получить из монографии [12]; целесообразно отметить, что в настоящее время рассматриваются, в основном, нанокompозиты с полимерной матрицей (связующим). В связи с развитием механики нанокompозитов возник вопрос о возможности существования потери устойчивости во внутренней структуре нанокompозитов, который, как и в п. 1.1.1 настоящей статьи для традиционных композитов, исследуется посредством специально поставленных экспериментов.

настоящей обзорной статье при анализе так называемого явления «kinking»; указанное название получило распространение в англоязычной литературе по механике разрушения композитных материалов при сжатии.

**1.1.3. Экспериментальные результаты для нанокompозитов при сжатии.** В несколько последних десятилетиях XX-го и XXI-го веков в связи с активным развитием нанотехнологий существенное развитие получила механика нанокompозитов, так как в конструкционных материалах применение нанотрубок, по-видимому, четко представляется только в виде наполнителей (армирующих элементов)

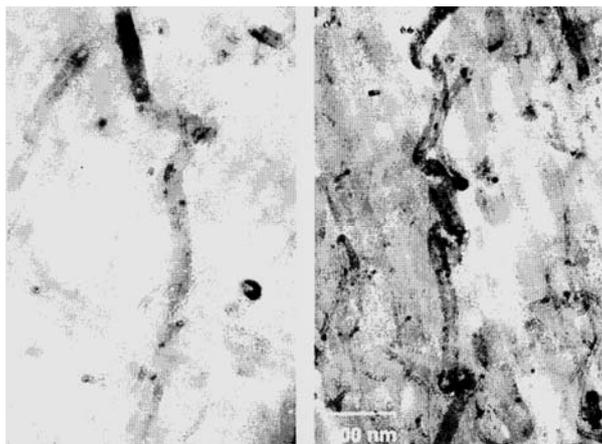


Рис. 1.15

В статье [73], опубликованной в 2004 г., получена потеря устойчивости прямолинейной многослойной углеродной нанотрубки (MWCNT) в полимерной матрице. На снимке на Рис. 1.15, соответствующем [73], приведена многократная потеря устойчивости (потеря устойчивости по совокупности нескольких волн) отдельных MWCNT в полимерной матрице, где в левом нижнем углу указан масштаб изображения в нанометрах; по-видимому, можно считать, что зафиксированные на снимке формы потери устойчивости имеют достаточно сложный характер и не имеют простой интерпретации. При внимательном анализе снимков на рис. 1.15 не удастся четко обнаружить отрыв отдельных нанотрубок (в рассматриваемом случае MWCNT) от полимерной матрицы; в связи с этим, по-видимому, можно считать, что результаты экспериментальных исследований [73], представленные на снимках рис. 1.15, свидетельствуют о возможности существования явления потери устойчивости во внутренней структуре нанокompозитов с полимерной матрицей. Заметим, что обсуждаемое явление в вышеизложенных исследованиях [73] зафиксировано в «чистом виде» без отдельных разрушений, что родственно результатам в п. 1.1.1 настоящей статьи применительно к более традиционным композитам.

Несколько отличная ситуация была зафиксирована в экспериментальных исследованиях статьи [64], опубликованной в 1998 г., применительно к потере устойчивости MWCNT в полимерной матрице; заметим, что в [64] сжатие, как и в экспериментальных исследованиях в п. 1.1.1 настоящей статьи, осуществлялось за счет усадки (shrinkage) полимерной матрицы. Результаты [64] представлены в виде ТЕМ микроснимков на рис. 1.16 и 1.17 (в виде микроснимков на трансмиссионном электронном микроскопе), которые относятся к ситуации с отдельными MWCNT после усадки (shrinkage) эпоксидной смолы (матрицы).

На ТЕМ микроснимках рис. 1.16 и 1.17, соответствующих [64], в верхних левых углах указаны масштабы изображений в нанометрах, в правых нижних углах показаны схематически геометрические формы отдельных частей отдельных MWCNT, которые они принимают после усадки связующего (полимерной матрицы). При этом на снимке рис. 1.16 зафиксирована как бы изгибаемая форма деформированной отдельной MWCNT и на снимке рис. 1.17 зафиксирована как бы петлеобразная форма деформированной отдельной MWCNT; отмеченные формы показаны на левой нижней и правой верхней частях каждого из рис. 1.16 и 1.17. По терминологии [64] вышеуказанные деформированные части отдельных MWCNT на рис. 1.16 и 1.17, вернее их появление, интерпретируется как следствие процессов «buckling» (потеря устойчивости) и «collapse» (разрушение вследствие потери устойчивости). При внимательном рассмотрении ТЕМ микроснимков на рис. 1.16 и 1.17 легко можно обнаружить, что в местах изгибаемого и петлеобразного деформирования отдельных частей MWCNT произошло отделение матрицы от нанотрубок; этот вывод следует из того факта, что под каждой «выпучиной» нанотрубки (левые нижние и правые верхние углы рис. 1.16 и 1.17) более светлым фоном отмечены места, где ранее находились эти части нанотрубок.

Таким образом, в [64] представлены экспериментальные результаты, соответствующие рис. 1.16 и 1.17, которые относятся к процессу локального разрушения, исходным или начальным (стартовым) этапом которого может быть и потеря устойчивости. Следовательно, экспериментальные результаты [64] для MWCNT в силу вышеизложенного соображения, в основном, относятся к экспериментальным результатам по разрушению композитов, в данном случае нанокompозитов, при сжатии; родственные результаты для традиционных композитов изложены в п. 1.1.2 настоящей

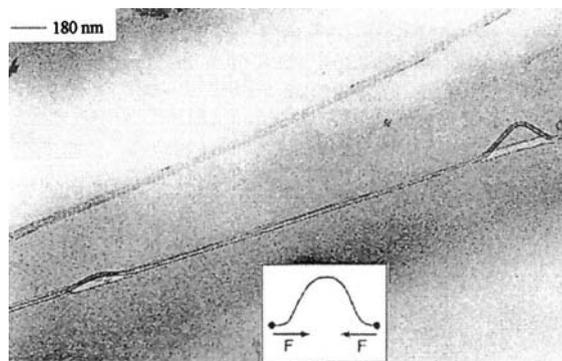


Рис. 1.16

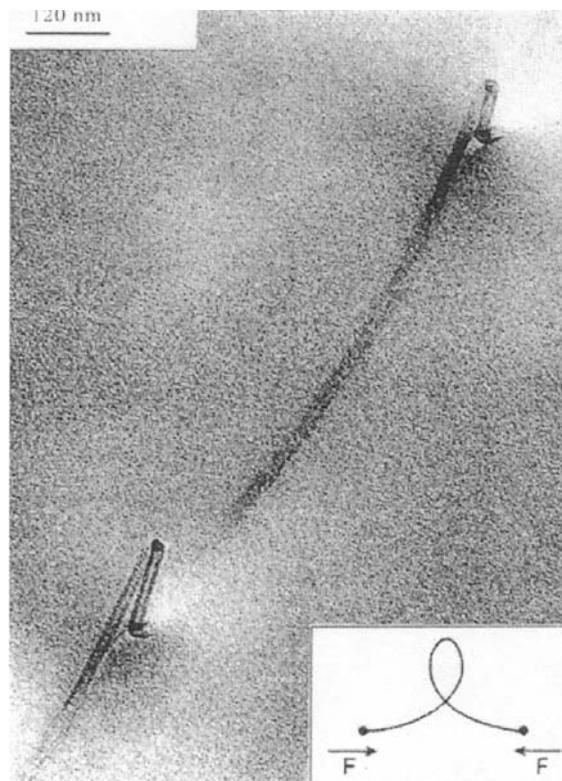


Рис. 1.17

статьи. Также в силу вышеизложенного соображения обсуждаемые экспериментальные результаты [64] для MWCNT, по-видимому, *не относятся* к экспериментальным результатам, свидетельствующим о *возможности существования явления потери устойчивости во внутренней структуре нанокомпозитов*; экспериментальные результаты, свидетельствующие о возможности существования явления потери устойчивости во внутренней структуре традиционных композитов изложены в п.1.1.1 настоящей статьи. Вышеотмеченные особенности экспериментальных результатов [64] были указаны в статье [47], где также было замечено, что эта ситуация не нашла отражения в последующих обзорных статьях других авторов. Вышеприведенный анализ результатов, представленных на ТЕМ микроснимках рис. 1.16 и 1.17, также был изложен в монографии [8].

В заключение к обсуждению экспериментальных результатов статьи [64] целесообразно присоединить следующие соображения физического характера применительно к петлеобразной форме деформирования, представленной на рис. 1.17. По-видимому, реализация петлеобразной формы деформирования *невозможна без разрушения*. Дело в том, что при реализации такой формы деформирования MWCNT без разрушения (без отрыва матрицы от нанотрубки) для матрицы привело бы к *неоднозначности* перемещений.

#### **1.1.4. Общая характеристика обсуждаемых экспериментальных результатов.**

В настоящем пункте в краткой форме рассмотрим общую характеристику направлений и результатов экспериментальных исследований, относящихся к объединенному анализу проблемы явления потери устойчивости во внутренней структуре композитных материалов и следующей за ней проблемы разрушения (failure or fracture) композитных материалов при сжатии вдоль направлений симметрии свойств материала, когда явление потери устойчивости во внутренней структуре композитов определяет начало (старт) разрушения при рассматриваемом нагружении.

Направления и результаты экспериментальных исследований, относящихся к рассматриваемому вопросу, условно можно разделить на следующие три группы.

**Первая группа.** К ней можно отнести экспериментальные исследования, результаты которых свидетельствуют о возможности существования явления потери устойчивости во внутренней структуре композитного материала при сжатии вдоль направлений симметрии свойств материала. Для получения надлежащей информации о возможности существования явления потери устойчивости во внутренней структуре композита с различными наполнителями (волокнами) в «чистом виде» (без проявления разрушений) обычно проводят специально поставленные экспериментальные исследования, когда нагружение систем волокон реализуется при усадке (shrinkage) полимерной матрицы; указанный вид нагружения, как правило, применяется исключительно во всех (известных авторам настоящей статьи) исследованиях. В п. 1.1.1 настоящей статьи представлены результаты экспериментальных исследований, относящиеся к рассматриваемой первой группе, применительно к композитным материалам с различными наполнителями; в случае нанокомпозитов аналогичные результаты представлены в п. 1.1.3 на микроснимках рис. 1.15. Вышеотмеченные результаты, можно считать, *доказывают возможность возникновения явления потери устойчивости во внутренней структуре композитных материалов при сжатии* вдоль армирующих элементов (наполнителя, волокон) применительно к композитам с различными наполнителями, включая и нанокомпозиты, как для модели «бесконечно длинных волокон», так и для модели «волокон конечных размеров». Потеря устойчивости во внутренней структуре композитов при сжатии является, очевидно, наиболее вероятным механизмом начала (старта) разрушения по аналогии со случаем сжатия элементов конструкций (стержни, пластины и оболочки) вдоль осей симметрии геометрической формы и свойств, когда потеря устойчивости является началом (стартом) истощения несущей способности элементов конструкций.

**Вторая группа.** К ней можно отнести экспериментальные исследования по разрушению композитных материалов при сжатии вдоль осей симметрии свойств композитных материалов, которые в континуальном приближении моделируются ортотропными материалами; при этом существенное внимание уделяется анализу *характера разрушения*, свойственного рассматриваемому виду разрушения. В п. 1.1.2 настоящей статьи представлены результаты экспериментальных исследований, относящихся к

рассматриваемой второй группе, применительно к композитным материалам с полимерной и металлической матрицами (связующим). Следует отметить, что информация, представленная на снимках рис. 1.5 – 1.13 п.1.1.2 и иллюстрирующая особенности характера рассматриваемого вида разрушения, безусловно не является исчерпывающей; в п. 1.1.2 настоящей статьи приведены лишь известные авторам статьи примеры результатов, относящихся к экспериментальным исследованиям второй группы. Из снимков, представленных на рис. 1.5 – 1.11 и 1.13, следует, что *характерной особенностью разрушения композитных материалов, представляющих собой в континуальном приближении ортотропные материалы, при сжатии вдоль осей симметрии свойств материалов является распространение разрушения в достаточно узких зонах, расположенных почти перпендикулярно направлению сжимающей нагрузки*. Вышеуказанный характер распространения разрушения свойственный композитным материалам как с полимерной, так и с металлической матрицами (связующими).

**Третья группа.** К ней можно отнести экспериментальные исследования по разрушению композитных материалов, представляющих собой в континуальном приближении ортотропные материалы, при сжатии вдоль осей симметрии свойств материала с определением *экспериментальных значений пределов прочности и предельных значений укорочений* в случае рассматриваемого вида нагружения. Безусловно, после получения вышеуказанной информации из экспериментальных исследований представляется естественным проведение сравнения с соответствующими результатами (теоретический предел прочности, теоретическое значение предельного укорочения) для соответствующих теорий.

**Примечание 1.3.** Целесообразно отметить, что в настоящее время уже предложено и разработано сравнительно большое количество подходов и теорий, позволяющих исследовать явление потери устойчивости во внутренней структуре композитных материалов и, следовательно, анализировать рассматриваемый механизм разрушения при сжатии. Достаточную популярность приобрела разработка весьма приближенных подходов и теорий, основанных на приближенных и не всегда логически обоснованных допущениях и гипотезах; объяснение отмеченной популярности, возможно, заключается в том, что в указанной ситуации небольшие изменения в приближенных допущениях и гипотезах приводят к формулировке «новых» подходов и теорий, что в ряде случаев является приятным моментом для отдельных авторов. В связи с вышеизложенной ситуацией авторы настоящей обзорной статьи не ставили цель – провести сравнение экспериментальных результатов с теоретическими результатами отмеченных различных приближенных подходов и теорий, что на первый взгляд, казалось бы входит в предмет анализа результатов, относящихся к **третьей группе** экспериментальных исследований. Все же в п. 1.2 настоящей обзорной статьи проведено сравнение экспериментальных результатов по механике разрушения композитов при сжатии с теоретическими результатами, по-видимому, наиболее строгой и последовательной теории [7, 8], основанной на ГЛТУДТ (трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел, например, монографии [4 – 6, 43]); дополнительную информацию, относящуюся к отмеченному сравнению, можно получить из монографии [8].

В заключение к п. 1.1, посвященному анализу результатов экспериментальных исследований по отдельному направлению механики разрушения композитных материалов, необходимо отметить следующее: эти результаты доказывают существование явления потери устойчивости во внутренней структуре композитов; эти результаты показывают специфическую особенность характера разрушения композитов при сжатии, для которого потеря устойчивости во внутренней структуре композита является начальным этапом (стартом) разрушения. Вышеуказанные экспериментальные результаты обосновывают актуальность рассматриваемых проблем и необходимость развития теоретических исследований, предусматривающих разработку соответствующих подходов, моделей и методов анализа, а также получение конкретных результатов для конкретных композитных материалов. Анализ полученных результатов при проведении теоретических и экспериментальных исследований, как правило, рассматривается в обобщающих обзорных статьях. В качестве примера можно указать опубликованные в последние два года обзорные статьи по различным проблемам механики разрушения [45, 61, 62].

**1.2. Анализ теоретических результатов.** В настоящем пункте в весьма краткой форме излагается Основная концепция, определяющая направления теоретических исследований по рассматриваемой проблеме. Также в настоящем пункте проведен краткий анализ теоретических результатов (подходы, модели, методы решения отдельных классов задач и конкретные результаты), полученных применительно к волокнистым и слоистым композитным материалам при сжатии в рамках модели «бесконечно длинных волокон».

**1.2.1. Формирование Основной концепции.** Прежде всего, целесообразно отметить, что формирование *Основной концепции*, на которой построены рассматриваемые ниже теоретические исследования, осуществлено на базе анализа результатов экспериментальных исследований, изложенных в п. 1.1 настоящей обзорной статьи.

Таким образом, рассматриваются композитные материалы, которые в континуальном приближении моделируются ортотропными материалами, при одноосном, двухосном или трехосном сжатии вдоль осей симметрии свойств материала.

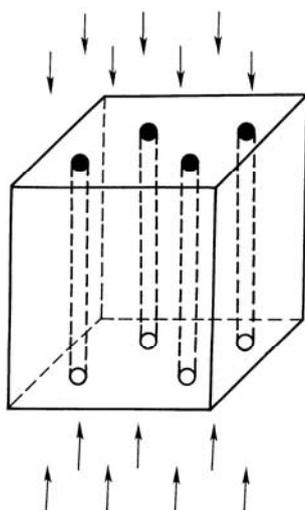


Рис. 1.18

К рассматриваемым материалам относятся однонаправленные волокнистые композиты, пример которых схематически представлен на рис. 1.18, где указано сжатие вдоль армирующих элементов (наполнителя, волокон). К таким материалам также относятся волокнистые композиты с армированием однонаправленными волокнами во взаимно-перпендикулярных направлениях; пример рассматриваемого композита можно получить из материала на рис. 1.18, если дополнительно провести армирование однонаправленными волокнами, ориентированными вдоль горизонтальной оси.

К рассматриваемым материалам относятся слоистые материалы, составленные из чередующихся вдоль оси  $Ox_2$  (рис. 1.19) слоев двух различных материалов, где показано сжатие вдоль слоев. В представленном схематически на рис. 1.19 слоистом композитном материале могут применяться слои из различных материалов, в частности, слои могут быть из различных изотропных материалов. Кроме

того, к рассматриваемым слоистым композитам относятся материалы, составленные из однонаправленных волокнистых материалов, когда в двух соседних слоях на рис. 1.19 однонаправленные волокна укладываются во взаимно перпендикулярных направлениях (применяется продольно-поперечная намотка или укладка слоев). Необходимо отметить, что можно существенно расширить перечень приемов формирования слоистого композитного материала, которые в континуальном приближении моделируются ортотропным материалом.

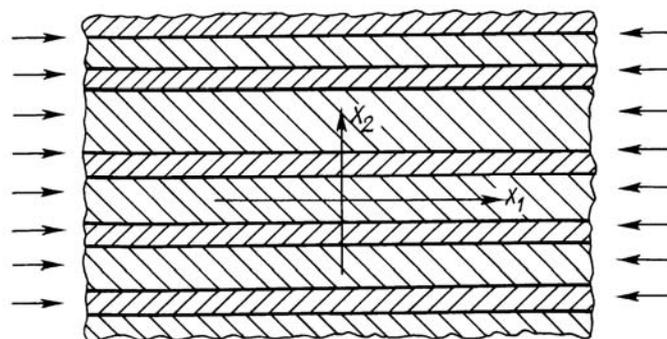


Рис. 1.19

Безусловно, можно продолжить примеры композитных материалов, которые в континуальном приближении моделируются ортотропными материалами; приведенные на рис. 1.18 и 1.19 схематические композитные материалы следует рассматривать как примеры конкретных структур анализируемых композитов.

Таким образом, учитывая все предыдущие сведения и соображения, представленные в настоящей обзорной статье, *Основную концепцию*, определяющую направления теоретических исследований по рассматриваемой проблеме, можно сформулировать следующим образом.

**Основная концепция.** *В случае композитных материалов, которые моделируются в континуальном приближении ортотропными материалами, при сжатии вдоль осей симметрии свойств материалов начальным этапом (стартом) разрушения является потеря устойчивости во внутренней структуре композитов. Распространение разрушения при этом определяется поведением возмущений в рамках применяемой (сравнительно приближенной или достаточно строгой) теории устойчивости; распространение разрушения начинается возле макро- и микронеоднородностей. Теоретическим пределом прочности при сжатии и теоретическим значением предельного укорочения являются величина критической нагрузки и величина критического укорочения, вычисленные в рамках применяемой теории устойчивости.*

Вышеформулированная *Основная концепция* в механике разрушения композитных материалов при сжатии является полным аналогом ситуации в механике элементов конструкций (стержни, пластины и оболочки), когда при сжатии вдоль осей симметрии начальным этапом истощения несущей способности элементов конструкций является потеря устойчивости.

В связи с вышеприведенной последовательной формулировкой *Основной концепции* также целесообразно последовательно определить понятие о «потере устойчивости во внутренней структуре композита» или о «внутренней неустойчивости композита», которое применяется в формулировке *Основной концепции*. Указанное понятие можно строго и последовательно ввести в рамках модели кусочно-однородной среды для композита, следуя, например, монографии [8, т. 1, с. 293 – 295]. Таким образом, *при применении модели кусочно-однородной среды для композита под потерей устойчивости во внутренней структуре композита (под внутренней неустойчивостью композита) будем понимать явление потери устойчивости в композите, которое возникает при определенных соотношениях между жесткостными характеристиками и концентрациями наполнителя и связующего, позволяющими определить величину критической нагрузки и форму потери устойчивости независимо от формы всего элемента конструкции и вида граничных условий для всего элемента конструкции.*

Учитывая вышеизложенные определения, можно сформулировать условие существования явления потери устойчивости во внутренней структуре (внутренней неустойчивости) композита *применительно к рассматриваемому элементу конструкций из конкретного композитного материала*. С этой целью введем следующие обозначения:  $P_{кр}$  – критическая нагрузка, соответствующая потере устойчивости во внутренней структуре (внутренней неустойчивости) композита;  $P_{кр}^{ЭК}$  – критическая нагрузка, соответствующая потере устойчивости рассматриваемого элемента конструкций;  $L$  – характерный (минимальный) размер рассматриваемого элемента конструкций;  $l_{кр}$  – длина полуволны формы потери устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) композита. Учитывая введенные обозначения, условия существования потери устойчивости во внутренней структуре (внутренней неустойчивости) композита *применительно к рассматриваемому элементу конструкций из данного композита* можно представить в следующем виде:

$$P_{кр} < P_{кр}^{ЭК}; l_{кр} \ll L. \quad (1.1)$$

Условия (1.1) отмечают, что при непрерывном увеличении сжимающей нагрузки явление потери устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) композита для рассматриваемого элемента конструкций может возникать при выполнении следующих двух условий:

первое условие – величина критической нагрузки, соответствующей потере устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) композита, *меньше* величины критической нагрузки, соответствующей потере устойчивости рассматриваемого элемента конструкций;

второе условие – длина волны формы потери устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) композита *значительно меньше* характерного (минимального) размера рассматриваемого элемента конструкций.

При определении критической нагрузки и форм потери устойчивости, соответствующих потере устойчивости во внутренней структуре (внутренней неустойчивости) конкретных композитных материалов, обычно, учитывая второе неравенство (1.1), анализируют для композита конкретной структуры, *который занимает бесконечное пространство*. В этом случае в результате решения соответствующих задач для композита конкретной структуры (композит занимает бесконечное пространство) получают зависимость параметра нагружения  $p$  от параметра волнообразования  $\alpha$  в виде

$$p = p(\alpha); \quad \alpha = \pi \frac{h}{l}. \quad (1.2)$$

В (1.2) введены обозначения:  $h$  – характерный геометрический параметр структуры композита ( $h$  – минимальная толщина слоев в слоистом композите (рис. 1.19);  $h \sim R$  – радиус волокна в однонаправленном волокнистом композите (рис. 1.18));  $l$  – длина полуволны (вдоль слоев или волокон) формы потери устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) композита.

Учитывая вышеизложенные определения и соображения, приходим к выводу, что явление потери устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) композита существует не при произвольной зависимости (1.2). Для наглядности можно представить два типа зависимости (1.2), соответствующие кривым  $A$  и  $B$  на рис. 1.20.

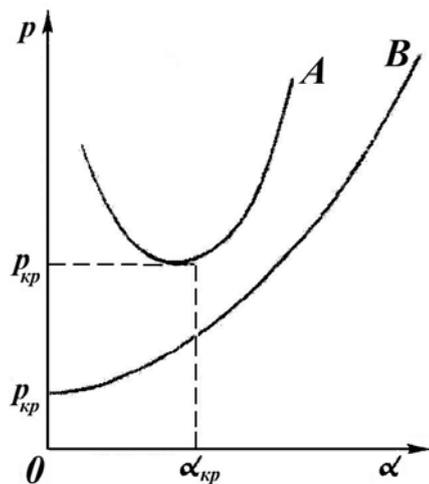


Рис. 1.20

1.20 отмеченные ранее условия (1.1) служат для *определения тех элементов конструкций* из конкретного композитного материала, для которых реализуется потеря устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) композита.

Кривая  $B$  на рис. 1.20 является монотонной кривой; в связи с этим критическое значение  $p'_{кр}$  в результате минимизации выражения (1.2) определяется соотношением  $p'_{кр} = p(0)$ , следовательно, в рассматриваемом случае получаем

$$\alpha_{кр} = 0; \quad l_{кр} = \infty. \quad (1.4)$$

Из выражений (1.4) следует, что в случае зависимости (1.2) в виде кривой типа  $B$  на рис. 1.20 невозможно определить форму потери устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) композита. Таким образом, в соответствии с принятым

определением *не существует* явления потери устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) композита в случае зависимости (1.2) в виде кривой типа *B* на рис. 1.20. Также отметим, что в соответствии со вторым выражением (1.4) в рассматриваемом случае кривой *B* на рис. 1.20 для любого элемента конструкций не может выполняться второе условие (1.1); следовательно, в рассматриваемом случае может реализоваться только потеря устойчивости всего элемента конструкций.

Таким образом, можно считать, что явление потери устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) композита *не возникает*, если зависимость параметра нагружения  $p$  от параметра волнообразования  $\alpha$  (первое выражение (1.2)) представляется кривой типа *B* на рис. 1.20. В случае кривых типа *A* на рис. 1.20, когда  $\alpha_{кр}$  незначительно отличается от нуля, явление потери устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) композита в элементах конструкций конкретной формы также практически не возникает вследствие второго условия (1.1), так как при этом  $l_{кр} \rightarrow \infty$ ; отмеченную ситуацию применительно к зависимости (1.2) в виде кривой типа *A* на рис. 1.20 необходимо учитывать при анализе рассматриваемого явления для конкретных композитов.

Изложенная в настоящем пункте (п. 1.2.1) **Основная концепция** и приведенные после нее подходы применяются в последующих пунктах (пп. 1.2.2 – 1.2.4) при анализе теоретических результатов, полученных в рамках модели «бесконечно длинных волокон», когда исследуются периодические вдоль армирующих элементов (волокон, слои) формы потери устойчивости.

В настоящее время в исследованиях проблем устойчивости композитных материалов и механики разрушения композитов при сжатии сформировалось *два направления*.

*Первое направление*, имеющее весьма приближенный характер, основано на введении различных приближенных расчетных схем и допущений; принято считать, что в этом направлении *первой* была статья [16], опубликованная на русском языке в 1967 г. В последующие годы такой подход получил дальнейшее развитие; основные публикации в рамках первого направления частично приведены в списке литературы к монографии [8].

*Второе направление*, имеющее достаточно строгий и последовательный характер, основано на применении трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ), изложенной, например, в монографиях [4 – 6, 43], к исследованию вышеуказанных проблем; такой подход был *впервые* предложен в статьях [2, 3, 30], опубликованных в 1969 г. В последующие годы такой подход получил дальнейшее развитие; основные публикации в рамках второго направления наиболее подробно приведены в списке литературы к монографии [8].

Следует отметить, что *второе направление*, основанное на публикациях [2, 30], соответствует наиболее точному, строгому и последовательному подходу, который принят в рамках механики деформируемых тел.

Ниже изложены результаты анализа подходов, моделей, методов решения отдельных классов задач и конкретных задач отдельно применительно к *первому* (п. 1.2.2) и *второму* (п. 1.2.3) вышеуказанным направлениям.

**1.2.2. Анализ теоретических результатов. Первое направление (весьма приближенные подходы).** Подходы, модели и конкретные результаты рассматриваемого первого направления развиты и получены с привлечением **Основной концепции**, изложенной в предыдущем пункте (п. 1.2.1).

**1.2.2.1. Общие вопросы.** Характерной особенностью первого направления является *применение различных приближенных допущений* при исследовании явления внутренней неустойчивости (потери устойчивости во внутренней структуре) композитных материалов, определяющих начальный этап (старт) разрушения композитов при сжатии. В настоящее время в научной литературе по механике композитных материалов и по механике разрушения опубликовано сравнительно большое количество статей, результаты которых получены в рамках первого направления; в связи с этим авторы настоящей обзорной статьи не ставили своей целью дать систематический обзор и анализ всех соответствующих публикаций.

Целью настоящего пункта (п. 1.2.2) является: классификация обсуждаемых результатов как первого направления в рассматриваемых исследованиях; формулировка основных приближенных допущений, характерных для первого направления; рассмотрение первых в историческом аспекте публикаций в первом направлении и их результатов.

Характерные приближенные допущения, широко применяемые при проведении исследований в рамках рассматриваемого первого направления, можно достаточно условно объединить в следующие четыре группы.

1. При анализе устойчивости армирующих элементов (волокон, слои) широко применяются *одномерные и двухмерные прикладные теории устойчивости тонкостенных систем* (стержни, пластины), построенных с привлечением гипотез плоских сечений, Кирхгофа – Лява и т.п.; как общеизвестно, такого типа теории применимы только для описания сравнительно длинноволновых форм потери устойчивости.

2. Как правило, не учитывается, что матрица (связующее) воспринимает также сжимающую нагрузку. Такое допущение обосновывается тем, что материал матрицы имеет значительно меньшую жесткость по сравнению с материалом наполнителя; как следствие при исследовании принимается, что *матрица является незагруженной*.

3. При исследованиях приближенно учитывается взаимодействие матрицы (связующего) и наполнителя (волокон, слои). Достаточно часто взаимодействие волокна с матрицей моделируется взаимодействием волокна с коаксиальным цилиндром (частью матрицы). Также достаточно часто при анализе взаимодействия наполнителя (волокон, слои) и матрицы (связующего) применяется моделирование матрицы одномерной моделью.

4. На границах раздела (interface) наполнителя и матрицы *приближенно* удовлетворяются граничные условия, достаточно часто даже не комментируя указанную ситуацию.

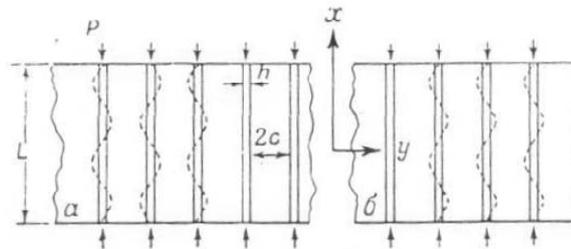
Целесообразно отметить, что при введении допущений по одной из указанных групп автоматически вводятся допущения и по другой группе; для иллюстрации вышеизложенной ситуации рассмотрим следующий пример. Так, принимая допущение, что при сжатии композита в матрице не возникают напряжения, а в наполнителе – волокнах возникают напряжения (вторая группа допущений), автоматически вводятся допущения о приближенных граничных условиях на границе раздела (interface) матрицы и наполнителя (четвертая группа допущений). Дело в том, что исходное допущение автоматически приводит к тому, что в докритическом состоянии (до потери устойчивости) матрица и наполнитель свободно проскальзывают друг относительно друга вдоль оси волокон, а в момент потери устойчивости для матрицы и наполнителя выполняются условия полного контакта. Безусловно, анализ допущений, входящих в указанные выше четыре группы, и других допущений *первого* направления можно продолжить, однако такой анализ не является предметом настоящей статьи; к тому же следующий пункт статьи (п. 1.2.3) посвящен анализу *второго* направления, для получения результатов которого не применяются допущения рассмотренных четырех групп.

**1.2.2.2. Анализ первой в историческом аспекте публикации [26, 67].** В качестве примера анализа результатов первого направления ниже проведем анализ результатов в историческом аспекте первой публикации [26] в рамках первого направления, посвященной теоретическим исследованиям; как уже неоднократно отмечалось выше, эта статья на русском языке опубликована в 1967 г. и соответствует статье [67] на английском языке, опубликованной в 1965 г. Так, на рис. 1.21 представлены основные результаты статьи [26]; информация на рис. 1.21 соответствует фиг. 3.22 – 3.24 указанной статьи. Прежде всего, необходимо отметить, что *все результаты в [26] получены в рамках плоской деформации в плоскости  $xu$  на рис. 1.21 (фиг. 3.22)*; таким образом, *все результаты [26], строго говоря, получены для слоистого композита, слои которого бесконечны в направлении оси  $Oz$  (перпендикулярно к плоскости рис. 1.21). Следовательно, в [26] однонаправленный волокнистый материал моделируется плоской задачей (плоская деформация) для слоистого материала в плоскости*, которая проходит вдоль волокон однонаправленного волокнистого материала. Учитывая вышеизложенные соображения, по-видимому, можно сформулировать следующим образом основное допущение [26].

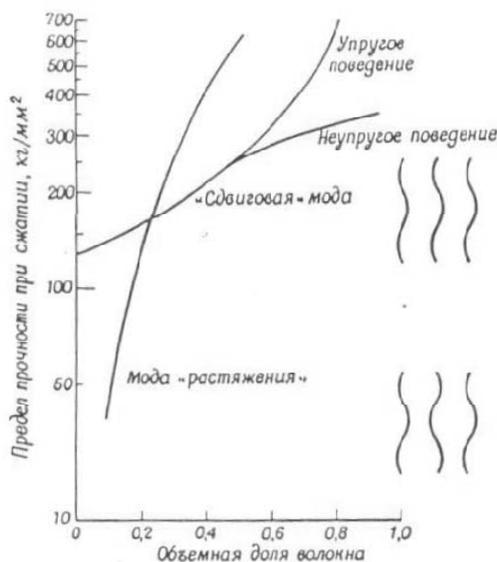
**Основное допущение [26].** При исследовании потери устойчивости во внутренней структуре (внутренней неустойчивости) композита *однонаправленный волокнистый композит можно моделировать плоской задачей для слоистого композита.*

Таким образом, в [26] рассматривается слоистый композит и результаты молчаливо, без формулировки вышеизложенного Основного допущения и каких-либо комментариев, переносятся на однонаправленный волокнистый композит; в дальнейшем, каждый раз не отмечая указанное моделирование, в краткой форме рассмотрим основные результаты [26] – результаты для слоистого композита (при последовательном применении общепринятой терминологии).

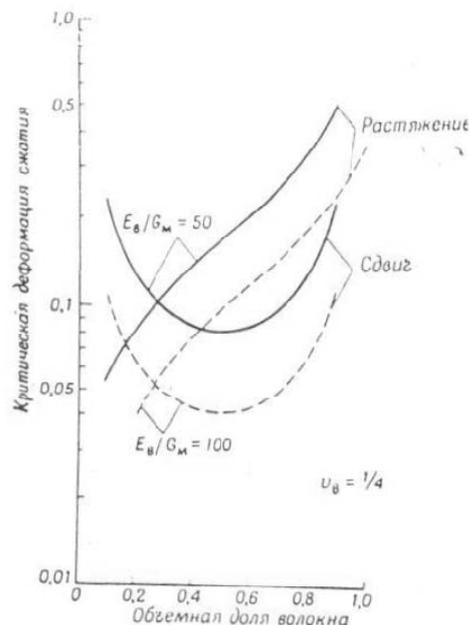
В [26] конкретные результаты получены для форм потери устойчивости: мода «растяжения» (рис. 1.21, фиг. 3.22, *a*) – соседние слои наполнителя теряют устойчивость в противофазе; сдвиговая мода (рис. 1.21, фиг. 3.22, *b*) – все слои наполнителя и матрицы теряют устойчивость по одинаковой изгибной форме; заметим, что при этом применяется модель «бесконечно длинных волокон» и исследуются периодические (синусоидальные) вдоль оси  $0x$  (рис. 1.21, фиг. 3.22) формы потери устойчивости. Также в [26] принимаются следующие допущения:



Фиг. 3.22. Аналитическая модель прочности волокнистой композиции при сжатии.  
*a* – мода растяжения; *b* – сдвиговая мода.



Фиг. 3.23. Прочность при сжатии стеклопластика.



Фиг. 3.24. Критическая деформация сжатия волокнистых композиций.

для наполнителя применяется прикладная одномерная теория устойчивости тонких стержней, построенная с привлечением гипотезы плоских сечений;

матрица не воспринимает сжимающую нагрузку, так на рис. 1.21 (фиг. 3.22) нагружается только наполнитель, где нагрузка указана стрелочками;

при описании взаимодействия матрицы и наполнителя для матрицы применяется одномерная модель;

на границах раздела (interface) наполнителя и матрицы приближенно удовлетворяются граничные условия в таком же смысле, как и в вышеуказанной четвертой группе допущений.

Принимая во внимание вышеизложенные допущения, в [26] получены конкретные результаты в виде зависимости основных величин для композита от величины  $V_B$  объемной доли (концентрации) волокон в композите; эти результаты представлены на рис. 1.21: на фиг. 3.23 – для теоретического предела прочности на сжатие и на фиг. 3.24 – для теоретического значения предельного укорочения (в %).

Результаты статей [26, 67] ([67] на английском языке опубликована в 1965 г., [26] на русском языке опубликована в 1967 г.) в виде рис. 1.21 (фиг. 3.22 – 3.24) являются общеизвестными и общепризнанными в мировой научной литературе по механике композитных материалов и по механике разрушения. Так, указанные результаты вошли в семитомный трактат [25] энциклопедического характера по разрушению (в виде статьи [27] первой части седьмого тома). Кроме того, эти результаты вошли в восьмитомный трактат [19] энциклопедического характера по композитным материалам (в статье [20], посвященной исключительно композитным материалам с металлической матрицей, в первом томе и в статье [28], посвященной материалам с металлической и полимерной матрицами, в пятом томе).

Необходимо отметить, что в публикациях [20, 27, 28] указаны также многочисленные работы других авторов, выполненные в первом направлении; частично в списках литературы к монографиям [7, 8] также указаны отдельные публикации, относящиеся к первому направлению. Среди такого типа публикаций, являющихся одними из первых в историческом аспекте в рамках первого направления, можно, в качестве примера, отметить статью [70], опубликованную на английском языке в 1966 г., и статью [68], опубликованную на английском языке в 1967 г.

Таким образом, теоретические исследования и количественные результаты [26, 67], полученные в рамках первого направления и являющиеся, по-видимому, первыми в этом направлении, нашли повсеместное признание и отражение во всех общеизвестных обобщающих публикациях. Материал, кратко изложенный в настоящем пункте (п. 1.2.2.2), получил название теории Дау – Грунфеста – Розена – Шурца (как авторов публикаций [39, 67, 70]); такое название применяется, например, в монографии [29] со ссылкой на [27].

**1.2.2.3. Сравнительный анализ (анализ достоверности) результатов [26, 67].** Несмотря на популярность и общепризнанность теории Дау – Грунфеста – Розена – Шурца и соответствующих количественных результатов, представленных на рис. 1.21 (фиг. 3.23 и 3.24), все же необходимо отметить, что указанные теория и результаты построены с привлечением весьма приближенных допущений, указанных в п. 1.2.2.1 для всего *первого* направления (первого – по терминологии заключительной части п. 1.2.1, а также монографий [7, 8] и конкретизированных в п. 1.2.2.2 для [26, 67]). Заметим, что обсуждаемые весьма приближенные допущения приняты в [26, 67] при составлении расчетных схем и моделей; в связи с этим для обоснования результатов (рис. 1.21, фиг. 3.23 и 3.24) [26, 67] и установления степени их достоверности необходимо провести сравнение с соответствующими результатами (применительно к одной и той же задаче), полученными в рамках более строгих и обоснованных допущений.

Как уже неоднократно отмечалось, в том числе и в заключительной части п. 1.2.1, *второе* направление (второе – по терминологии заключительной части п. 1.2.1, а также монографий [7, 8]), основанное на монографиях [6, 43] по ТЛГУДТ (трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел), соответствует наибо-

лее точно, строгому и последовательному подходу, который возможен в рамках механики деформируемых тел. Естественно, что при получении конкретных результатов в рамках *второго* направления *не применяются* весьма приближенные допущения, характерные для *первого* направления. Таким образом, для установления (обоснования) степени достоверности результатов (рис. 1.21, фиг. 3.23 и 3.24) [26, 67] целесообразно провести их сравнение с соответствующими результатами (применительно к одной и той же задаче) *второго* направления.

Последовательный сравнительный анализ результатов теории Дау – Грунфеста – Розена – Шурца в виде рис. 1.21 (фиг. 3.23 и 3.24) [26, 67], полученных в рамках *первого* направления, с точки зрения результатов *второго* подхода (для соответствующей [26, 67] задачи) представлен в монографии [7, с. 206 – 214] и потом частично воспроизведен в монографии [8, т. 1, с. 187 – 189]. Следует обратить внимание при ознакомлении с результатами вышеуказанного сравнительного анализа, что в публикации [26] и в монографиях [7, 8] при этом применяются различные обозначения для одних и тех же параметров. Так, в публикации [26] применяются обозначения:  $E_B$  и  $E_M$ ,  $G_B$  и  $G_M$ ,  $\nu_B$  и  $\nu_M$  – для модуля Юнга, модуля сдвига и объемных концентраций (долей) материалов волокна (наполнителя, армирующих элементов) и матрицы (связующего); в монографиях [7, 8] для соответствующих параметров применяются обозначения:  $E_a$  и  $E_m$ ,  $G_a$  и  $G_m$ ,  $S_a$  и  $S_m$ . Таким образом, имеется следующее соответствие в обозначениях:

$$E_B \sim E_a, E_M \sim E_m; G_B \sim G_a, G_M \sim G_m; \nu_B \sim S_a, \nu_M \sim S_m. \quad (1.5)$$

Таким образом, интересующиеся читатели, учитывая соответствие (1.5), могут получить полную информацию о результатах вышеуказанного сравнительного анализа и о процедуре такого анализа из монографий [7, 8].

Ниже в настоящем пункте (п. 1.2.2.3) приведем лишь отдельные сведения о **качественных противоречиях и количественных погрешностях** теории Дау – Грунфеста – Розена – Шурца (результаты на рис. 1.21, фиг. 3.23 и 3.24), построенной в рамках *первого* направления, по сравнению с соответствующими результатами *второго* направления, представленного в монографиях [7, 8], в котором, как уже неоднократно отмечалось, не принимаются приближенные допущения, характерные для *первого* направления.

**Качественные противоречия.** Ограничимся формулировкой двух позиций.

1. Теория [26, 67] не допускает возникновения потери устойчивости во внутренней структуре (внутренней неустойчивости) по «сдвиговой» моде для любого композита (ни при каких соотношениях между жесткостными и геометрическими параметрами композита). Это заключение следует при строгом анализе (в соответствии с подходами, изложенными возле рис. 1.20) из выражения [6, с. 96; В. 26], которое свидетельствует о том, что зависимость типа  $p = p(\alpha)$  (1.2) для рассматриваемого случая имеет монотонный характер – типа кривой  $B$  на рис. 1.20. В монографии [7] сформулированное заключение фактически изложено в более подробном виде [7, с. 207 – 209].

В рамках *второго* направления строго доказано, что потеря устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) по «сдвиговой» моде может возникать или не возникать в зависимости от соотношений между жесткостными и геометрическими параметрами композита. В частности, эта неустойчивость по «сдвиговой» моде возникает при малых концентрациях наполнителя (армирующих элементов, волокон), что отмечено в монографии [7, с. 209].

Таким образом, в вышеизложенном заключается первое качественное противоречие теории [26, 67].

2. Теория [26, 67] при больших концентрациях наполнителя (армирующих элементов, волокон) приводит к физически некорректному результату для «сдвиговой моды». Так, из выражения [26, с. 82, (3.29)] следует, что теоретический предел прочности при сжатии  $\rightarrow \infty$  при  $\nu_B \rightarrow 1$  или, что эквивалентно,  $\nu_m \rightarrow 0$ .

В рамках *второго* направления *строго доказано*, что в вышеизложенной ситуации теоретический предел прочности при сжатии стремится к конечной величине, что представлено выражениями [8, т. 1, с. 189, (2.71)].

Таким образом, в вышеизложенном *заключается второе качественное противоречие теории* [26, 67].

**Количественные погрешности.** Ограничимся формулировкой двух позиций.

1. Результаты *теории* [26, 67] и соответствующие результаты *второго* направления *существенно отличаются друг от друга при малых и больших концентрациях (долях) наполнителя (армирующих элементов, волокон)*. Это заключение представлено в монографии [7, с. 210].

2. Результаты *теории* [26, 67] и соответствующие результаты *второго* направления при довольно малых концентрациях наполнителя (армирующих элементов, волокон) *могут отличаться друг от друга в три раза и более*. Это заключение представлено в верхней части [7, с. 211].

Таким образом, в вышеизложенном *заключаются количественные погрешности теории* [26, 67].

**Выводы.** Приведенные в настоящем пункте (п. 1.2.2.3) сведения позволяют сформулировать следующие выводы, относящиеся к теории Дау – Грунфеста – Розена – Шурца и ее результатам [26, 67].

1. Указанная теория и ее количественные результаты [26, 67] имеют *существенные качественные противоречия и количественные погрешности* по отношению к теории и результатам, построенным с обычно принятой точностью в механике деформируемого тела (*второе* направление, в соответствии с терминологией монографий [7, 8] и указанной, например, в заключительной части п. 1.2.1).

2. В связи с **Выводом 1** теорию Дау – Грунфеста – Розена – Шурца и ее количественные результаты [16, 41] *нельзя считать достоверными*.

3. Для определения *достоверности* отдельных конкретных результатов, полученных в рамках теории Дау – Грунфеста – Розена – Шурца, необходимо проводить *дополнительные исследования*.

4. Изложенные выше **Выводы 1 – 3** в равной мере относятся и ко всем другим теориям и результатам, полученным в рамках первого направления (*первое* направление, в соответствии с терминологией монографий [7, 8] и указанной, например, в заключительной части п. 1.2.1), поскольку в *первом* направлении принимаются приближенные допущения 1 – 4, указанные в п. 1.2.2.1, которые соответствуют приближенным допущениям теории Дау – Грунфеста – Розена – Шурца (п. 1.2.2.2).

**Примечание 1.4.** Безусловно, при определении степени *достоверности* теории Дау – Грунфеста – Розена – Шурца и ее количественных результатов в [26, рис. 1.21 (фиг. 3.23 и 3.24)], в равной мере как и других теорий и их результатов в рамках *первого* направления, можно было ориентироваться на сравнение с результатами, полученными при *экспериментальных* исследованиях. Все же, по мнению авторов настоящей обзорной статьи, исключительно вышеуказанный подход представляется сложно осуществимым и не совсем рациональным ввиду следующих двух позиций.

Первая позиция – достаточно сложно осуществить специально поставленный эксперимент, соответствующий приближенной расчетной схеме, например, соответствующий ситуации [26, рис. 1.21 (фиг. 3.22)].

Вторая позиция – при развитии теорий в рамках *первого* направления (типа теории [26, 67]) вводятся многочисленные приближенные теоретические допущения при создании приближенных моделей и расчетных схем. В связи с этим возникает, по-видимому, первоочередная задача – оценить *достоверность* вышеуказанных приближенных теоретических допущений с точки зрения теорий, построенных с общепринятой в механике деформируемых тел точностью.

Вторая из вышеуказанных позиций и определила целесообразность приведения сравнительного анализа, который в сравнительно краткой форме изложен в настоящем пункте (п. 1.2.2.3).

**1.2.3. Анализ теоретических результатов. Второе направление (строгие последовательные подходы).** Подходы, модели и конкретные результаты рассматриваемого *второго* направления развиты и получены с привлечением **Основной концепции**, изложенной в п. 1.2.1. Во *втором* направлении (в отличие от *первого* направления, рассмотренного в п. 1.2.2) *не вводятся* различные приближенные допущения, в кратком виде изложенные в п. 1.2.2.1.

**1.2.3.1. Общее описание.** Характерной особенностью второго направления является то, что при исследовании явления внутренней неустойчивости (потери устойчивости во внутренней структуре) композитных материалов, определяющих начальный этап (старт) разрушения композитов при сжатии, *последовательно применяется трехмерная линеаризованная теория устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ)*, изложенная, например, в монографиях [4 – 6, 43]. При этом применяются теория больших (конечных) докритических деформаций и также первый и второй варианты теории малых докритических деформаций в соответствии с терминологией монографий [6, 43]; основные результаты, соответствующие второму направлению, представлены в монографиях [4, 5, 7, 8], где [5] посвящено исключительно теории больших (конечных) докритических деформаций.

Как уже неоднократно отмечалось, подходы второго направления, по-видимому, впервые были предложены в статьях [2, 3, 30], опубликованных в 1969 г.; в настоящее время наиболее полно результаты второго направления, полученные до 2008 г., представлены в 2-х томной монографии [8], в список литературы которой включены основные публикации по второму направлению. В рамках второго направления развиты: континуальная теория разрушения композитов, основанная на модели однородной среды с усредненными параметрами; трехмерная теория устойчивости волокнистых и слоистых композитов при сжатии, основанная на модели кусочно-однородной среды при точных граничных условиях на границах раздела (interface). Результаты второго направления в рамках модели кусочно-однородной среды, первые публикации которых представлены статьями [2, 30], соответствуют наиболее точному, строгому и последовательному подходу, который принят в рамках механики деформируемого твердого тела; в связи с этим отмеченные результаты *второго* направления можно применять для оценки результатов *первого* направления, что и реализовано в качестве примера в п. 1.2.2.3.

Следует отметить, что внутреннее разрушение исследуется как в рамках второго направления, так и в рамках первого направления. Кроме того, в рамках *второго* направления (дополнительно к *первому* направлению) анализируется приповерхностное разрушение, соответствующее приповерхностной потере устойчивости при сжатии вдоль армирующих элементов (наполнителя), и разрушение при смятии торцов, соответствующее приповерхностной потере устойчивости возле нагруженных торцов.

Исследования, относящиеся ко второму направлению, проведены для упругих и упруго-пластических моделей сжимаемых и несжимаемых изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных материалов при сжатии вдоль осей симметрии свойств материалов (в случае трансверсально-изотропных и ортотропных материалов). Результаты общего характера получены в случае упругих моделей – для гиперупругих материалов с произвольной структурой упругого потенциала и в случае упруго-пластических моделей – для материалов с определяющими уравнениями достаточно общего вида; результаты конкретного характера получены для упругих и упруго-пластических моделей материалов с определяющими соотношениями простейшей структуры.

Для упруго-пластических моделей материалов (применительно к связующему и наполнителю) применяется обобщенная концепция продолжающегося нагружения, изложенная, например, в монографиях [6, 43]. В связи с этим сформулированные задачи устойчивости деформирования рассматриваются в единой общей форме для упругих и упруго-пластических моделей материалов.

Во втором направлении проводится исследование явления потери устойчивости во внутренней структуре (внутренней неустойчивости) композитных материалов при действии внешней «мертвой» нагрузки, что характерно практически для всех публикаций по механике разрушения. Применительно к исследованиям второго направления в случае упругих моделей и упруго-пластических моделей (с учетом обобщенной концепции продолжающегося нагружения) *строго доказано выполнение достаточ-*

ных условий применимости статического метода исследования устойчивости [6, 43] и, таким образом, рассматриваемые задачи сводятся к задачам на собственные значения, т.е. применяется метод Эйлера. Вышеуказанное доказательство также относится к приповерхностной неустойчивости при сжатии вдоль армирующих элементов и приповерхностной неустойчивости возле нагруженных торцов. Таким образом, исследования в рамках второго подхода полностью соответствуют общепринятому и строгому методу исследования явления потери устойчивости – анализу поведения малых возмущений в рамках линеаризованных трехмерных динамических задач.

Результаты второго направления предназначены для композитных материалов с полимерной и металлической матрицами. Для композитов с полимерной матрицей анализируется хрупкое разрушение; при этом матрица моделируется упругим телом, что характерно для композитов при умеренных температурах и при сравнительно недлительном действии нагрузки, так как в этом случае не учитываются эффекты вязкости. Для композитов с металлической матрицей анализируется пластическое разрушение (с учетом обобщенной концепции продолжающегося нагружения); при этом рассматривается этап нагружения, когда вся матрица находится в состоянии пластического деформирования.

**Примечание 1.5.** В рамках второго направления при исследовании потери устойчивости во внутренней структуре (внутренней неустойчивости) композита и приповерхностной потери устойчивости (приповерхностная неустойчивость) композита *предусматривается одинаковое укорочение наполнителя и матрицы вдоль направления сжатия* (вдоль волокон на рис. 1.18 для однонаправленного волокнистого композита, вдоль слоев в направлении оси  $Ox_1$  на рис. 1.19 для слоистого композита). Вышеуказанное условие является, по-видимому, единственно возможным условием, позволяющим анализировать явления внутри композитного материала. При экспериментальных исследованиях вышеуказанные условия выполняются при сжатии достаточно жесткими дисками (вдоль горизонтальной оси на рис. 1.19), когда вдоль вертикальной оси на рис. 1.19 обеспечивается минимальное трение. При теоретических исследованиях вдоль оси  $Ox_1$  задается одинаковое перемещение (вдоль оси  $Ox_1$ ) в наполнителе и матрице, а вдоль оси  $Ox_2$  задаются нулевые касательные напряжения.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при весьма кратком описании подхода *второго* направления в механике разрушения композитных материалов при сжатии вдоль осей симметрии свойств композита, рассматриваемого как ортотропный материал в континуальном приближении. Такой подход применяется при исследовании потери устойчивости во внутренней структуре (внутренней неустойчивости) композита, определяющей начало (старт) внутреннего разрушения композита (всего материала), и при исследовании приповерхностной неустойчивости (при сжатии вдоль армирующих элементов, включая сжатие торца материала), определяющей начало (старт) приповерхностного разрушения композита.

В дальнейшем в настоящем пункте (п. 1.2.3) в весьма краткой форме приведем информацию о разработанных методах и полученных конкретных результатах применительно к модели однородного материала с усредненными параметрами (континуальная теория) и применительно к модели кусочно-однородной среды (наиболее точное рассмотрение).

**1.2.3.2. Континуальная теория разрушения.** В настоящем пункте (п. 1.2.3.2) в краткой форме рассмотрим основные элементы континуальной теории разрушения композитных материалов при сжатии, которая основана на континуальной модели композитных материалов с усредненными параметрами. Основные результаты получены для хрупкого и пластического разрушения, в последнем случае предварительно применяется обобщенная концепция продолжающегося нагружения, изложенная, например, в монографиях [6, 43]. В соответствии с основным подходом, изложенным в п. 1.2.3.1, в рассматриваемом случае приходим к анализу статических уравнений и соответствующих граничных условий ТЛУУДТ [6, 43]. Основные результаты получены для потери устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость, *внутреннее* разрушение) и для приповерхностной потери устойчивости (*приповерхностное* разрушение); эти результаты в достаточно подробной форме представлены в монографии [8, т. 1, глава 2].

**1.2.3.2.1. Внутреннее разрушение.** При исследовании внутреннего разрушения следует рассматривать композит, который занимает бесконечное пространство; само же разрушение и его распространение описывается системой статических уравнений ТЛГУДТ [6, 43], в незагруженном состоянии указанная система уравнений для сжимаемого материала является системой уравнений эллиптического типа. Сжимаемость композита в континуальном приближении обеспечивается сжимаемостью наполнителя или связующего.

В силу рассмотрения бесконечного материала при анализе внутреннего разрушения исследуется как бы потеря устойчивости в микрообъеме. Таким образом, при рассматриваемом механизме разрушения изменения в микрообъеме должны каким-то образом проявляться и в макрообъеме, причем в последнем случае они не должны иметь локального характера, так как только в этом случае будет наблюдаться разрушение всего образца (макроразрушение). Указанное изменение в микрообъеме должно проявляться в свойствах, не зависящих от граничных условий, так как исследуется процесс разрушения материала (внутреннее разрушение соответствует «бесконечному» материалу), а не влияние захватов испытательных машин, формы поперечного сечения и т.д. Очевидно, что изменения в макрообъеме определяются возмущениями перемещений, которые описываются системой статических уравнений ТЛГУДТ [6, 43].

Таким образом, можно считать, что начало разрушения соответствует появлению решений системы статических уравнений ТЛГУДТ [6, 43] для сжимаемого материала, которые не зависят от граничных условий (рассматривается случай бесконечного материала) и не имеют локального характера; при этом, безусловно, следует отбросить решения типа однородных напряженно-деформированных состояний. Вышеприведенное условие для системы статических уравнений ТЛГУДТ [6, 43] может выполняться лишь в том случае, когда указанная система уравнений становится системой гиперболического типа.

Учитывая вышеизложенное, **Основную концепцию** построения континуальной теории внутреннего разрушения композитных материалов при сжатии можно сформулировать следующим образом.

*Начало процесса разрушения можно отождествлять с тем моментом в истории нагружения, когда система статических уравнений ТЛГУДТ (для сжимаемых материалов) из эллиптической системы переходит в гиперболическую, т.е. указанная система теряет свойство эллиптичности. Теоретические пределы прочности при этом определяются из того же условия. Разрушение композитных материалов при сжатии происходит вдоль характеристических плоскостей и поверхностей.*

Дополнительные сведения по излагаемому вопросу представлены в монографии [8, т. 1, глава 2]; ниже рассмотрим лишь отдельные результаты.

Следуя **Основной концепции**, введено понятие о поверхности  $P_T$  – поверхности теоретических пределов прочности при сжатии, которое вводится в трехмерном пространстве сжимающих главных напряжений тензора напряжений. В случае *хрупкого разрушения* (композиты с полимерной матрицей) поверхность  $P_T$  построена в явном виде для пространственной и плоской задач. Также в случае *хрупкого разрушения строго доказано, что разрушение распространяется по плоскостям, перпендикулярным к действию сжимающих нагрузок*; экспериментальным подтверждением теоретической закономерности являются результаты на снимках рис. 1.5 – 1.8 и 1.10.

Ниже приведем сведения о сравнении величин теоретических пределов прочности на сжатие и теоретических значений предельных укорочений, вычисленных в рамках континуальной теории внутреннего разрушения (п. 1.2.3.2.1), со значениями соответствующих величин, определенных из экспериментальных исследований; при этом будем ориентироваться на сведения из монографии [8, т. 1, глава 2], представленные отдельно для хрупкого и пластического разрушения. По классификации п. 1.1.4 рассматриваемые экспериментальные исследования относятся к третьей группе экспериментальных исследований, целью которых является определение экспериментальных значений пределов прочности и предельных укорочений.

**Хрупкое разрушение.** Вышеуказанное сравнение проведем для однонаправленных волокнистых композитов с полимерной матрицей в виде эпоксидной смолы в случае весьма жестких волокон, для которых

$$E_a \gg E_m. \quad (1.6)$$

Также введем следующие обозначения:  $(\Pi_3^-)_T$  – теоретический предел прочности при сжатии вдоль одной оси (в данном случае – вдоль оси  $Ox_3$ );  $(\Pi_3^-)_{эк}$  – экспериментальный предел прочности при одноосном сжатии вдоль этой же оси. В случае (1.6) для композита с 50%-ой концентрацией (долей) однонаправленных волокон ( $S_a = S_m = 0,5$ ) теоретический предел прочности на сжатие (в рамках континуальной теории разрушения) приведен в монографии [8, т. 1, с. 192]

$$(\Pi_3^-)_T = 2,09 - 3,00 \text{ ГПа} \quad (1.7)$$

с учетом разброса свойств эпоксидной смолы, указанного в табл. 0.1 [8] (т. 1, стр. 67). В справочном издании [24], опубликованном на русском языке в 1981 г. (на английском языке это издание [59] опубликовано в 1978 г.), на стр. 656 [24] представлены экспериментальные пределы прочности для различных композитов (различные волокна при  $S_a = S_m$ ); эти результаты представлены также в [8, т. 1, с. 192] и имеют вид

$$(\Pi_3^-)_{эк} = \begin{cases} 3,10 \text{ ГПа} - \text{в случае волокон бора;} \\ 1,38 \text{ ГПа} - \text{в случае высокопрочных углеродных волокон;} \\ 1,03 \text{ ГПа} - \text{в случае высокомодульных углеродных волокон.} \end{cases} \quad (1.8)$$

Из сравнения результатов (1.7) и (1.8) следует, что применительно к рассматриваемым композитам с полимерной матрицей наблюдается неплохое соответствие между теоретическими пределами прочности на сжатие и экспериментальными пределами прочности при одноосном сжатии.

**Пластическое разрушение.** Вышеуказанное сравнение проведем для однонаправленного волокнистого материала с металлической матрицей, используя экспериментальные результаты статьи [66]; в [66] приведены экспериментальные результаты для металлокомпозита (наполнитель – проволока из нержавеющей стали, матрица – чистый алюминий). Теоретический предел прочности и теоретическое значение предельного укорочения при одноосном сжатии (в рамках континуальной теории внутреннего разрушения, рассматриваемой в настоящем п. 1.2.3.2.1) определены в первом приближении в монографии [8, т. 1, глава 2, с. 193 – 202], где наполнитель моделировался линейным упругим изотропным сжимаемым телом и матрица моделировалась упруго-пластическим изотропным несжимаемым телом со степенной зависимостью между интенсивностями напряжений и деформаций

в следующем виде:

$$\sigma_u^m = A_m \varepsilon_u^{mk_m}; \quad A_m, k_m - \text{const.} \quad (1.9)$$

В [66] приведены экспериментальные результаты для различной концентрации наполнителя в % ( $S_a = 4,1; 11; 15,3; 21,2; 24,8; 32,8$ ); для сокращения обсуждений, приведенных в монографии [8, т. 1, глава 2, стр. 204 – 205], на рис. 1.22, в отличие от рис. 2.9 в монографии [8, т. 1, глава 2, стр. 206], результаты приведены лишь для значений  $S_a$  (%): 15,3; 21,2; 24,8 и 32,8. Следует отметить, что на рис. 1.22 устранена неточность в обозначениях, допущенная на рис. 2.9 монографии [8, т. 1, глава 2, с. 206], где пропущен множитель  $E_a^{-1}$  ( $E_a$  – модуль Юнга армирующих элементов в соответствии с обозначениями (1.5), в данном случае – проволоки из нержавеющей стали).

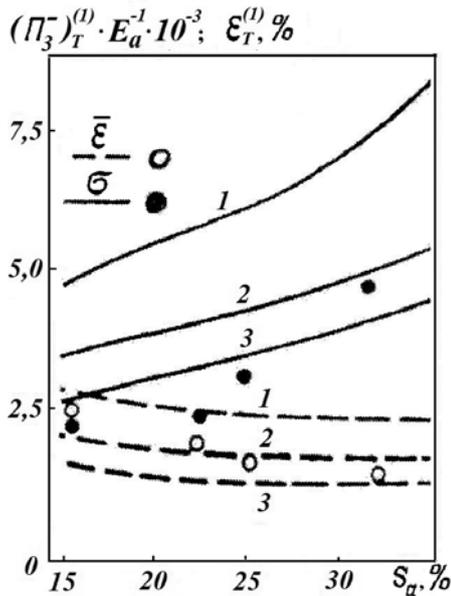


Рис. 1.22

При вышеуказанных теоретических исследованиях при описании пластического деформирования чистого алюминия с привлечением соотношения (1.9) применялись следующие три аппроксимации для величин  $A_m$  и  $k_m$  в (1.9):

$$\begin{aligned} 1 \sim A_m &= 100 \text{ МПа}, k_m = 0,1; \\ 2 \sim A_m &= 100 \text{ МПа}, k_m = 0,25; \\ 3 \sim A_m &= 68 \text{ МПа}, k_m = 0,25. \end{aligned} \quad (1.10)$$

В монографии [8, т. 1, глава 2, с. 207] указаны авторы, в публикациях которых применялись аппроксимации (1.10).

Учитывая вышеизложенное, на рис. 1.22 представлены зависимости от  $S_a$  (концентрации наполнителя, в данном случае – проволоки из нержавеющей стали) для следующих величин:

сплошными линиями для величины  $(\Pi_3^-)_T^{(1)} \cdot E_a^{-1} \cdot 10^{-3}$  – безразмерного нормированного значения теоретического предела прочности при сжатии вдоль одной оси, вычисленного в первом приближении;

штриховыми линиями для величины  $\varepsilon_T^{(1)}$  в % – теоретического значения предельного укорочения, вычисленного в первом приближении.

При этом на рис. 1.22 кривые, соответствующие аппроксимациям (1.10), отмечены значками 1, 2 и 3. Экспериментальные результаты [50] представлены на рис. 1.22: темными кружочками – для экспериментального предела прочности и светлыми кружочками – для экспериментального значения предельного укорочения; заметим, что в [50] применялась аппроксимация 2.

Из анализа результатов, представленных на рис. 1.22, следует, что удовлетворительное соответствие теоретических и экспериментальных результатов наблюдается для пределов прочности при применении аппроксимации 3 из (1.10) и для предельных укорочений при применении аппроксимации 2 из (1.10).

Вышеизложенными сведениями ограничимся при обсуждении механики внутреннего разрушения в рамках рассматриваемой континуальной теории разрушения: как уже неоднократно отмечалось, достаточно подробные сведения по этому вопросу приведены в монографии [8, т. 1, глава 2].

**1.2.3.2.2. Приповерхностное разрушение.** Континуальная теория приповерхностного разрушения построена на исследовании приповерхностной формы потери устойчивости, перемещения и напряжения в которой затухают при удалении от граничной поверхности; при этом при исследовании применяются основные соотношения ТЛТУДТ [6, 30]. В соответствии с основным подходом, изложенным в п. 1.2.3.1, в рассматриваемом случае (п. 1.2.3.2.2) приходим к статическим задачам ТЛТУДТ [6, 30] для полуограниченных областей (к задачам на собственные значения, в которых собственные функции затухают при удалении от граничной поверхности).

Как уже отмечалось в п. 1.2.3.1, в обсуждаемой континуальной теории приповерхностного разрушения рассматриваются два типа такого разрушения: *первый* тип относится к приповерхностному разрушению, соответствующему приповерхностной потере устойчивости при сжатии вдоль армирующих элементов (наполнителя); *второй* тип относится к приповерхностному разрушению при смятии торцов, соответствующему приповерхностной потере устойчивости возле нагруженных торцов.

Континуальная теория приповерхностного разрушения, относящаяся к *первому* типу, достаточно подробно изложена в монографии [8, т. 1, глава 2, §2, стр. 209 – 224]. Для примера, расчетная схема применительно к плоской задаче для первого типа представлена на рис. 1.23, где  $x_2 = 0$  является свободной поверхностью и армирующие элементы (наполнитель) направлены вдоль оси  $0x_1$ .

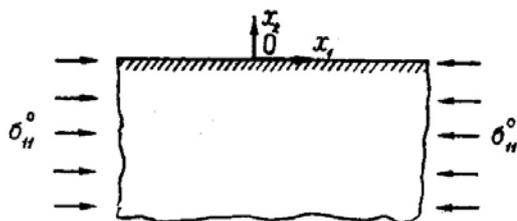


Рис. 1.23

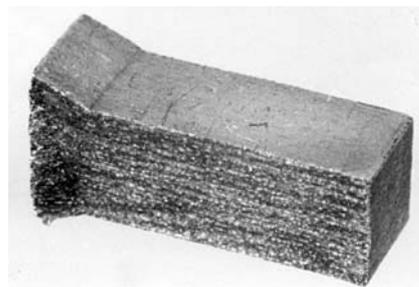


Рис. 1.24

Континуальная теория приповерхностного разрушения, относящаяся ко *второму* типу, достаточно подробно изложена в монографии [7, глава 7, §4, с. 568 – 589]. Для примера, на рис. 1.24 представлено экспериментальное подтверждение существования явления *смятия* торцов для образцов из однонаправленного бороалюминиевого композита; соответствующие результаты опубликованы в статье [13, рис. 1.24] соответствует рис. 4.30 монографии [8, т. 1, глава 4, с. 486].

Таким образом, на вышеуказанных страницах монографий [7, 8] достаточно подробно изложена континуальная теория приповерхностного разрушения, соответствующая приповерхностной потере устойчивости (возле свободной поверхности) при сжатии вдоль армирующих элементов (наполнителя), а также континуальная теория приповерхностного разрушения, соответствующая приповерхностной потере устойчивости нагруженного торца (явление смятия торцов). Результаты представлены для композитов с полимерной матрицей (хрупкое разрушение) и для композитов с металлической матрицей (пластическое разрушение). Дополнительно следует отметить, что в монографии [8, т. 1, глава 2, §2] также изложена двухуровневая континуальная мезомеханика разрушения композитов с трещинами возле отверстий при сжатии.

В заключение лишь отметим, что на указанных страницах монографий [7, 8] для композитов с полимерной и металлической матрицами *строго доказано* выполнение следующих условий:

$$\left(\Pi_3^-\right)_T^{CM} < \left(\Pi_3^-\right)_T; \left(\Pi_3^-\right)_T^{\Pi} < \left(\Pi_3^-\right)_T. \quad (1.11)$$

В (1.11) дополнительно к  $\left(\Pi_3^-\right)_T$  (теоретический предел прочности при одноосном сжатии в случае внутреннего разрушения) введены следующие обозначения:  $\left(\Pi_3^-\right)_T^{\Pi}$  – теоретический предел прочности при одноосном сжатии в случае *первого* типа разрушения;  $\left(\Pi_3^-\right)_T^{CM}$  – теоретический предел прочности при одноосном сжатии в случае *второго* типа разрушения (при смятии торцов). Условия (1.11) соответствуют обычно принятому положению – разрушение материала начинается с поверхности.

**Примечание 1.6.** Необходимо отметить, что в п. 1.2.3.2.1 применительно к внутреннему разрушению представлено достаточно хорошее совпадение пределов прочности при одноосном сжатии, полученных при экспериментальных исследованиях, с соответствующими теоретическими пределами прочности рассматриваемой континуальной теории разрушения как применительно к хрупкому разрушению (композиты с полимерной матрицей), так и применительно к пластическому разрушению (композиты с металлической матрицей). Отмеченное хорошее совпадение, *по-видимому, объясняется тем*, что в анализируемых примерах рассматривались композиты, в которых материалы наполнителя и матрицы *существенно отличаются по жесткости* (выполняются условия (1.6)); для других композитов, *по-видимому*, не следует ожидать такого хорошего совпадения. В целом же целесообразно отметить, что *рассматриваемая континуальная теория разрушения является наиболее негромоздкой* и удобной при исследованиях по сравнению с *любыми* теориями, построенными в рамках модели кусочно-однородной среды, как в *первом* направлении, так и во *втором* направлении; в то же время континуальная теория в ряде случаев дает результаты, соот-

ветствующие экспериментам. В историческом аспекте, по-видимому, первой публикацией по построению рассматриваемой континуальной теории разрушения была статья [3], опубликованная в 1969 г.

**1.2.3.3. Слоистые композиты. Модель кусочно-однородной среды.** В настоящем пункте (п. 1.2.3.3) в весьма краткой форме приведена информация о механике разрушения при сжатии слоистых композитов с полимерной и металлической матрицами, которая построена на основе модели кусочно-однородной среды. В этом случае отдельно для материалов каждого слоя наполнителя и связующего принимаются основные соотношения ТЛТУДТ [6, 43] и на границах раздела (interface) принимаются определенные условия непрерывности напряжений и перемещений. Исследования проводятся для хрупкого и пластического разрушения; в последнем случае предварительно принимается обобщенная концепция продолжающегося нагружения, изложенная в монографиях [6, 43]. В соответствии с основным подходом, изложенным в п. 1.2.3.1, в рассматриваемом случае исследований приходим к анализу статических уравнений и соответствующих граничных условий ТЛТУДТ [6, 43] для кусочно-однородной среды (задачи на собственные значения). Основные результаты получены для потери устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость, *внутреннее* разрушение), результаты для которой изложены в монографии [8, т. 1, глава 3], и для приповерхностной потери устойчивости (*приповерхностное* разрушение), результаты для которой изложены в монографии [8, т. 1, глава 5]. В списке литературы к монографии [8] представлены основные публикации по устойчивости слоистых композитных материалов в рамках второго направления (в соответствии с терминологией, указанной в заключительной части п. 1.2.1 и в п. 1.2.3.1 и также принятой в монографиях [7, 8]).

**1.2.3.3.1. Внутреннее разрушение.** При исследовании внутренней неустойчивости рассматривается слоистый композит, который занимает бесконечное пространство (рис. 1.19), применяются общие решения статических уравнений ТЛТУДТ [6, 43] и анализ проводится в соответствии с процедурой, изложенной в п. 1.2.1, с учетом подхода, соответствующего рис. 1.20. Необходимо отметить, что в настоящем пункте (п. 1.2.3.3.1) приводится информация только о результатах, полученных для композитов, в поверхностях раздела (interface) которых отсутствуют дефекты (на поверхностях раздела выполняются условия непрерывности напряжений и перемещений); информация о результатах для композитов с дефектами в поверхностях раздела представлена в п. 1.2.3.3.3).

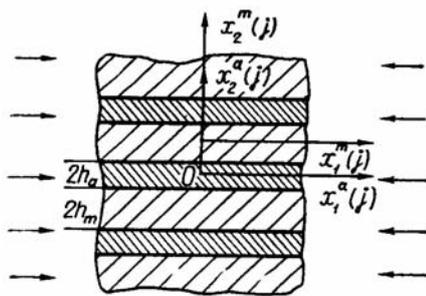


Рис. 1.25

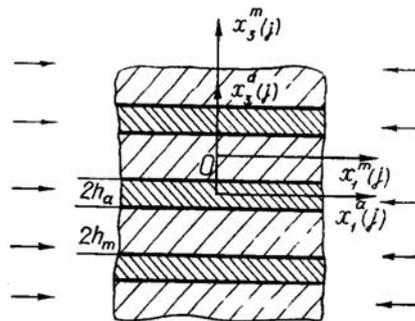


Рис. 1.26

Исследованы плоские и пространственные задачи для слоистых композитов с полимерной и металлической матрицами, состоящих из слоев наполнителя (одинаковой толщины) и слоев матрицы (одинаковой толщины), которые периодически чередуются вдоль оси  $0x_2$  (рис. 1.25) в случае плоских задач и вдоль оси  $0x_3$  (рис. 1.26) в случае пространственных задач; в случае пространственных задач рис. 1.26 соответствует плоскости в сечении  $x_2 = 0$ . На рис. 1.25 и 1.26, как и в обозначениях (1.5), индексом «a» отмечены все величины, относящиеся к армирующим элементам (наполнителю, слоям), и индексом «m» отмечены все величины, относящиеся к матрице (связующему, слоям). В случае плоских задач рассматриваются слои ортотропных материалов

(в частном случае – изотропных материалов), в случае пространственных задач рассматриваются слои трансверсально-изотропных материалов с плоскостью изотропии  $x_3 = \text{const}$  (рис. 1.26) (в частном случае – изотропные материалы); при этом характеристические определители во всех случаях получены для материалов с определяющими уравнениями достаточно общей структуры. Учитывая периодичность структуры вдоль вертикальной оси на рис. 1.25 и 1.26 с периодом  $2(h_a + h_m)$ , анализировались моды потери устойчивости с периодом вдоль вертикальной оси, кратным периоду структуры, т.е. с периодом  $T_k$ ,

$$T_k = 2k(h_a + h_m); k = 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

Были исследованы первые четыре моды, которые названы модами первого, второго, третьего и четвертого рода; указанные моды схематически показаны на рис. 1.27 – 1.30. Форма потери устойчивости первого рода имеет период, равный периоду структуры (в (1.12)  $k = 1$ ), и представлена на рис. 1.27; на рис. 1.21 (фиг. 3.22) эта мода соответствует сдвиговой моде.

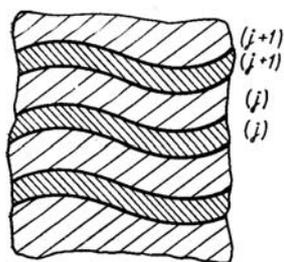


Рис. 1.27

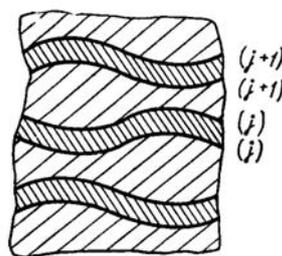


Рис. 1.28

Форма потери устойчивости второго рода имеет вдоль вертикальной оси период, равный удвоенному периоду структуры (в (1.12)  $k = 2$ ), и представлена на рис. 1.28; на рис. 1.21 (фиг. 3.22) эта мода соответствует моде растяжения.

Форма потери устойчивости третьего рода имеет вдоль вертикальной оси период, равный периоду структуры (в (1.12)  $k = 1$ ), и представлена на рис. 1.29.

Форма потери устойчивости четвертого рода имеет вдоль вертикальной оси период, равный удвоенному периоду структуры (в (1.12)  $k = 2$ ), и представлена на рис. 1.30.

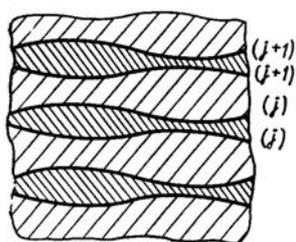


Рис. 1.29

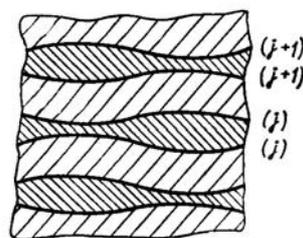


Рис. 1.30

Для слоистых композитов с полимерной и металлической матрицами в случае плоских и пространственных задач получены характеристические определители в замкнутой форме для материалов наполнителя и связующего с определяющими уравнениями достаточно общего вида; критические значения параметров нагружения получены в результате минимизации корней характеристических определителей, при этом корни определены с привлечением численных методов. При таком подходе получены многочисленные результаты для конкретных слоистых композитов с полимерной и металлической матрицами.

В качестве примера вышеотмеченных результатов для конкретных слоистых композитов ниже в весьма краткой форме приведем отдельные результаты для слоистого композита, составленного из изотропных слоев, когда материал каждого из слоев моделируется линейным упругим телом. Эти результаты подробно представлены в монографии [8, т. 1, стр. 297 – 299]; представленный здесь рис. 1.31 соответствует рис. 3.9 указанной монографии. На рис. 1.31 представлена зависимость параметра нагружения от параметра волнообразования  $\alpha_a$  (типа параметров (1.2)) для слоистого композита со следующими параметрами:  $E_a \cdot E_m^{-1} = 500$ ;  $h_m \cdot h_a^{-1} = 1; 5; 10; 20; 30; 40; 50$  применительно к плоской задаче, где обозначения соответствуют рис. 1.25. Цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 на рис. 1.31 отмечены кривые, соответствующие вышеуказанным значениям параметра  $h_m \cdot h_a^{-1}$ . Сплошными линиями на рис. 1.31 показаны результаты, относящиеся к изгибной моде (форме потери устойчивости первого рода, рис. 1.27); штрихпунктирными линиями на рис. 1.31 показаны результаты, относящиеся к моде растяжения (форме потери устойчивости второго рода, рис. 1.28).

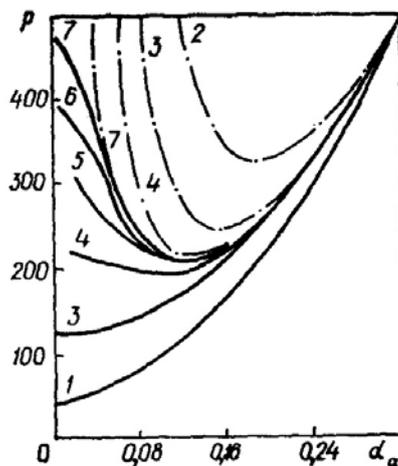


Рис. 1.31

Весьма кратко рассмотрим анализ результатов, представленных на рис. 1.31 применительно к изгибной моде (форме потери устойчивости первого рода, рис. 1.27), которые изображены сплошными линиями. Из рис. 1.31 следует, что сплошные кривые с цифрами 1 и 3 ( $h_m \cdot h_a^{-1} = 1$  и 10) являются кривыми типа B на рис. 1.20; таким образом, для рассматриваемого композита при компоновках слоев  $h_m \cdot h_a^{-1} = 1$  и 20 внутренняя потеря устойчивости (потеря устойчивости во внутренней структуре) не возникает по изгибной моде (форме потери устойчивости первого рода). Из рис. 1.31 следует, что сплошные кривые с цифрами 4, 5, 6 и 7 ( $h_m \cdot h_a^{-1} = 20, 30, 40$  и 50) являются кривыми типа A на рис. 1.20; таким образом, согласно походу п. 1.2.1 для рассматриваемого композита при компоновках слоев  $h_m \cdot h_a^{-1} = 20, 30, 40$  и 50 внутренняя потеря устойчивости (потеря устойчивости во внутренней структуре) возникает по изгибной моде (форме потери устойчивости первого рода). Таким образом, строго доказано существование следующего явления – в зависимости от структуры слоистого композита может возникнуть или не возникнуть потеря устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) по изгибной моде (форме потери устойчивости первого рода, рис. 1.27). Как уже отмечалось в п. 1.2.2.3 (качественное противоречие 1) приближенные теории, построенные в рамках первого направления, не описывают вышеизложенное явление.

Интересным также представляется следующий результат. В монографии [8, т. 1, глава 3] строго доказано, что континуальная теория разрушения, кратко рассмотренная в п. 1.2.3.2, следует в виде длинноволнового приближения (при стремлении длины волны формы потери устойчивости к бесконечности) из изгибной моды (формы потери устойчивости первого рода, рис. 1.27) теории в рамках модели кусочно-однородной среды (настоящий п. 1.2.3.3).

Дополнительную информацию о результатах по внутреннему разрушению слоистых композитов, обсуждаемых в настоящем п. 1.2.3.3.1, можно получить из монографии [8, т. 1, глава 3].

**1.2.3.3.2. Приповерхностное разрушение.** Рассмотрим в весьма краткой форме информацию о результатах по приповерхностному разрушению слоистых композитов, полученную в рамках модели кусочно-однородной среды; достаточно подробная информация по этому вопросу содержится в монографии [8, т. 1, глава 5].

При исследовании поверхностной неустойчивости рассматривается слоистый композит, занимающий нижнее полупространство  $\text{const} \geq x_2 > -\infty$  в случае плоских задач согласно рис. 1.25 и нижнее полупространство  $\text{const} \geq x_3 > -\infty$  в случае пространственных задач согласно рис. 1.26. Все обозначения и соображения, изложенные в начале п. 1.2.3.3.1 до выражения (1.12), остаются в силе и для приповерхностного разрушения (приповерхностной неустойчивости), анализируемой в настоящем п. 1.2.3.3.2. Конкретные результаты получены для слоистых композитов с полимерной и металлической матрицей (хрупкое и пластическое разрушение).

Для исследования плоских и пространственных задач о приповерхностном разрушении (приповерхностной потере устойчивости) разработаны два метода: первый метод, являющийся практически точным методом, основан на сведении рассматриваемых задач к бесконечным системам алгебраических уравнений с последующим их тщательным анализом; второй метод, являющийся сугубо приближенным методом, основан на применении вариационных принципов ТЛТУДТ [6, 43].

В дальнейшем в этой статье не будем приводить примеры анализа полученных результатов для конкретных слоистых композитов с полимерной и металлической матрицами применительно к приповерхностной неустойчивости. Ограничимся лишь информацией о качественно новом явлении, которое описано в монографии [8, т. 1, глава 5, с. 513] и заключается в следующем. Не при всех концентрациях наполнителя и не при всех относительных жесткостных параметрах наблюдается (существует) явление поверхностной неустойчивости. Так, при непрерывном увеличении внешней сжимающей нагрузки вначале может возникать внутренняя неустойчивость или критические нагрузки для внутренней и поверхностной неустойчивостей могут совпадать.

Вышеизложенной информацией ограничимся при весьма кратком обсуждении приповерхностного разрушения (приповерхностной неустойчивости) в слоистых композитах с полимерной и металлической матрицами, полученных в рамках модели кусочно-однородной среды. Достаточно подробное изложение результатов по рассматриваемой проблеме представлено в монографии [8, т. 1, глава 5].

### 1.2.3.3.3. Слоистые композиты с дефектами в границах раздела (interface).

С привлечением основных соотношений ТЛТУДТ [6, 43] в рамках модели кусочно-однородной среды исследованы задачи механики разрушения при сжатии слоистых композитов (задачи потери устойчивости во внутренней структуре композита) с дефектами в границах раздела (interface) применительно к двум типам дефектов.

Применительно к дефектам первого типа их наличие моделируется отсутствием трения или соответствующего соединения на всей поверхности раздела. В этом случае соблюдается лишь непрерывность нормальных напряжений и перемещений на границах раздела; также принимается, что касательные напряжения на границах раздела равны нулю. Для решения такого типа задач применяются общие решения статических уравнений ТЛТУДТ [6, 43] и характеристические определители строятся в явном замкнутом виде; для определения корней указанных характеристических уравнений применяются численные методы.

Применительно к дефектам второго типа их наличие моделируется трещинами в границах раздела; расчетная схема для такого типа задач, в виде примера, представлена на рис. 1.32, где в общем случае учитывается взаимодействие трещин (макро-трещин), расположенных в различных поверхностях раздела.

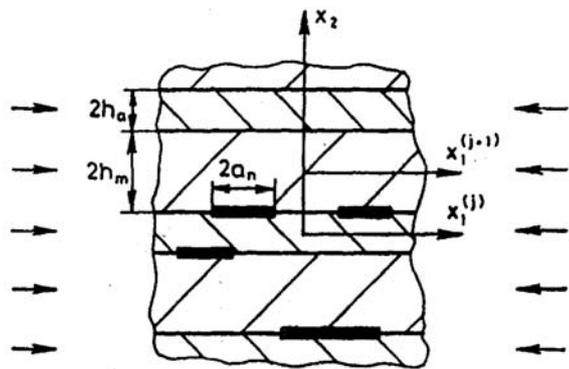


Рис. 1.32

Исследование задач для слоистых композитов с дефектами второго типа (рис. 1.32) в границах раздела проводится исключительно численными методами (метод конечных разностей, метод конечного элемента).

По-видимому, исключение представляет случай микротрещин, расположенных в одной поверхности раздела; заметим, что микротрещины определяются тем условием, что они не взаимодействуют с микротрещинами, расположенными в соседних параллельных плоскостях раздела. Для микротрещин, расположенных в одной поверхности раздела, получено *точное решение в замкнутом виде*; соответствующая расчетная схема представлена на рис. 1.33. Достаточно подробная информация о вышеотмеченном точном решении приведена в монографии [8, т. 2, глава 8, с. 168 – 199]. Построение точного решения основано на представлении общего решения через функции комплексных переменных, на введении комплексных переменных, в которые входят сопряженные напряжения, и на сведении к задаче сопряжения для двух голоморфных функций, заданных во всей плоскости.

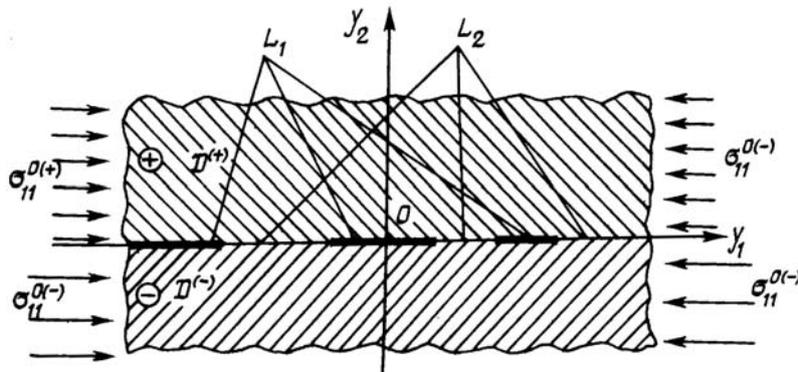


Рис. 1.33

Дополнительные сведения о результатах по механике разрушения при сжатии слоистых композитов, которые получены в рамках модели кусочно-однородной среды и которые весьма кратко рассмотрены в настоящем пункте (п. 1.2.3.3), можно получить из монографии [8, т. 1, главы 3 и 5; т. 2, глава 8, §2].

**1.2.3.4. Волокнистые однонаправленные композиты. Модель кусочно-однородной среды.** В настоящем пункте (п. 1.2.3.4) в весьма краткой форме приведена информация о механике разрушения при сжатии волокнистых однонаправленных композитов (рис. 1.18) с полимерной и металлической матрицами, которая построена на основе модели кусочно-однородной среды. В этом случае отдельно для каждого волокна и матрицы принимаются основные соотношения ТЛТУДТ [6, 43] и на границах раздела (interface) принимаются определенные (также в рамках ТЛТУДТ) условия непрерывности напряжений и перемещений. Исследования проводятся для хрупкого и пластического разрушения; в последнем случае предварительно принимается обобщенная концепция продолжающегося нагружения, изложенная в монографиях [6, 43]. В соответствии с основным подходом, изложенным в п. 1.2.3.1, в рассматриваемом случае исследований приходим к анализу статических уравнений и соответствующих граничных условий ТЛТУДТ [6, 43] для кусочно-однородной среды (задачи на собственные значения). Основные результаты получены для потери устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость, *внутреннее* разрушение), результаты для которой изложены в монографии [8, т. 1, глава 4], и для приповерхностной потери устойчивости (*приповерхностное* разрушение), результаты для которой изложены в монографии [8, т. 1, глава 6]. В списке литературы к монографии [8] представлены основные публикации по устойчивости волокнистых однонаправленных композитных материалов в рамках *второго* направления (в соответствии с терминологией, указанной в заключительной части п. 1.2.1 и в п. 1.2.3.1 и также принятой в монографиях [7, 8]).

**1.2.3.4.1. Внутреннее разрушение.** При исследовании внутренней неустойчивости рассматривается волокнистый однонаправленный композит, который занимает бесконечное пространство (рис. 1.18), применяются общие решения статических уравнений ТЛТУДТ [6, 43] и анализ проводится в соответствии с процедурой, изложенной в п. 1.2.1, с учетом подхода, соответствующего рис. 1.20. Отметим, что в настоящем пункте (п. 1.2.3.4.1) приводится информация только о результатах, полученных для композитов, в поверхностях раздела (interface) которых отсутствуют дефекты (на поверхностях раздела выполняются условия непрерывности напряжений и перемещений); информация о результатах для композитов с дефектами в поверхностях раздела представлена в п. 1.2.3.4.3. Как и в обозначениях (1.5), все величины с индексом « $a$ » относятся к армирующим элементам (наполнителю, однонаправленным волокнам) и все величины с индексом « $m$ » относятся к матрице (связующему).

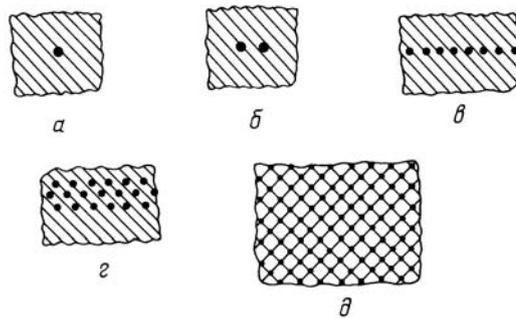


Рис. 1.34

Для волокнистых однонаправленных композитов при сжатии вдоль волокон (рис. 1.18) возникают различные задачи в зависимости от структуры композита в плоскости поперечного сечения и рассматриваемых расчетных схем. На рис. 1.34 (в плоскости поперечного сечения) показаны следующие расчетные схемы.

1. Одно волокно (рис. 1.34,  $a$ ) – для волокнистых композитов с малой концентрацией наполнителя, когда соседние волокна не взаимодействуют между собой.

2. Два волокна (рис. 1.34,  $b$ ) – для волокнистых композитов с малой концентрацией наполнителя, когда вследствие нерегулярности структуры при потере устойчивости могут взаимодействовать два соседних волокна.

3. Один периодический ряд волокон (рис. 1.34,  $в$ ) – для волокнистых композитов периодической структуры, когда при потере устойчивости волокна в пределах одного ряда взаимодействуют между собой, а соседние ряды волокон не взаимодействуют между собой (весьма малые расстояния между волокнами в одном ряду, весьма большие расстояния между соседними рядами).

4. Несколько периодических рядов волокон (рис. 1.34,  $г$ ) – для волокнистых композитов периодической структуры, когда при потере устойчивости волокна в пределах каждого ряда взаимодействуют между собой, ряды волокон в пределах группы рядов взаимодействуют между собой и различные группы рядов не взаимодействуют между собой.

5. Двокопериодическая структура волокон (рис. 1.34,  $д$ ) – для волокнистых композитов двокопериодической структуры при весьма малых расстояниях между соседними волокнами, когда при потере устойчивости необходимо учитывать взаимодействие в рамках модели двокопериодической структуры.

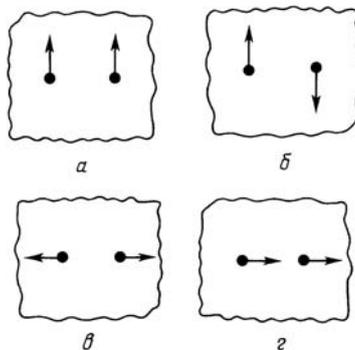


Рис. 1.35

Количество вариантов исследований для волокнистых однонаправленных композитов определяется не только количеством расчетных схем, приведенных на рис. 1.34 (всего 5 расчетных схем), но и тем, что для каждой расчетной схемы необходимо исследовать различные формы (или типы форм) потери устойчивости, определяемые свойствами симметрии в плоскости поперечного сечения. Безусловно, после проведения исследований по различным формам потери устойчивости необходимо проводить минимизацию полученных всех собственных чисел (обычно первых собственных чисел для каждого типа форм потери устойчивости) с целью определения критического значения укорочения вдоль оси волокон.

Для примера на рис. 1.35 показаны (в плоскости поперечного сечения) различные типы форм потери устойчивости для двух волокон (рис. 1.34, б). Так, рис. 1.35, а соответствует формам потери устойчивости в одной фазе из плоскости волокон; рис. 1.35, б соответствует формам потери устойчивости в противофазе из плоскости волокон; рис. 1.35, в соответствует формам потери устойчивости в противофазе в плоскости волокон; рис. 1.35, г соответствует формам потери устойчивости в одной фазе в плоскости волокон.

**Общий метод решения** вышесформулированных задач, который применялся при исследовании всех задач по механике внутреннего разрушения при осевом сжатии волокнистых однонаправленных композитов в рамках *второго* направления, включает следующие составные элементы. Применение для волокон и матрицы общих решений статических уравнений ТЛТУДТ [6, 43] в круговых цилиндрических координатах. Представление решения в виде суммы решений в локальных цилиндрических координатах в форме рядов Фурье с неопределенными коэффициентами, включающих специальные функции кругового цилиндра. Получение характеристических уравнений в виде бесконечных характеристических определителей с вычислением элементов в явном виде. Доказательство, что указанные бесконечные характеристические определители для несоприкасающихся волокон являются определителями нормального типа. Отмеченное доказательство обосновывает при приближенном определении корней замену бесконечных определителей конечными определителями, т.е. применять метод усечения. Обоснование практической сходимости указанного метода посредством сравнения значений корней, получающихся при увеличении порядка усеченных определителей.

Вышеуказанным методом получены многочисленные результаты по внутреннему разрушению при сжатии волокнистых однонаправленных композитов с полимерной и металлической матрицами; достаточно подробное и последовательное изложение этих результатов представлено в монографии [8, т. 1, глава 4]. По-видимому, отмеченные результаты являются в настоящее время *наиболее точными и строгими*; кроме того, *метод позволяет уточнять* полученные результаты для несоприкасающихся волокон.

Ниже в качестве примеров весьма кратко рассмотрим два результата из монографии [8, т. 1, глава 4].

**Пример 1.** Подавляющее число результатов в [8, т. 1, глава 4] получены при условии однородных докритических состояний при нагружении в виде рис. 1.18. Указанное условие выполняется точно в двух случаях: первый – материалы волокон и матрицы являются несжимаемыми; второй – материалы волокон и матрицы имеют одинаковые коэффициенты Пуассона ( $\nu_a = \nu_m$ ). Указанное условие не выполняется, когда коэффициенты Пуассона материалов волокна не равны ( $\nu_a \neq \nu_m$ ); в этом случае получаем неоднородное докритическое состояние. В связи с этим возникает вопрос о необходимости учитывать (в задачах устойчивости волокнистых однонаправленных композитов) неоднородность докритического состояния для случая  $\nu_a \neq \nu_m$ . В монографии [8, т. 1, глава 4, §1, с. 391 – 396] на примере одного волокна (расчетная схема рис. 1.34, а) исследован этот вопрос; при этом для неоднородного докритического состояния достаточно точные результаты получены численным методом. Так, на рис. 1.36 представлена зависимость величин  $\varepsilon_T \cdot 10$  ( $\varepsilon_T$  – теоретическое значение предельного укорочения) и  $\alpha_{кр} = \pi R / l_{кр}$  (критическое значение параметра волнообразования  $\alpha = \pi R / l$ ,  $R$  – радиус поперечного сечения волокна,  $l$  – длина полуволны (вдоль оси волокна) формы потери) от параметра  $\lg(E_a \cdot E_m^{-1})$ . Кривые для величины  $\alpha_{кр}$  отмечены цифрами 1, кривые для величины  $\varepsilon_T \cdot 10$  отмечены цифрами 2; сплошные кривые относятся к случаю  $\nu_a = 0,2$  и  $\nu_m = 0,4$  (докритическое состояние неоднородное), штриховые кривые относятся к случаю  $\nu_a = \nu_m = 0,2$  (докритическое состояние однородное) и штрихпунктирные кривые относятся к случаю  $\nu_a = \nu_m = 0,4$  (докритическое состояние однородное). Отметим, что на рис. 1.36 для величины  $\varepsilon_T \cdot 10$  сплошные и штрихпунктирные линии практически совпадают. Также отметим, что случай  $\nu_a = 0,2$  и

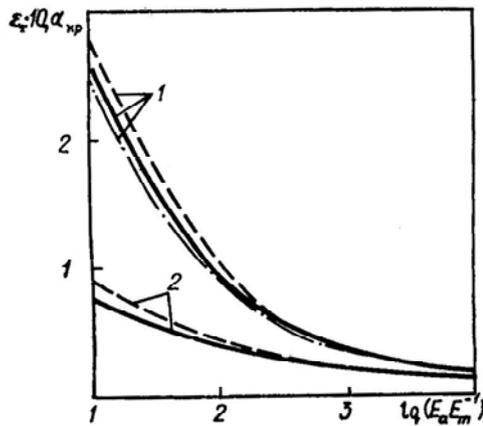


Рис. 1.36

$\nu_m = 0,4$  согласно табл. 0.1 и табл. 0.2 [8, т. 1, с. 67 и с. 68] соответствует наибольшему отличию в коэффициентах Пуассона для типичных наполнителей и связующих.

Из анализа результатов на рис. 1.36 и табл. 4.1 [8, т. 1, с. 395] сделан следующий вывод: при  $E_a \cdot E_m^{-1} \geq 20$ , выполняя исследования с точностью до 5%, можно не учитывать неоднородность докритического состояния, вызванную различием в значениях коэффициентов Пуассона для наполнителя и связующего, и проводить исследования при равных значениях коэффициента Пуассона  $\nu_a = \nu_m = 0,3$ .

**Пример 2.** Весьма кратко рассмотрим определение экспериментальных и теоретических пределов прочности для металлокомпозита (однонаправленный волокнистый бороалюминиевый композит с 50% содержанием волокон бора,  $S_a = S_m = 0,5$ ) ВКА-1 с волокнами бора диаметром 140 мкм; общий вид образцов из бороалюминия представлена на рис. 1.24. Обсуждаемые результаты опубликованы в статье [52] и представлены в монографии [8, т. 1, глава 4, с. 486 – 488]; заметим, что рассматривалось пластическое разрушение и для алюминиевой матрицы были использованы соотношения (1.9). Также отметим, что по существу рассматривались два металлокомпозита (отожженный и неотожженный); при экспериментальных исследованиях было разрушено 32 отоженных и 14 неотоженных образца, для которых были определены экспериментальные пределы прочности. Теоретические пределы прочности были определены в рамках континуальной теории разрушения (п. 1.2.3.2) и в рамках модели кусочно-однородной среды для волокнистых однонаправленных композитов (п. 1.2.3.4) при расчетной схеме композита двоякопериодической структуры (рис. 1.34, д). Вышеуказанные результаты представлены в табл. 1.1, которая соответствует табл. 4.10 [8, т. 1, глава 4, с. 487]. Из анализа результатов, представленных в табл. 1.1, следует, что континуальная теория разрушения дает результаты, весьма близкие к средним экспериментальным результатам, а механика разрушения в рамках модели кусочно-однородной среды дает результаты, весьма близкие к максимальным экспериментальным результатам.

Таблица 1.1

Материал	$(\bar{\sigma}_3)_{эк}$ , МПа			$(\bar{\sigma}_3)_T$ , МПа	
	2	min	Среднее	Континуальная теория	Модель кусочно-однородной среды
Отожженный	965	501	665	736	958
Неотожженный	1716	1049	1282	1467	1972

Дополнительную информацию о результатах по внутреннему разрушению волокнистых однонаправленных композитов, обсуждаемых в настоящем п. 1.2.3.4.1, можно получить из монографии [8, т. 1, глава 4].

**1.2.3.4.2. Приповерхностное разрушение.** Рассмотрим в весьма краткой форме информацию о результатах о приповерхностном разрушении волокнистых однонаправленных композитов, полученных в рамках модели кусочно-однородной среды; достаточно подробная информация по этому вопросу содержится в монографии [8, т. 1, глава 6].

При исследовании поверхностной неустойчивости рассматривается волокнистый однонаправленный композит (рис. 1.18), который занимает полупространство; при этом граничной поверхностью является плоскость, проходящая параллельно однонаправлен-

ным волокнам (рис. 1.18). В связи с вышеизложенным в плоскости поперечного сечения волокнистого однонаправленного композита (рис. 1.18) при исследовании поверхностной неустойчивости рассматривается полуплоскость (рис. 1.37) с различными структурами, соответствующими характерным расчетным схемам. На рис. 1.37 изображено 5 характерных расчетных схем, описание которых можно провести по аналогии с описанием предыдущего п. 1.2.3.4.1, где это описание приведено применительно к внутреннему разрушению. Отметим, что на рис. 1.37, как и на рис. 1.34 и 1.35, темными кружочками изображены поперечные сечения волокон. При исследовании поверхностной неустойчивости волокнистых однонаправленных композитов анализируются формы потери устойчивости, которые затухают при удалении от границы нижнего полупространства на рис. 1.37, что определяется дополнительным условием. При формировании структуры решения дополнительно к структуре решения предыдущего пункта 1.2.3.4.1 вводится дополнительное слагаемое в виде интегрального преобразования Фурье, обеспечивающее удовлетворение граничным условиям на плоской границе нижнего полупространства. С учетом вышеуказанной структуры представления решения в дальнейшем применялся метод решения, информация о котором представлена перед Примером 1 предыдущего п. 1.2.3.4.1.

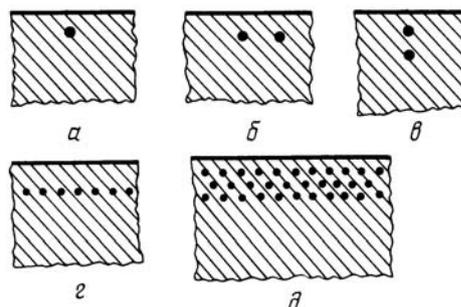


Рис. 1.37

Конкретные результаты получены о приповерхностном разрушении однонаправленных волокнистых композитов с полимерной и металлической матрицами. Достаточно подробное изложение результатов по рассматриваемой проблеме представлено в монографии [8, т. 1, глава 6].

**1.2.3.4.3. Волокнистые однонаправленные композиты с дефектами в границах раздела (interface).** В весьма краткой форме рассмотрим информацию о результатах по механике разрушения при сжатии волокнистых однонаправленных композитов с дефектами первого и второго типов в границах раздела (interface) применительно к внутреннему и приповерхностному разрушению. При анализе будем учитывать определение дефектов первого и второго типов, введенное в п. 1.2.3.3.3.

В случае дефектов *первого* типа результаты получены для одного волокна и представлены в соответствующих публикациях в периодических изданиях; эти результаты также представлены в монографии [8, т. 1]. Для внутреннего разрушения результаты получены в рамках расчетной схемы (рис. 1.34, а) и представлены в [8, т. 1, с. 415 – 417]. Для приповерхностного разрушения результаты получены в рамках расчетной схемы (рис. 1.37, а) и представлены в [8, т. 1, с. 561 – 563].

В случае дефектов *второго* типа (волокнистые однонаправленные композиты с трещинами в цилиндрических поверхностях раздела) результаты в законченном виде еще не опубликованы.

Дополнительные сведения о результатах по механике разрушения при сжатии волокнистых однонаправленных композитов, которые получены в рамках модели кусочно-однородной среды и которые весьма кратко рассмотрены в настоящем пункте (п. 1.2.3.4), можно получить из монографии [8, т. 1, главы 4 и 6].

**1.2.3.5. Более общие формы потери устойчивости. Модель кусочно-однородной среды.** В настоящем пункте (п. 1.2.3.5) рассмотрим общие сведения и конкретные результаты по анализу более общих форм потери устойчивости (во внутренней структуре слоистых и волокнистых однонаправленных композитов) по сравнению с формами потери устойчивости, которые исследованы в пп. 1.2.3.3 и 1.2.3.4.

**1.2.3.5.1. Общие сведения.** При исследовании устойчивости слоистых (п.1.2.3.3) и волокнистых однонаправленных (п. 1.2.3.4) композитов в рамках модели кусочно-однородной среды на основе ТЛТУДТ [6, 43] во всех анализируемых формах потери

устойчивости выделялся множитель  $\sin \pi l^{-1} x_3$ , где координата  $x_3$  отсчитывается вдоль волокон или вдоль слоев и  $l$  – длина полуволны формы потери устойчивости также вдоль волокон или вдоль слоев. Таким образом, в рамках модели «бесконечно длинных волокон» принималось, что каждый из армирующих элементов (волокна, слои) теряет устойчивость по одинаковой периодической форме потери устойчивости вдоль волокон и слоев. В определенном смысле подтверждением реализации вышеуказанных форм потери устойчивости являются результаты экспериментальных исследований для композитов с полимерной (эпоксидная смола) матрицей; результаты таких экспериментов представлены на рис. 1.2 – для композита со стеклянными волокнами и на рис. 1.3 – для композита с углеродными волокнами.

При рассматриваемых формах потери устойчивости *плоскости с одинаковой фазой* в форме потери устойчивости (вдоль координаты  $x_3$ , вдоль волокон или слоев) в композите *расположены перпендикулярно* оси  $Ox_3$  (перпендикулярно волокнам или слоям); в связи с этим, по-видимому, можно считать, что разрушение распространяется по указанным плоскостям. В определенном смысле подтверждением вышеуказанной процедуры относительно форм потери устойчивости является *строгое доказательство* (п. 1.2.3.2.1) в рамках континуальной теории разрушения (п. 1.2.3.2) того, что (при хрупком разрушении) разрушение распространяется по плоскостям, которые являются перпендикулярными направлению действия сжимающих нагрузок. Отметим, что в континуальной теории разрушения (п. 1.2.3.2) рассматривается сжатие вдоль направления преимущественного армирования (в данном случае – вдоль волокон и слоев). Все же приведенные рассуждения с привлечением результатов континуальной теории для обоснования одного из составляющих моментов теории в рамках модели кусочно-однородной среды являются недостаточно логичными и последовательными, поскольку континуальная теория разрушения является приближенной и менее строгой по сравнению с теорией на базе модели кусочно-однородной среды.

В связи с вышеизложенным представляется достаточно целесообразным разработка метода исследования в теории устойчивости слоистых и волокнистых однонаправленных композитов, позволяющего анализировать более общие формы потери устойчивости по сравнению с формами потери устойчивости, которые рассмотрены в пп. 1.2.3.3 и 1.2.3.4. Безусловно, наряду с разработкой метода исследования также весьма необходимыми является анализ конкретных классов задач для формирования общих выводов.

В статье [42] для волокнистых однонаправленных композитов (рис. 1.18) для случая наиболее сложной двоякопериодической структуры (рис. 1.34, д) и в статье [46] для слоистых композитов (рис. 1.19) предложен метод исследования для более общих форм потери устойчивости. Метод [42, 46] предназначен для исследований в рамках модели «бесконечно длинных волокон или слоев» (бесконечно длинных в направлении оси  $Ox_3$ , когда сжатие осуществляется также вдоль оси  $Ox_3$ ), когда формы потери устойчивости вдоль оси  $Ox_3$  также являются периодическими. Необходимо отметить, что в пп. 1.2.3.3 и 1.2.3.4 (для слоистых и волокнистых композитов) дополнительно принималось, что все армирующие элементы теряют устойчивость *в одной фазе* или что соседние армирующие элементы теряют устойчивость *в противофазе*. В методе статей [42, 46] вышеуказанное допущение пп. 1.2.3.3 и 1.2.3.4 *не принимается*; в этом заключается большая общность рассматриваемых в [42, 46] форм потери устойчивости.

Для более четкой характеристики форм потери устойчивости, рассматриваемых в [42, 46] и являющихся периодическими вдоль оси  $Ox_3$ , введено понятие о плоскости  $\Pi$ , которая состоит из точек композита, имеющих одинаковую фазу вдоль оси  $Ox_3$  в форме потери устойчивости. В первом октанте плоскость  $\Pi$  на рис. 1.38 заштрихована и определяется ортом  $\mathbf{n}$  с составляющими

$$n_1, n_2, n_3; n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \quad (1.13)$$

В [42, 46] в явном виде построены решения системы статических уравнений ТЛТУДТ [6, 43], которые соответствуют произвольному положению плоскости  $\Pi$  (рис. 1.38), определяемому ортом  $\mathbf{n}$ ; эти решения построены для волокнистых однонаправленных композитов в случае наиболее сложной двоякопериодической структуры (рис. 1.34,  $d$ ), которые, безусловно, позволяют осуществить переход к более простым структурам (рис. 1.34,  $a - z$ ), а также решения построены для слоистых композитов (рис. 1.19, 1.25 и 1.26). В [42] для волокнистых однонаправленных композитов отмечено, что для произвольного положения плоскости  $\Pi$  получаем характеристическое уравнение в виде бесконечного определителя; при этом доказывается, что бесконечный определитель является определителем нормального типа для неосприкасающихся волокон, что обосновывает возможность определения корней методом усечения определителя при численном исследовании, практическая же сходимость достигается путем сравнения результатов при увеличении порядка усеченного определителя. В [46] для слоистого композита отмечено, что получаем конечного порядка характеристический определитель, элементы которого представляются в замкнутом виде.

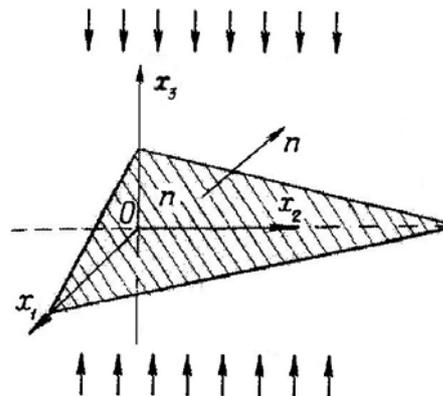


Рис. 1.38

Необходимо отметить, что из методов [42, 46] следуют методы пп. 1.2.3.3 и 1.2.3.4, если в (1.13) принять

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 1; \quad (1.14)$$

в этом случае плоскость  $\Pi$  направлена перпендикулярно оси  $0x_3$  (перпендикулярно сжимающей нагрузке).

После вычисления корней характеристических определителей, построенных согласно [42, 46], необходимо провести минимизацию этих корней (с целью определения критических значений) по параметрам:  $l$  – длина полуволны вдоль оси  $0x_3$  в форме потери устойчивости;  $n_1, n_2$  и  $n_3$  – параметры, определяющие положение плоскости  $\Pi$ . При практическом проведении указанной минимизации можно вначале определить  $l_{кр}$  при значениях (1.14), потом можно провести анализ изменения интересующих величин  $((\Pi_3)_T, \varepsilon_T)$  при  $l = l_{кр}$  и различных значениях параметров  $n_1, n_2$  и  $n_3$  (1.13).

**1.2.3.5.2. Результаты для волокнистого однонаправленного композита.** В настоящее время в статьях [55, 56, 58] опубликованы конкретные результаты для волокнистого однонаправленного композита применительно к расчетной схеме на рис. 2.34,  $b$  (один бесконечный периодический ряд волокон); при произвольном положении плоскости  $\Pi$  расчетная схема для этого случая представлена на рис. 1.39.

В нижней части рис. 1.39 представлено поперечное сечение композита с одним периодическим рядом волокон. Верхняя часть рис. 1.39 соответствует плоскости, которая проходит через оси волокон бесконечного периодического ряда волокон; в силу симметрии задачи относительно этой плоскости можно рассматривать все изображения и обозначения применительно к этой плоскости. Таким образом, на рис. 1.39 введены обозначения:  $R$  – радиус волокна;  $\delta$  – расстояние между осями двух соседних волокон;  $d$  – сдвиг по фазе вдоль волокон в форме потери устойчивости;  $l$  – длина полуволны вдоль оси волокон в форме потери устойчивости. Заметим, что при  $d = 0$  на рис. 1.39 получен случай (1.14), когда плоскость  $\Pi$  перпендикулярна волокнам, что принимается в исследованиях п. 1.2.3.4.

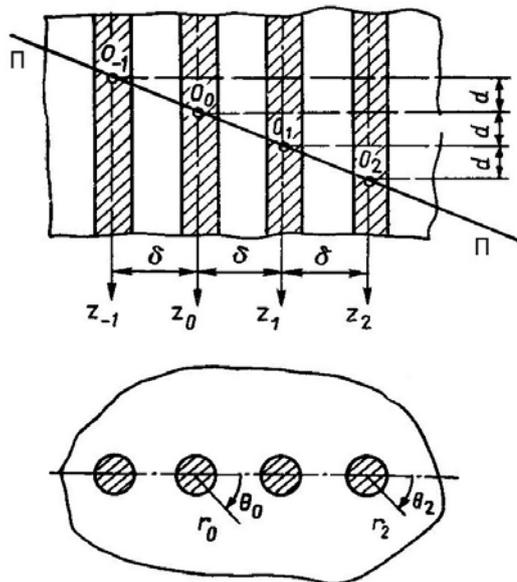
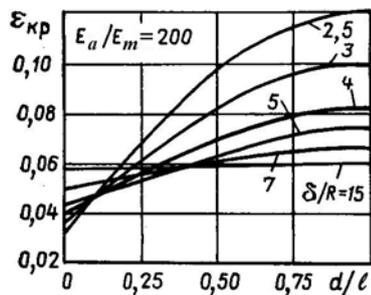
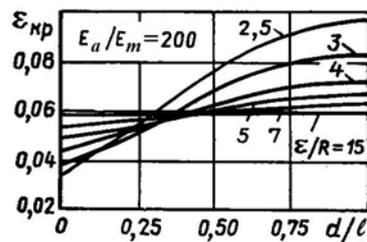


Рис. 1.39

метра  $\delta \cdot R^{-1}$ , при  $E_a \cdot E_m^{-1} = 200$ . При этом рис. 1.40, а относится к потере устойчивости в плоскости волокон типа рис. 1.35, в и г; рис. 1.40, б относится к потере устойчивости из плоскости волокон типа рис. 1.35, а и б.



а



б

Рис. 1.40

При минимизации величины  $\varepsilon_{кр}$  на рис. 1.40 по параметру  $d \cdot l^{-1}$  для случаев потери устойчивости в плоскости волокон (рис. 1.40, а) и потери устойчивости из плоскости волокон (рис. 1.40, б) для  $\varepsilon_T$  — теоретического значения предельного укорочения получаем

$$\varepsilon_T = \varepsilon_{кр} \quad \text{при} \quad d \cdot l^{-1} = 0. \quad (1.16)$$

Таким образом, из рассмотренного примера следует, что плоскость  $\Pi$  (рис. 1.38) направлена перпендикулярно волокнам, что и принималось в исследованиях п. 1.2.3.4, т.е. подтверждается общность метода решения, который принят в пп. 1.2.3.3 и 1.2.3.4. Необходимо отметить, что вышеизложенное доказательство получено при анализе лишь одного примера; в связи с этим вышеизложенный вывод целесообразно проверить при рассмотрении других задач для волокнистых однонаправленных и слоистых композитов применительно к внутреннему и приповерхностному разрушению.

В статье [58] также приведены конкретные результаты при моделировании свойств волокон и матрицы линейно-упругими телами при  $\nu_a = \nu_m$  и также отмечено, что исследования проводились при следующих значениях других параметров:

$$\begin{aligned} E_a \cdot E_m^{-1} &= 50; 100; 200; 500; 1000; \\ \delta \cdot R^{-1} &= 2,5; 3; 4; 5; 7; 15; \\ d \cdot l^{-1} &= 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1. \end{aligned} \quad (1.15)$$

На рис. 1.40 приведена зависимость величины  $\varepsilon_{кр}$  (критическое значение укорочения вдоль волокон для рассматриваемой формы потери устойчивости) от  $d \cdot l^{-1}$  (относительного отклонения плоскости  $\Pi$  от перпендикулярной к волокнам плоскости) для различных расстояний между осями соседних волокон, определяемых значениями пара-

С целью иллюстрации влияния изменения относительной жесткости волокон и матрицы рассматриваемого волокнистого однонаправленного композита (при  $\nu_a = \nu_m$ ) на величину  $\varepsilon_{кр}$  (критического значения укорочения применительно к анализируемой форме потери устойчивости) на рис. 1.41 приведена зависимость  $\varepsilon_{кр} = \varepsilon_{кр}(E_a \cdot E_m^{-1})$ , полученная в [58] для случая  $d \cdot l^{-1} = 0,5$  и различных значений параметра  $\delta \cdot R^{-1}$  при обозначениях рис. 1.39.

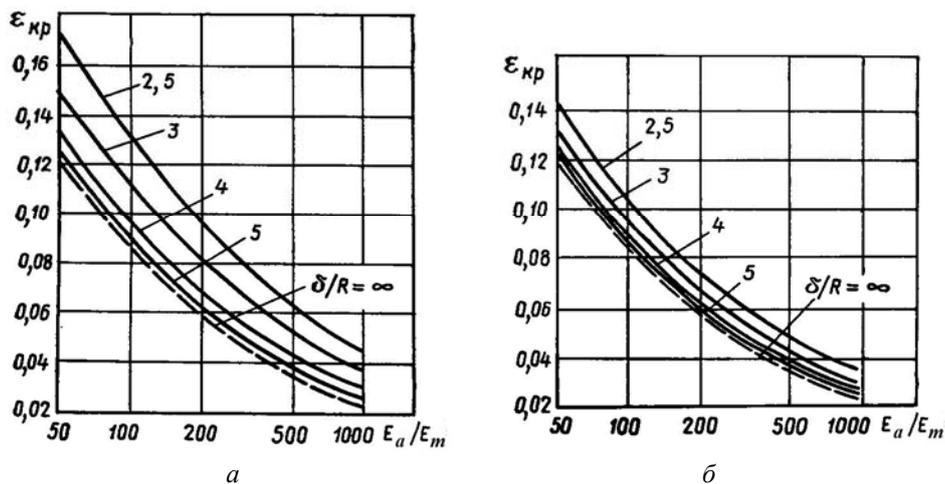


Рис. 1.41

При этом рис. 1.41, *a* относится к потере устойчивости в плоскости волокон типа рис. 1.35, *в, г* и рис. 1.41, *б* относится к потере устойчивости из плоскости волокон типа рис. 1.35, *а, б*; также на рис. 1.41 сплошные кривые соответствуют значениям параметра  $\delta \cdot R^{-1} = 2,5; 3; 4; 5$  и штриховая кривая относится к случаю  $\delta \cdot R^{-1} = \infty$  (одно волокно, расчетная схема на рис. 1.34, *a*), а на оси  $E_a \cdot E_m^{-1}$  принята логарифмическая шкала. Из результатов, представленных на рис. 1.41, *a, б* следует, что влияние параметра  $E_a \cdot E_m^{-1}$  на величину  $\varepsilon_{кр}$  достаточно существенное.

Необходимо отметить, что метод, предложенный в [42] и предназначенный для исследования внутренней неустойчивости волокнистых однонаправленных композитов, приводит к определению корней бесконечных определителей. В [42] отмечено, что получаемые бесконечные определители являются определителями нормального типа (для несоприкасающихся волокон); отмеченное доказательство обосновывает применения метода усечения при численном определении корней бесконечных определителей. В связи с этим для доказательства практической сходимости рассматриваемого метода обычно приводят информацию об изменении значений корней при увеличении порядка характеристических определителей, которые получаются из бесконечных характеристических определителей при применении метода усечения.

В [58] приведена соответствующая информация применительно к случаю одного бесконечного периодического ряда волокон, расчетная схема для которого показана на рис. 1.39; числовые результаты при этом получены при принятом в п. 1.2.3.5.2 моделировании свойств материалов волокон и матрицы для случая  $\nu_a = \nu_m$ . В табл. 1.2, следуя [58], приведены значения  $\varepsilon_{кр} \cdot 10^4$  ( $\varepsilon_{кр}$  – критическое значение укорочения вдоль волокон для рассматриваемой формы потери устойчивости) при  $d \cdot l^{-1} = 0,5$  (величина  $d$  указана на рис. 1.39,  $l$  – длина полуволны вдоль волокон в форме потери устойчивости) для различных значений параметров  $\delta \cdot R^{-1}$  и  $E_a \cdot E_m^{-1}$ . Значения

величины  $\varepsilon_{кр} \cdot 10^4$ , приведенные в табл. 1.2, вычислены при различном числе уравнений, также указанных в табл. 1.2; заметим, что число уравнений соответствует порядку усеченного характеристического определителя.

Таблица 1.2

$E_a / E_m$	В плоскости волокон			Из плоскости волокон		
	к-во уравнений	$\delta / R$		к-во уравнений	$\delta / R$	
		2,5	4		2,5	4
50	22	1740	1346	20	1450	1275
	34	1750	1346	32	1452	1275
200	10	820	671	8	718	624
	22	972	693	20	756	628
	34	981	694	32	757	627
1000	10	377	300	8	328	273
	22	465	315	20	347	274
	34	469	315	32	348	274

Из анализа результатов, представленных в табл. 1.2, следует, что для рассматриваемых значений жесткостных и геометрических параметров с достаточной степенью точности можно ограничиться исследованием определителя 22-го порядка для случая потери устойчивости в плоскости волокон и определителя 20-го порядка для потери устойчивости из плоскости волокон, так как исследование, соответственно, определителей 34-го и 32-го порядков приводит к уточнениям в третьей цифре. Следует отметить, что случай  $\delta \cdot R^{-1} = 2,5$ , рассмотренный в табл. 1.2, соответствует весьма близко расположенным волокнам; в этом случае перемычка между волокнами (матрица) составляет полрадиуса волокна.

В заключение целесообразно отметить, что в настоящем пункте (п. 1.2.3.5) проведен сравнительно более подробный анализ результатов по сравнению, например, с пп. 1.2.3.3 и 1.2.3.4; отмеченная ситуация связана с тем, что результаты настоящего пункта не были включены в монографию [8].

#### 1.2.4. Анализ теоретических результатов. Об исследовании явления «kinking».

В настоящем пункте в весьма краткой форме приведем информацию об исследовании явления «kinking», которое является одной из достаточно популярных концепций, особенно среди англоязычных исследователей; при этом будем следовать изложению этого вопроса, рассмотренного в монографии [8, т. 1, с. 72 – 74].

Первоначально явление «kinking» рассматривалось в статье [31], опубликованной в 1983 г., и в ряде других публикаций. В настоящее время уже опубликован ряд обзоров по исследованию явления «kinking», например, [32, 33, 40]; причем [40] опубликовано в 1997 г. в широко известной серии изданий (*Advances in Applied Mechanics*, vol. 33, pp. 43 – 119), которая издается в США. Кроме того, обзор [33] опубликован в 1994 г. в специализированном журнале (*Applied Mechanics Reviews*), который издается в США. Следует отметить, что обзор результатов, частично изложенных в пп. 1.2.3.3 и 1.2.3.4, также опубликован в специальном выпуске журнала (*Applied Mechanics Reviews*) [65] в 1992 г.

Явление «kinking» заключается в появлении (при сжатии композита вдоль армирующих элементов) достаточно узких полос «kinking» (kink band) уже разрушенного материала; схематически явление «kinking» показано на рис. 1.42, который соответствует Fig. 2 на стр. S247 статьи [33], где через  $W$  обозначена ширина зоны «kinking».

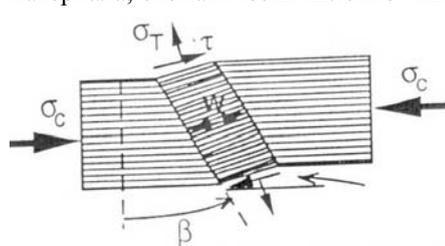


Рис. 1.42

При проведении исследований зона «kinking» анализируется на основе весьма приближенных соотношений.

Прежде всего, целесообразно отметить, что схема разрушения, представленная на рис. 1.42, относится к уже разрушенному образцу; при этом начало (старт) процесса разрушения не определяется, в этом случае нельзя исклю-

чить, что начало (старт) процесса разрушения также определяется потерей устойчивости во внутренней структуре композита. Также следует отметить, что для явления «kinking» при сжатии вдоль горизонтальной оси (рис. 1.42) характерным является смещение вдоль вертикальной оси частей материала слева и справа от полосы «kinking» (рис. 1.42); отмеченная ситуация, по-видимому, также является характерной для явления «kinking».

В статье [47] и в монографии [8, т. 1, с. 73 – 74] рассмотрен ряд соображений, относящихся к возможности возникновения явления «kinking»; ниже рассмотрим некоторые из указанных соображений, следуя, в основном, монографии [8].

1. Явление «kinking» в образцах (рис. 1.42) может возникать, если при сжатии вдоль горизонтальной оси граничные условия для образца позволяют возникать смещениям вдоль вертикальной оси.

2. При внутреннем разрушении (для «бесконечного» материала) явление «kinking» не может, по-видимому, возникнуть в виде отдельной изолированной полосы «kinking» (в виде отдельной изолированной kink band) при сжатии вдоль осей симметрии свойств материала (в континуальном приближении). Внутри композита при сжатии вдоль осей симметрии свойств материала явление «kinking» может существовать лишь в виде чередующихся полос «kinking», чтобы возникающее при этом возмущение напряженно-деформированного состояния было сбалансированным.

3. Исследование явления «kinking» не может, по-видимому, однозначно установить механизмы, определяющие начало (старт) процесса разрушения. Одним из механизмов, определяющих начало (старт) процесса разрушения, может быть в этом случае и механизм потери устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) композита, который может быть исследован в рамках ТЛТУДТ [6, 43].

Как уже отмечалось в [8, т. 1, стр. 73], вышеизложенные соображения лишь отражают точку зрения авторов [8, 47]; в связи с этим возможны и другие соображения, отражающие точки зрения других авторов.

В определенном смысле подтверждением второго из вышепредложенных соображений являются результаты экспериментальных исследований, которые опубликованы в статье [74] и представленные на рис. 1.14. Обсуждение экспериментальных результатов [74] проведено в п. 1.1.2 возле рис. 1.14.

Вышеизложенными весьма краткими сведениями ограничимся при рассмотрении явления «kinking» и его исследований.

**1.3. Заключение к Разделу 1.** Таким образом, в Разделе 1 приведен краткий исторический очерк развития экспериментальных и теоретических исследований по потере устойчивости во внутренней структуре композитных материалов при сжатии и по последующему процессу разрушения; при этом теоретические исследования рассмотрены только применительно к модели «бесконечно длинных волокон». Целесообразно отметить следующие основные моменты, относящиеся к Разделу 1.

1. Приведенные результаты экспериментальных исследований доказывают возможность возникновения явления потери устойчивости во внутренней структуре композитов как применительно к композитам с достаточно длинными армирующими элементами, для исследования которых применяется модель «бесконечно длинных волокон», так и применительно к композитам со сравнительно короткими армирующими элементами, для исследования которых применяется модель «волокон конечных размеров».

2. Представленный краткий анализ теоретических исследований проведен только для результатов, полученных в рамках модели «бесконечно длинных волокон». При этом указанный анализ проведен как для результатов, полученных с привлечением различных приближенных допущений, так и для результатов, полученных с привлечением трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел (сокращенно – ТЛТУДТ, изложенной, например, в монографиях [6, 43]).

3. Изложение краткого исторического очерка в Разделе 1 реализовано без привлечения математического аппарата, который применяется для исследования конкретных классов задач рассматриваемой проблемы. Такой стиль изложения предоставляет возможность достаточно широким кругам исследователей познакомиться с различными аспектами рассматриваемой проблемы.

Вышеизложенными соображениями, по мнению авторов настоящей обзорной статьи, можно завершить краткий исторический очерк и соответствующий анализ.

## **2. Модель «волокон конечных размеров» в трехмерной теории устойчивости композитов. Анализ подходов и результатов.**

Рассматриваются результаты по теории устойчивости во внутренней структуре (внутренняя неустойчивость) композитов и по теории приповерхностной неустойчивости композитов при сжатии вдоль армирующих элементов; указанные результаты получены в рамках модели «волокон конечных размеров» с привлечением основных соотношений ТЛТУДТ [6, 43]. Исследования проведены в рамках модели плоской задачи (плоская деформация); в связи с этим при строгом рассмотрении обсуждаемые результаты относятся к устойчивости бесконечно длинных полос (бесконечных в направлении перпендикуляра к рассматриваемой плоскости) конечной ширины, т.е. к слоистым композитам с наполнителем ленточной структуры. В силу применения модели «волокон конечных размеров» в задачах Раздела 2 (в отличие от задач Раздела 1 п. 1.2) возникает *неоднородное* докритическое состояние, в связи с чем исследование задач Раздела 2 возможно *исключительно* с привлечением численных методов.

В соответствии с **Основным допущением** приближенного подхода [26, 67], сформулированным в начале п. 1.2.2.2, волокнистый однонаправленный композит в задачах устойчивости моделируется плоской задачей (плоская деформация) для слоистого композита; в связи с этим для результатов, полученных при указанном моделировании, применяется терминология, соответствующая теории устойчивости волокнистого однонаправленного композита. Такие результаты (при вышеуказанных моделировании и терминологии) включены в общеизвестные многотомные монографии фундаментального характера по разрушению [25] и по композитным материалам [19] и повсеместно цитируются в последующих публикациях без каких-либо комментариев; более подробно обсуждаемая ситуация рассмотрена в п. 1.2.2.2 настоящей обзорной статьи.

Вышеотмеченные моделирование и терминология будут применяться при изложении результатов в Разделе 2. Следует отметить, что обсуждаемые моделирование и терминология применяются только при интерпретации полученных результатов; сами же результаты определены с привлечением модели кусочно-однородной среды и основных соотношений ТЛТУДТ [6, 43] применительно к композитам, исследование устойчивости которых во внутренней структуре осуществляется в рамках модели «волокон конечных размеров».

### **2.1. Основные положения модели «волокон конечных размеров».**

В настоящем пункте в весьма краткой форме излагаются основные положения теории устойчивости, которая позволяют адекватно описывать явление потери устойчивости композитных материалов, армированных волокнами конечных размеров в направлении армирования при сжатии; представлены основные уравнения и соотношения трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел при малых начальных деформациях, подходы к выбору моделей для описания механических свойств композитов, математической постановке соответствующих дифференциальных задач, формулированию критериев потери устойчивости в структуре композита.

Основные положения теории устойчивости волокон конечных размеров в матрице, которые определяют постановку задач, а также пределы ее применимости, можно сформулировать следующим образом.

1. Материалы волокон и матрицы моделируются линейно-упругими изотропными телами; такое моделирование можно считать приемлемым при сравнительно краткосрочном действии внешнего нагружения при умеренных температурах.

2. Применяется второй вариант теории малых докритических деформаций трехмерной линеаризованной теории устойчивости, когда начальное состояние определяется по геометрически линейной теории; такой подход считается приемлемым для сравнительно жестких волокнистых композитных материалов, которые преимущественно разрушаются при сравнительно малых деформациях.

3. Рассматривается нагружение внешними «мертвыми» нагрузками, в связи с этим выполняются достаточные условия применимости статического метода ТЛТУДТ; все исследования выполняются с применением статического метода.

4. На границах раздела наполнителя и матрицы принимаются условия полного контакта непрерывности векторов напряжений и перемещений как при определении докритического состояния, так и при исследовании задач устойчивости.

5. В случае конечного числа волокон принимаются условия затухания «на бесконечности»; для периодической системы волокон дополнительно принимаются соответствующие условия периодичности.

6. Все исследования выполняются в рамках плоской деформации: рассматривается продольное сечение волокнистых материалов, проходящее через ось волокон, которые лежат в одной плоскости.

**2.1.1. Постановка задач.** Таким образом, исследование выполняется в рамках плоской деформации в плоскости  $x_1 0x_2$  с применением основных соотношений ТЛТУДТ для малых докритических деформаций, а также модели упругого изотропного тела для армирующих элементов и матрицы. Исследование проводится в лагранжевых координатах, которые в недеформированном состоянии совпадают с декартовыми координатами. На рис. 2.1 приведена расчетная схема для простейшего случая, когда волокна не взаимодействуют через матрицу между собой как в докритическом состоянии, так и при потере устойчивости; указанная ситуация возникает в случае композитных материалов с достаточно малой концентрацией наполнителя.

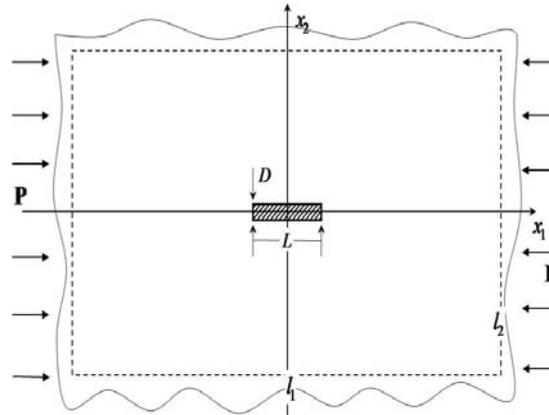


Рис. 2.1

Рассматривается продольное сечение волокнистых материалов, которое проходит через ось волокон, лежащих в одной плоскости; таким образом, фактически, проводится замена пространственной задачи (для цилиндрических волокон конечных размеров) плоской задачей (для слоев конечных размеров). Отмеченная процедура, как уже отмечалось выше, соответствует **Основному допущению** приближенного подхода [26, 67], которое сформулировано в начале п.1.2.2.2. Эту процедуру можно считать лишь приближенным приемом при интерпретации полученных результатов, так как никакие критерии рассматриваемого моделирования или подобия не применялись и не анализировались уже в течении полувека (статья [67] на английском языке опубликована в 1965г.); при этом результаты [26, 67] включены в общеизвестные монографии энциклопедического характера по композитным материалам и разрушению.

Исследование докритического состояния выполняется в рамках классической линейной теории упругости изотропного тела, уравнения равновесия и соотношения упругости которой можно представить в следующем виде (при этом индексом «нуль» обозначаются величины, относящиеся к начальному (докритическому) состоянию, индексами «a» и «m» – величины, относящиеся к материалу волокна и матрицы, соответственно):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij}^0 = 0; \quad \sigma_{ij}^0 = \delta_{ij} \lambda \varepsilon_{mm}^0 + 2\mu \varepsilon_{ij}^0; \quad 2\varepsilon_{ij}^0 = \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i}. \quad (2.1)$$

Поскольку для матрицы исследование проводится для бесконечной области, напряжения и перемещения в матрице удобно представить в виде суммы компонентов напряжений и перемещений, соответствующих внешней нагрузке, заданной для матрицы «на бесконечности», и компонентов, соответствующих возмущениям напряженно-деформированного состояния, обусловленными наличием волокна конечных размеров

$$\sigma_{ij}^{0m} = \sigma_{ij}^{\infty} + \sigma_{ij}^{10m}; \quad u_j^{0m} = u_j^{\infty} + u_j^{10m}, \quad (2.2)$$

где величины определяются следующими выражениями:

$$\sigma_{11}^{\infty} = -P; \quad \sigma_{22}^{\infty} = 0; \quad \sigma_{12}^{\infty} = 0; \quad u_1^{\infty} = A_1 x_1; \quad u_2^{\infty} = A_2 x_2. \quad (2.3)$$

Определение докритического состояния проводится с использованием указанных величин и основных соотношений, которые включают следующие условия непрерывности векторов напряжений и перемещений на границах раздела компонентов композита:

$$\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{11}^{10m} = \sigma_{11}^{0a}; \quad \sigma_{12}^{10m} = \sigma_{12}^{0a}; \quad u_j^{\infty} + u_j^{10m} = u_j^{0a}; \quad x_1 = \pm L/2; \quad |x_2| \leq \pm D/2; \quad (2.4)$$

$$\sigma_{22}^{10m} = \sigma_{22}^{0a}; \quad \sigma_{12}^{10m} = \sigma_{12}^{0a}; \quad u_j^{\infty} + u_j^{10m} = u_j^{0a}; \quad |x_1| \leq \pm L/2; \quad x_2 = \pm D/2, \quad (2.5)$$

а также условия затухания «на бесконечности»

$$\sigma_{ij}^{10m} \rightarrow 0; \quad u_j^{10m} \rightarrow 0; \quad \text{при} \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Исследование задачи устойчивости выполняется с применением статического метода ТЛТУДТ в рамках второго варианта теории малых докритических деформаций при моделировании наполнителя и матрицы линейно-упругим изотропным телом, что согласовано с постановкой задачи определения докритического напряженно-деформированного состояния. Таким образом, уравнения устойчивости и составляющие несимметричного тензора напряжений можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \omega_{ij\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} u_\alpha \right) = 0; \quad t_{ij} = \omega_{ij\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} u_\alpha; \quad i, j, \alpha, \beta = 1, 2; \quad (2.7)$$

для компонентов тензора  $\omega$  используются следующие выражения:

$$\omega_{ij\alpha\beta} = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \lambda + (\delta_{i\beta} \delta_{\alpha j} + \delta_{i\alpha} \delta_{\beta j}) \mu + \delta_{\alpha j} \sigma_{i\beta}^0; \quad \sigma_{i\beta}^0 = \delta_{i\beta} \sigma_{\beta\beta}^0, \quad (2.8)$$

где введены общеизвестные обозначения:  $\lambda$  и  $\mu$  – постоянные Ляме.

При исследовании задачи устойчивости основные соотношения (2.7) следует применять отдельно для матрицы, записав их относительно величин  $\sigma_{ij}^{1m}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{1m}$  и  $u_j^{1m}$ , а также  $\omega_{ij\alpha\beta}^{1m}$ ,  $\lambda_m$  и  $\mu_m$ . Также соотношения (2.7) следует отдельно применять к волокну, записав их относительно величин  $\sigma_{ij}^a$ ,  $\varepsilon_{ij}^a$  и  $u_j^a$ , а также  $\omega_{ij\alpha\beta}^a$ ,  $\lambda_a$  и  $\mu_a$ . Таким образом, в соответствии с (2.2), (2.3), (2.8) имеют место следующие выражения для матрицы и волокна, соответственно:

$$\omega_{ij\alpha\beta}^{1m} = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \lambda_m + (\delta_{i\beta} \delta_{\alpha j} + \delta_{i\alpha} \delta_{\beta j}) \mu_m + \delta_{\alpha j} \sigma_{i\beta}^{0m}; \quad \sigma_{i\beta}^{0m} = -\delta_{i\beta} \delta_{\beta 1} P + \sigma_{i\beta}^{10m}; \quad (2.9)$$

$$\omega_{ij\alpha\beta}^a = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \lambda_a + (\delta_{i\beta} \delta_{\alpha j} + \delta_{i\alpha} \delta_{\beta j}) \mu_a + \delta_{\alpha j} \sigma_{i\beta}^{0a}. \quad (2.10)$$

Полная формулировка задачи устойчивости также включает условия непрерывности векторов напряжений и перемещений на границах раздела, которые для описанной расчетной схемы можно представить в следующем виде:

$$t_{11}^{1m} = t_{11}^a; \quad t_{12}^{1m} = t_{12}^a; \quad u_1^{1m} = u_1^a; \quad u_2^{1m} = u_2^a; \quad x_1 = \pm L/2; \quad |x_2| \leq \pm D/2; \quad (2.11)$$

$$t_{22}^{1m} = t_{22}^a; \quad t_{21}^{1m} = t_{21}^a; \quad u_1^{1m} = u_1^a; \quad u_2^{1m} = u_2^a; \quad |x_1| \leq \pm L/2; \quad x_2 = \pm D/2, \quad (2.12)$$

а также условия затухания «на бесконечности», которые для описанной расчетной схемы имеют следующий вид:

$$u_j^{1m} \rightarrow 0, \text{ при } \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty. \quad (2.13)$$

Следует отметить, что докритическое состояние в ситуации, представленной на рис. 2.1, соответствует задаче о концентрации напряжений (при осевом нагружении) возле прямоугольного включения, который заполнен материалом с отличными характеристиками. В этом случае докритическое состояние будет существенно неоднородным, зависящим от двух переменных  $x_1$  и  $x_2$ .

Таким образом, при исследовании задачи устойчивости с применением основных соотношений ТЛТУДТ (в рамках второго варианта теории малых докритических деформаций) для плоской деформации получаем задачу на собственные значения для системы уравнений в частных производных с существенно переменными коэффициентами, которые зависят от двух переменных  $x_1$  и  $x_2$ . В таком случае получить решение соответствующей задачи на собственные значения с использованием аналитических методов невозможно, что обуславливает необходимость применения численных методов.

**2.1.2. Метод численного исследования задач.** Численное решение сформулированных задач выполняется методом конечных разниц с применением вариационно-разностного подхода и использованием концепции базовых схем. Указанный подход подробно изложен в обзорной публикации применительно к широким классам задач механики композитных материалов [63].

Принимая во внимание обозначения, введенные на рис. 2.1, рассмотрим основные этапы реализации численного метода, применительно к указанному классу задач. Для этого вместо бесконечной расчетной области вводится конечная область, ограниченная внешним прямоугольником с размерами  $l_1 \times l_2$ . Для определения докритического состояния и исследования задачи устойчивости условия затухания «на бесконечности» заменяются аналогичными условиями затухания на внешней границе прямоугольника. При этом размеры внешнего прямоугольника  $l_1 \times l_2$  выбираются такими, чтобы их дальнейшее увеличение не влияло на конечные результаты (величину критического нагружения), что определяется в результате вычислительного эксперимента.

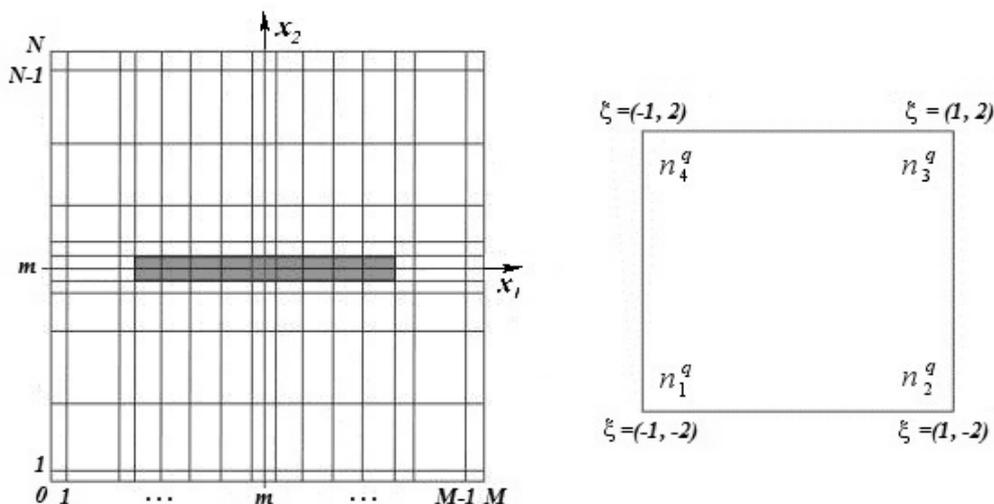


Рис. 2.2

При помощи прямых параллельных координатным осям  $x_1 = \text{const}$  и  $x_2 = \text{const}$ , в расчетной области (внешнего прямоугольника размерами  $l_1 \times l_2$ ) вводится неравномерная по каждому из направлений разностная сетка  $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma$ , где  $\omega$  – множество внутренних и  $\gamma$  – граничных узлов (рис. 2.2). При этом сетка вводится так, чтобы в

пределах каждой ячейки материал был однородным; кроме того, предполагается возможность уплотнения сетки в окрестностях резкого изменения свойств материала, например, вдоль линий разделения компонентов композитного материала. Таким образом, сеточная область, которая состоит из множества внутренних и граничных узлов, представляет собой совокупность прямоугольных ячеек; каждая ячейка сетки имеет механические и геометрические характеристики компонента композита, который содержится в данной ячейке.

Дискретные задачи на сетке  $\bar{\omega}$  получаются вариационно-разностным способом с применением концепции базовых схем. Компоненты базовых схем определяются путем аппроксимации и минимизации соответствующего функционала на шаблоне ячейки сетки. Следует отметить, что при реализации указанной процедуры применительно к исследованию задачи устойчивости используются вариационные принципы ТЛТУДТ. Путем суммирования значений базовых схем в каждом узле сеточной области получаются разностные задачи, являющиеся дискретными аналогами соответствующих континуальных задач. Таким образом, операторную форму разностной задачи определения докритического напряженно-деформированного состояния, которая соответствует задаче линейной теории упругости (2.1) – (2.6), можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \Phi; \mathbf{x} \in \bar{\omega} \quad \text{или} \quad A_i \mathbf{u} = \Phi_i; \mathbf{x} \in \bar{\omega}. \quad (2.14)$$

Выражения разностных операторов получаются путем суммирования значений базовых схем в каждом узле сеточной области

$$A_i \mathbf{u} = \sum_{\xi \in \mathbf{X}} a_i(\xi) \mathbf{u}; \quad \Phi_i = \sum_{\xi \in \mathbf{X}} \varphi_i(\xi); \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}. \quad (2.15)$$

Выражения базовых операторов, полученные на шаблоне ячейки сетки, имеют следующий вид:

$$a_i(\xi) \mathbf{u} = -H \frac{\sigma_{ji} + \sigma_{ji}^{\xi_j}}{\eta_{\xi_j}}; \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}; \quad \varphi_i(\xi) = -\frac{2H}{\eta_{\xi_j}} P_i; \quad \mathbf{x} \in \gamma, \quad (2.16)$$

где  $H = h_1 h_2$  – площадь ячейки сетки,  $h_i = \eta_{\xi_i} \text{sign } \xi_i > 0$ .

Здесь и далее знак суммы означает, что в узле  $\mathbf{X} \in \bar{\omega}$  суммируются значения базового оператора для тех параметров  $\xi$ , которые соответствуют узлу  $\mathbf{X}$  во всех смежных ячейках.

Следует отметить, что разностный оператор задачи (2.14) сохраняет свойства самосопряженности и положительной определенности соответствующего дифференциального оператора. Таким образом, задача определения докритического напряженно-деформированного состояния сводится к решению сеточных уравнений (2.14), которые могут быть представлены в виде системы линейных уравнений с симметричной матрицей.

Операторная форма разностной задачи, соответствующая дифференциальной задаче устойчивости (2.7) – (2.13), может быть представлена в следующем виде:

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = p \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega} \quad \text{или} \quad A_i \mathbf{u} = p B_i \mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}. \quad (2.17)$$

Выражения разностных операторов получаются путем суммирования значений базовых схем в каждом узле сеточной области

$$A_i \mathbf{u} = \sum_{\xi \in \mathbf{X}} a_i(\xi) \mathbf{u}, \quad B_i \mathbf{u} = \sum_{\xi \in \mathbf{X}} b_i(\xi) \mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}. \quad (2.18)$$

Выражения базовых операторов, полученные на шаблоне ячейки сетки, имеют следующий вид:

$$a_i(\xi) \mathbf{u} = -H \frac{\sigma_{ji} + \sigma_{ji}^{\xi_j}}{\eta_{\xi_j}}; \quad b_i(\xi) \mathbf{u} = -H \frac{\sigma_{jk}^0 u_{i,\xi_k} + (\sigma_{jk}^0 u_{i,\xi_k})^{\xi_j}}{\eta_{\xi_j}}; \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}, \quad (2.19)$$

где  $H = h_1 h_2$  – площадь ячейки сетки,  $h_i = \eta_{\xi_i} \text{sign } \xi_i > 0$ .

Разностные операторы задачи (2.17) сохраняют свойства самосопряженности и положительной определенности соответствующих дифференциальных операторов. Таким образом, задача устойчивости сводится к решению сеточных уравнений (2.17), которые также могут быть представлены в виде алгебраической обобщенной задачи на собственные значения.

Изложенный подход к построению разностных задач существенно упрощает процедуру численного решения поставленных задач, поскольку позволяет использовать общие выражения базовых операторов для всех задач рассматриваемого класса. Кроме того, описанный способ суммирования значений базовых операторов, полученных на шаблоне ячейки сетки, является общим для всех классов задач и позволяет легко автоматизировать процесс построения алгебраических задач. Для получения численных результатов решения алгебраических задач используются известные в теории разностных схем прямые и итерационные методы: метод Холецкого, метод сопряженных градиентов, метод итерирования подпространств, метод градиентного спуска.

### 2.1.3. Асимптотический переход к модели «бесконечно длинных волокон».

Проведем сравнительный анализ результатов исследования устойчивости композитных материалов, полученных с применением моделей «волокон конечных размеров» (расчетная схема Рис.2.1) и модели «бесконечно длинных волокон» (расчетная схема рис. 1.19) применительно к композитным материалам с полимерной матрицей. Рассмотрим результаты, полученные в рамках плоской деформации в плоскости  $x_1Ox_2$  (рис. 2.1 и 1.19); при этом в случае модели «волокон конечных размеров» будем использовать результаты, полученные численными методами, в соответствии с [9, 52]; в случае модели «бесконечно длинных волокон» будем использовать результаты, представленные в монографии [8]. Все результаты получены в рамках второго варианта трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел [6, 43] при малых докритических деформациях, когда начальное состояние определяется по геометрически линейной теории); при этом армирующие элементы (волокон) и матрица моделируются линейно упругими сжимаемыми изотропными материалами.

Результаты сравнительного анализа представлены в виде зависимости величины  $|\varepsilon_{11}^{kpa}|$  от геометрического параметра  $LD^{-1}$ . В случае модели «бесконечно длинных волокон» эта величина соответствует критическому значению деформации вдоль оси  $Ox_1$  как для армирующих элементов, так и для матрицы. В случае модели «волокон конечных размеров» введена следующая величина:

$$\varepsilon_{11}^{kpa} = \varepsilon_{11}^{kpa}(x_1, x_2) \quad \text{при} \quad x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = 0. \quad (2.20)$$

В этом случае величина (2.20) соответствует критическому значению деформации вдоль оси  $Ox_1$  в средней точке армирующего элемента, которая характеризует только критическое значение деформации волокна и не характеризует критическое значение деформации матрицы. При этом критическое значение деформации вдоль оси  $Ox_1$  для матрицы, которое определяется «на бесконечности», может достигать существенно отличных значений. Указанную ситуацию следует обязательно принимать во внимание при сравнении результатов, полученных с применением представленных моделей.

На рис. 2.3 и рис. 2.4 представлены результаты, которые относятся к микро- и нанокомпозитам, соответственно, с полимерной матрицей со следующими механическими параметрами:  $E_m = 2,68$  ГПа,  $\nu_m = 0,4$ . Для микрокомпозитов вычисления проводились при следующих значениях механических параметров  $E_a E_m^{-1} = 10; 30; 50; 100; 150$ , где  $E_a$  и  $E_m$  – модули Юнга для волокна и матрицы, соответственно, в интервале изменения геометрического параметра  $10 \leq LD^{-1} \leq 1510$ . Для нанокомпозитов вычисления проводились при более высоких значениях отношения механических параметров  $E_a E_m^{-1} = 285; 373; 448; 500; 1000$  и в более широком интервале изменения

геометрического параметра  $10 \leq LD^{-1} \leq 2310$ . Последние два значения параметра  $E_a E_m^{-1}$  соответствуют ситуациям, которые могут возникать в технологических процессах создания нанокompозитов в связи с существенной зависимостью свойств матрицы от температуры. Сплошными линиями показаны результаты, которые относятся к модели «волокон конечных размеров», пунктирными линиями показаны результаты, относящиеся к модели «бесконечно длинных волокон».

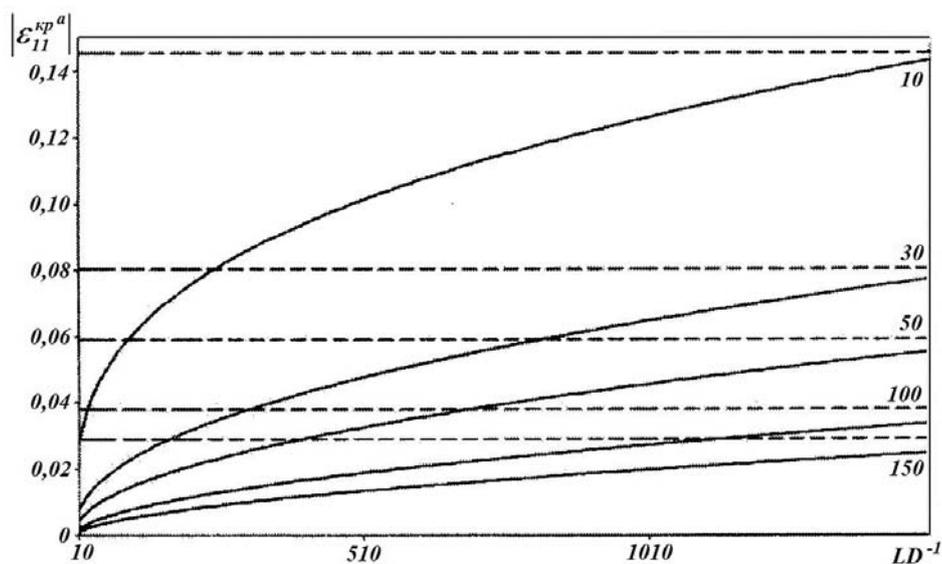


Рис. 2.3

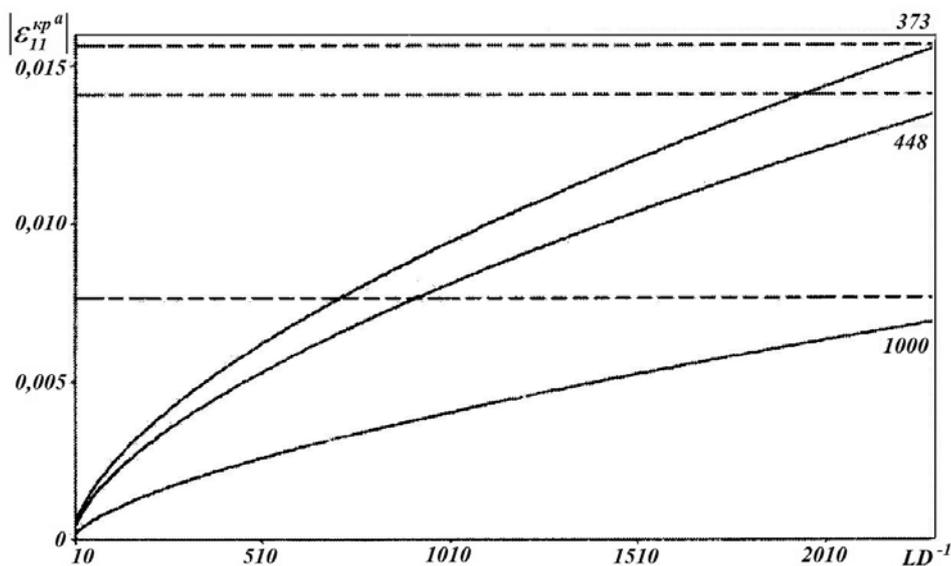


Рис. 2.4

Из результатов, представленных на рис. 2.3 и рис. 2.4, следует, что для всех значений параметра  $E_a E_m^{-1}$  при увеличении геометрического параметра  $LD^{-1}$  в указанном интервале критические значения деформации вдоль оси  $Ox_1$ , вычисленные в рамках модели «волокон конечных размеров», асимптотически приближаются к критическим значениям, полученным в рамках модели «бесконечно длинных волокон»; при

этом для верхних значений рассматриваемых интервалов изменения геометрического параметра, критические значения указанных деформаций практически совпадают. Таким образом, все результаты для микрокомпозитов и нанокомпозитов с полимерной матрицей, полученные в рамках моделей «волокон конечных размеров» и «бесконечно длинных волокон», являются согласованными.

Кроме того, из представленных результатов также следует, что для сравнительно коротких волокон получены существенные отличия критических значений деформации, вычисленных в рамках моделей «волокон конечных размеров» и «бесконечно длинных волокон». Так, в интервале изменения геометрического параметра  $10 \leq LD^{-1} \leq 100$  критические значения деформации вдоль оси  $0x_1$ , вычисленные в рамках модели «волокон конечных размеров», в несколько раз меньше соответствующих значений, вычисленных в рамках модели «бесконечно длинных волокон»; в случае же наиболее коротких волокон (при  $LD^{-1} = 10$ ), критические значения деформации вдоль оси  $0x_1$ , вычисленные в рамках модели «волокон конечных размеров», почти на порядок меньше соответствующих значений, вычисленных в рамках модели «бесконечно длинных волокон». Таким образом, микро- и нанокомпозиты с геометрическими параметрами армирующих элементов в интервале  $10 \leq LD^{-1} \leq 100$  являются достаточно короткими волокнами, для которых исследование устойчивости в рамках модели «бесконечно длинных волокон», по мнению авторов, является неприменимым.

Указанная ситуация, очевидно, может иметь следующее объяснение: в результате исследования форм потери устойчивости волокна в матрице, результаты которого более подробно изложены ниже, было установлено, что сравнительно короткие волокна теряют устойчивость по формам (модам), которые не имеют ничего общего с периодическими (вдоль волокна) формами потери устойчивости, что является характерным для модели «бесконечно длинных волокон» и определяется выделением жестких армирующих элементов в рамках модели «волокон конечных размеров» были получены формы потери устойчивости, которые свидетельствуют о как бы повороте волокна как абсолютно жесткого тела. Естественно, что подобные формы потери устойчивости не описываются в рамках модели «бесконечно длинных волокон» с выделенным периодическим множителем. Именно поэтому критические значения деформаций, которые соответствуют указанному явлению, в рамках модели «бесконечно длинных волокон» вычислены быть не могут.

Вышеизложенными сведениями ограничимся при сравнительном анализе результатов для нанокомпозитов с полимерной матрицей, которые получаются для нанокомпозитов с полимерной матрицей в задачах устойчивости с применением двух рассматриваемых моделей. Ниже рассмотрим два примечания, которые в равной мере относятся к микрокомпозитам и нанокомпозитам с полимерными матрицами.

**Примечание 1.** На первый взгляд значение геометрического параметра  $LD^{-1} = 100$ , являющееся верхней границей интервала, для которого модель «бесконечно длинных волокон» неприменима, как бы соответствует достаточно длинным волокнам. Дополнительные сведения в этом вопросе можно получить используя шкалу уровней, предложенную в [12, 48]. В соответствии с указанной шкалой уровней для диаметров волокон получаем применительно к микрокомпозитам  $D \approx (10^{-4} - 10^{-8})$  м и применительно к нанокомпозитам  $D \approx (10^{-7} - 10^{-9})$  м. Учитывая вышеизложенные сведения, получаем, что для физических объемов материала с линейными размерами вдоль волокон, которые равны или меньше для микрокомпозитов (порядка 1 см – 1 мкм) и нанокомпозитов (порядка 10 мкм – 0,1 мкм), неприменима модель «бесконечно длинных волокон» при исследовании задач устойчивости. Из вышеприведенных оценок следует, что полученные длины волокон, когда неприменима модель «бесконечно длинных волокон», не являются очевидно большими.

**Примечание 2.** Необходимо отметить, что результаты сравнительного анализа для моделей «бесконечно длинных волокон» и «волокон конечных размеров» существенным образом зависят от выбранных величин, по которым проводится сравнение. В настоящей статье в качестве такой величины выбрано критическое укорочение вдоль волокна, для которого имеет место выражение (2.20) в случае модели «волокон конечных размеров» (рис. 2.1), и в случае модели «бесконечно длинных волокон» (рис. 1.19) имеет место выражение

$$\varepsilon_{11}^{0(a)} = \varepsilon_{11}^{0(m)} = \varepsilon_{11}^0 = \text{const.} \quad (2.21)$$

Указанный выбор величин, по мнению авторов, является достаточно обоснованным, исходя из соображений физического характера. По-видимому, совершенно другие результаты были бы получены, если бы в качестве величины сравнения выбрать критические значения укорочения вдоль оси  $Ox_1$  для матрицы «на бесконечности». В этом случае для модели «бесконечно длинных волокон» в силу выражений (2.21) сравнение проводилось бы для такой же величины. Для матрицы же при вычислении укорочения «на бесконечности», применительно к модели «волокон конечных размеров», получили бы существенно большие значения, так как матрица существенно менее жесткая по сравнению с волокнами.

Следует отметить, что в публикациях [9 – 11, 14 – 18, 36 – 38, 48 – 54], посвященных исследованию исключительно в рамках модели «волокон конечных размеров», применялась величина  $|\varepsilon_{11}^{kp}| = |\varepsilon_{11}^{kpm}|^\infty$  (критическое укорочение для матрицы «на бесконечности» в соответствии с рис. 2.1)

$$\left| \varepsilon_{11}^{kpm} \right|^\infty = \left| \varepsilon_{11}^{kpm} \right| \quad \text{при } x_1 \rightarrow \pm\infty. \quad (2.22)$$

В связи с этим (в отличие от рис. 2.3, 2.4) величина (2.22) получается существенно больше  $|\varepsilon_{11}^{kpa}|$  и приближается асимптотически сверху к результатам в рамках модели «бесконечно длинных волокон»; об этом свидетельствует рис. 3 из статьи [9].

Соображения, приведенные в Примечаниях 1 и 2, целесообразно учитывать при проведении сравнительного анализа результатов исследования задач устойчивости композитных материалов, которые получены в рамках моделей «бесконечно длинных волокон» и «волокон конечных размеров». Более подробно результаты сравнительного анализа моделей «волокон конечных размеров» и «бесконечно длинных волокон», а также пределов их применимости, представлены в статье [48].

**2.2. Анализ внутренней неустойчивости.** В настоящем пункте в краткой форме представлены результаты исследования внутренней неустойчивости композитных материалов, армированных короткими волокнами, под действием сжимающей нагрузки, направленной вдоль оси волокон, с применением модели «волокон конечных размеров»; выполнен анализ численных результатов, полученных на основании изложенной методики, исследовано влияния механических и геометрических параметров на величину критической деформации композитного материала, а также формы потери устойчивости наполнителя в структуре материала.

**Примечание.** Распределение напряжений, деформаций и перемещений в формах потери устойчивости, полученных в рамках модели «волокон конечных размеров», имеет сложный характер; в связи с этим целесообразно ввести достаточно условные величины, которые определяют отмеченные формы потери устойчивости. В качестве таких величин во втором разделе настоящей статьи вводятся «мысленные» формы потери устойчивости, которые характеризуют общую картину деформирования матрицы и волокна применительно к рассматриваемой форме потери устойчивости и представляют собой форму горизонтальной средней линии волокна после потери устойчивости. Следует отметить, что «мысленные» формы потери устойчивости, базируются на соображениях физического характера и вводятся с целью применения их к описанию форм потери устойчивости в процессе интерпретации полученных конкретных численных результатов решения и не используются непосредственно при решении задач.

**2.2.1. Одно волокно в матрице.** Исследована потеря устойчивости композитного материала, слабоармированного волокнами конечных размеров, под действием сжимающей нагрузки вдоль оси волокон в направлении  $Ox_1$  в условиях плоской деформации, что обеспечивается действием нагрузки постоянной интенсивности  $P$  на бесконечности (рис. 2.5). Указанная ситуация соответствует композитному материалу с достаточно малой концентрацией армирующих элементов (волокон), когда можно не учитывать взаимодействие соседних армирующих элементов ни при определении докритического состояния, ни при исследовании потери устойчивости. Задачи такого типа можно рассматривать как «модельные» или «эталонные» в механике композитных материалов.

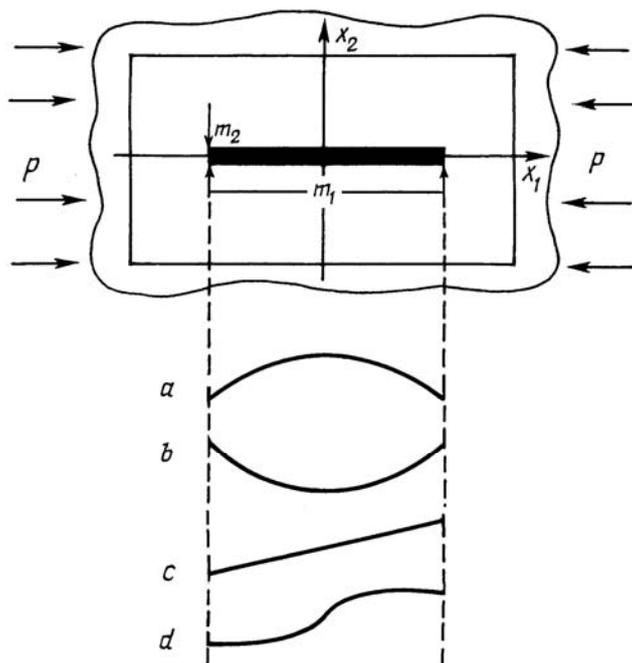


Рис. 2.5

На рис. 2.5,  $a - d$  представлены «мысленные» формы потери устойчивости с учетом симметрии относительно середины армирующего элемента (волокна), где сплошными линиями показаны положения горизонтальной средней линии волокна после потери устойчивости; так, формы потери устойчивости  $a$ ) и  $b$ ) можно назвать симметричными формами потери устойчивости, а формы  $c$ ) и  $d$ ) можно назвать антисимметричными формами потери устойчивости относительно вертикальной оси  $Ox_2$ .

Симметричные формы потери устойчивости можно назвать изгибными формами, что соответствует форме потери устойчивости полосы при осевом сжатии. Антисимметричная форма потери устойчивости соответствует как бы «жесткому» повороту армирующего элемента (волокна), когда материал матрицы не обеспечивает достаточного «поддерживающего» действия, вследствие чего при потере устойчивости вблизи торцов волокна как бы образуется «шарнир», близкий к пластическому шарниру; очевидно, такая форма потери устойчивости может иметь место, когда армирующие элементы и матрица значительно отличаются по жесткости, что характерно для технологических процессов создания композитных материалов. Антисимметричная форма потери устойчивости  $d$ ) соответствует как бы повороту армирующего элемента с изгибом.

Полученные результаты численного решения задач устойчивости представлены на рис. 2.6 в виде зависимости величины  $|\varepsilon_{11}^{kp}|$  (2.22), которая характеризует критичес-

кое значение деформации вдоль оси  $0x_1$  для матрицы на бесконечности от значения коэффициента формы армирующего элемента, который определяется как отношение длины волокна к его диаметру ( $k = m_1 m_2^{-1} = LD^{-1}$ ).

Вычисления выполнены при следующих значениях механических параметров компонентов композита:  $E_a E_m^{-1} = 100; 200, 300, 500, 1000$ ,  $E_m = 2,76$  ГПа,  $\nu_m = \nu_a = 0,35$ ; значения коэффициента формы армирующего элемента последовательно изменялись в интервале  $100 \leq k < 500$ .

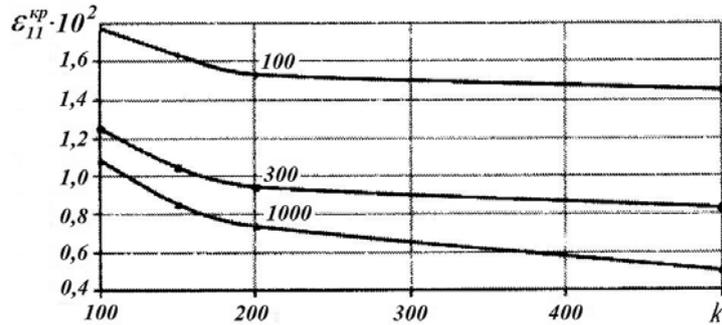


Рис. 2.6

В результате проведенных расчетов было установлено, что все полученные значения критической деформации значительно ниже, чем предельное значение 0,028, соответствующее пределу прочности материала матрицы (полиамид литьевой). Это свидетельствует о возможности разрушения композитного материала, слабоармированного волокнами конечного размера, вследствие потери устойчивости в структуре композита, прежде чем будет достигнут предел прочности матрицы.

Далее рассмотрим некоторые результаты, относящиеся к определению форм потери устойчивости. При этом форма потери устойчивости характеризуется безразмерным перемещением  $u_2$  вдоль вертикальной оси, отнесенной к амплитудному множителю

$$u_2^*(x_1) = \left[ u_2(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} \right] \cdot \left[ \max \left\{ u_2(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} \right\} \right]^{-1}. \quad (2.23)$$

Так, на рис. 2.7 представлены формы потери устойчивости для некоторых значений коэффициента формы армирующего элемента, при этом кривая 1 соответствует значению  $k = 10$ , кривая 2 соответствует значению  $k = 30$ .

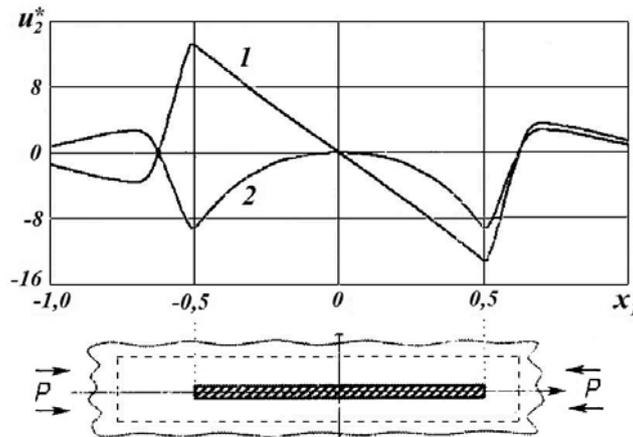


Рис. 2.7

Из полученных результатов можно сделать вывод, что в случае сравнительно коротких волокон потеря устойчивости реализуется по форме потери устойчивости, которая соответствует «мысленной» антисимметричной форме (рис. 2.5, *c*) – как бы «жесткому» повороту армирующего элемента (волокна), когда матрица не обеспечивает достаточного поддерживающего действия и при потере устойчивости поблизости торцов волокна как бы образуется «шарнир», близкий к пластическому шарниру.

Для всех значений  $k \geq 30$ , при фиксированных значениях модулей упругости компонентов композитного материала, наблюдается «изгибная» форма потери устойчивости наполнителя в структуре композита (рис. 2.5, *a*).

Более подробно результаты исследования устойчивости композитных материалов, слабоармированных волокнами конечных размеров, опубликованы в работах [9, 10, 52, 53], в том числе представлены зависимости величины критических деформаций от механических и геометрических параметров композита, а также исследованы возможные формы потери устойчивости наполнителя в структуре композитного материала.

**2.2.2. Два волокна вдоль сжимающей нагрузки.** Ситуация, представленная на рис. 2.8, соответствует композитному материалу с армирующими элементами (волокнами) конечных размеров в случае малой концентрации волокон, когда вследствие нерегулярности внутренней структуры возможно взаимодействие между отдельными армирующими элементами. Сначала рассмотрим взаимодействие между двумя одинаковыми волокнами конечных размеров, которые размещены вдоль сжимающей нагрузки параллельно между собой; при этом рассматривается случай взаимодействия как в докритическом состоянии, так и при потере устойчивости. Исследование выполнено в рамках плоской деформации в плоскости  $x_1 0x_2$ .

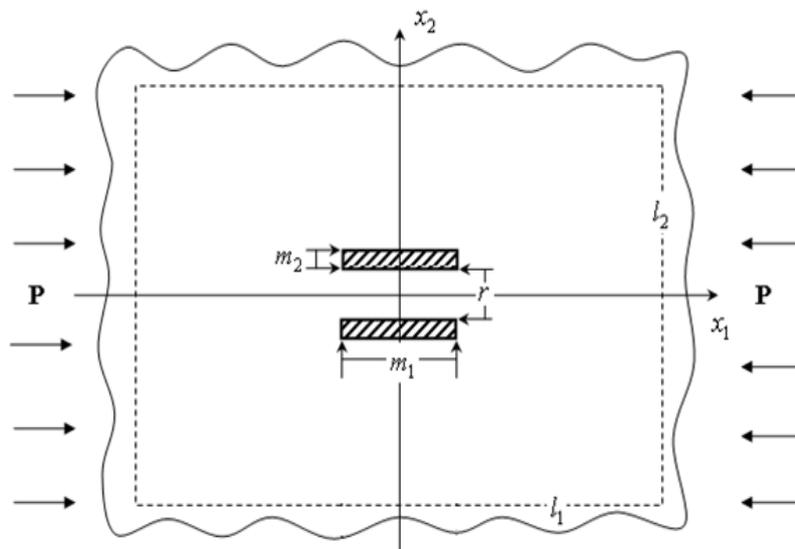


Рис. 2.8

В данном случае размещения волокон конечных размеров введем дополнительный параметр  $r$ , который характеризует расстояние между соседними параллельными волокнами; для представления результатов расчетов используется соответствующий безразмерный параметр  $r_2^* = r \cdot m_1^{-1}$  (рис. 2.8).

Для получения конкретных результатов в случае двух параллельных волокон конечных размеров проводились вычислительные эксперименты с целью определения размеров внешнего прямоугольника  $l_1 \times l_2$  таким образом, чтобы в него включались два параллельных армирующих элемента и выполнялись соответствующие условия затухания на границе.

На рис. 2.9 представлены результаты расчетов в виде зависимости величины  $|\varepsilon_{11}^{kp}|$ , которая характеризует критическое значение деформации вдоль оси  $0x_1$  для матрицы на бесконечности от безразмерного параметра  $r_2^*$ , соответствующего относительному расстоянию между волокнами. Расчеты были выполнены для следующих значений параметров компонентов композита: отношения модулей Юнга  $E_a E_m^{-1} = 1000$ ; коэффициенты Пуассона  $\nu_a = \nu_m$ ; коэффициент формы наполнителя  $k = m_1 / m_2 = 100$ . Безразмерное расстояние между волокнами последовательно изменялось в интервале  $0,001 \leq r_2^* \leq 32$ .

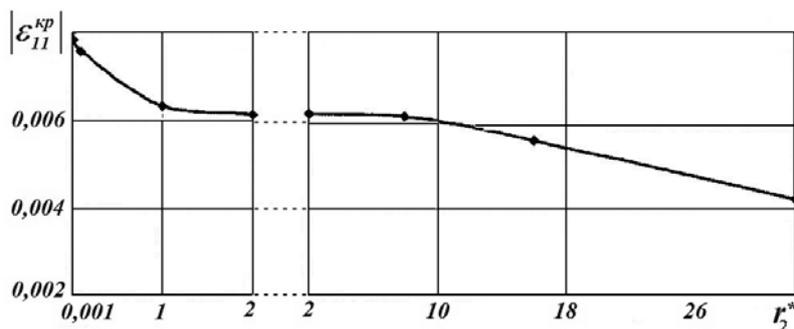


Рис. 2.9

Следует отметить, что уменьшение критического значения деформации  $|\varepsilon_{11}^{kp}|$  при увеличении безразмерного параметра  $r_2^*$ , который характеризует относительное расстояние между волокнами, от значения  $r_2^* \approx 0,001$  до  $r_2^* \approx 2$ , соответствует соображениям инженерного характера. Так, при  $r_2^* \approx 0,001$  волокна размещены почти вплотную один к одному; в таком случае два волокна при потере устойчивости деформируются почти как одно целое волокно с той же длиной и удвоенной толщиной. При увеличении расстояния между волокнами до значения  $r_2^* \approx 2$  наблюдается тенденция, что два волокна при потере устойчивости в значительной мере деформируются независимо. Таким образом, при увеличении параметра  $r_2^*$  происходит как бы увеличение параметра  $k$  для одного волокна и, по аналогии с результатами на рис. 2.6 для одного волокна, при увеличении параметра  $k$  наблюдается уменьшение величины  $|\varepsilon_{11}^{kp}|$  (критического значения деформации вдоль оси  $0x_1$ ).

Ситуация, представленная на рис. 2.10, соответствует композитному материалу с армирующими элементами (волокнами) конечных размеров в случае малой концентрации волокон, когда вследствие нерегулярности внутренней структуры возможно взаимодействие между двумя соседними последовательно размещенными вдоль сжимающей нагрузки одинаковыми армирующими элементами.

При этом взаимодействие рассматривается как в докритическом состоянии, так и при потере устойчивости. Исследование выполнено в рамках плоской деформации в плоскости  $x_1 0x_2$ .

Как и в случае одного армирующего элемента относительно ситуации, представленной на рис. 2.10 для двух последовательно размещенных волокон, можно предположить четыре «мысленные» формы потери устойчивости, которые изображены на рис. 2.10 (a – d) в виде сплошных линий под каждым из волокон, что соответствуют средней линии волокна после потери устойчивости.

Изгибная форма потери устойчивости *a*) соответствует случаю, когда каждый армирующий элемент теряет устойчивость как бы почти без взаимодействия с другим армирующим элементом. Форма потери устойчивости *b*) соответствует случаю, когда возникает почти жесткий поворот каждого волокна; такой случай реализуется для достаточно жесткого материала волокон, когда матрица не обеспечивает надлежащего поддерживающего действия и при потере устойчивости на торцах как бы образуется «шарнир», близкий к пластическому шарниру. Схема *c*) соответствует случаю, когда два волокна теряют устойчивость как бы по «одной изгибной форме» (общая изгибная форма потери устойчивости). Схема *d*) соответствует случаю, когда два волокна теряют устойчивость как бы при сравнительно жестком взаимном повороте соседних волокон с некоторым изгибом; такой случай реализуется для достаточно жесткого материала волокон, когда матрица между волокнами не обеспечивает надлежащего поддерживающего действия и при потере устойчивости между волокнами как бы возникает «шарнир», близкий до пластического шарнира. Построение «мысленных» форм можно продолжить, рассматривая формы потери устойчивости, представленные на рис. 2.10 (*a – d*), как первые «мысленные» формы.

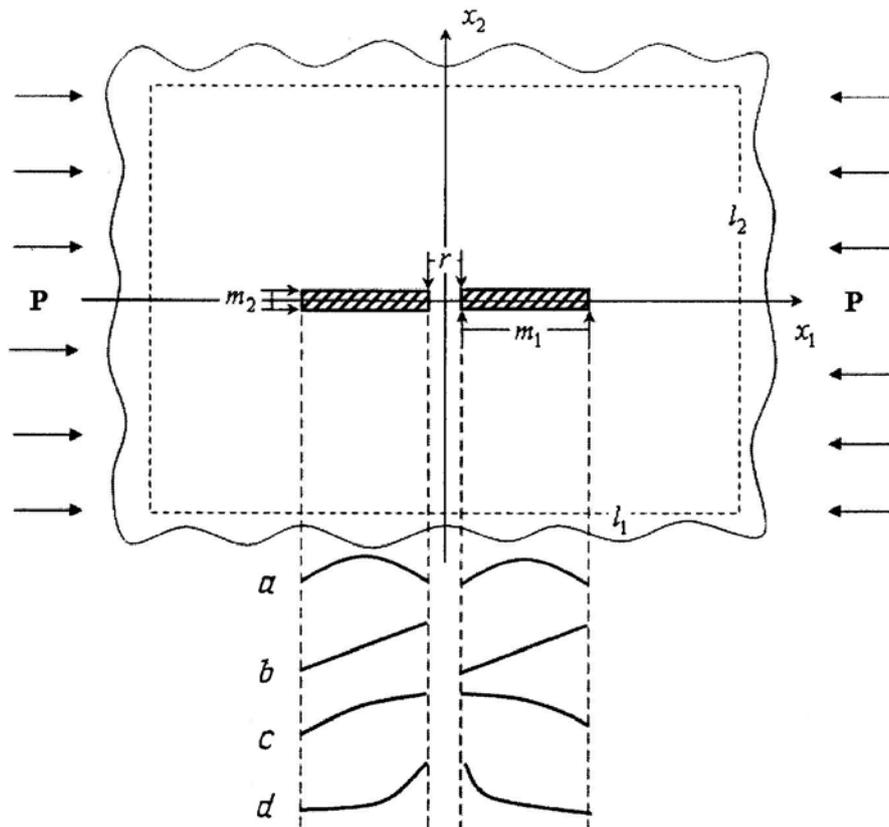


Рис. 2.10

Следует отметить, что построение первых «мысленных» форм потери устойчивости, которые представлены на рис. 2.10 (*a – d*) для случая двух армирующих элементов конечных размеров при их последовательном размещении, как и первых «мысленных» форм потери устойчивости, представленных на рис. 2.5 (*a – d*) для случая одного волокна конечных размеров, реализуется до проведения численного решения соответствующих задач исключительно с целью проведения анализа полученных численных результатов и не используется непосредственно при решении задач.

При получении конкретных результатов в случае двух последовательно размещенных волокон конечных размеров проводились вычислительные эксперименты с

целью определения размеров внешнего прямоугольника  $l_1 \times l_2$  таким образом, чтобы в него включались два последовательно размещенных армирующих элемента и выполнялись соответствующие условия затухания на границе. Также проводились вычислительные эксперименты для выбора неравномерного шага сетки в области контакта компонентов композита.

Дополнительно вводится безразмерный параметр  $r_1^*$ , характеризующий относительное расстояние между двумя соседними волокнами при их последовательном размещении следующим образом:  $r_1^* = r \cdot m_1^{-1}$  (рис. 2.10). Расчеты были выполнены при следующих значениях параметров компонентов композита: отношения модулей Юнга  $E_a E_m^{-1} = 1000$ ; коэффициенты Пуассона  $\nu_a = \nu_m$ ; коэффициент формы наполнителя  $k = m_1 / m_2 = 100$ . Безразмерное расстояние между волокнами  $r_1^*$  последовательно изменялось в интервале  $0,001 \leq r_1^* \leq 32$ .

На рис. 2.11 представлено распределение вдоль оси  $0x_1$  безразмерного перемещения (2.23) для некоторых значений относительного расстояния между соседними волокнами  $r_1^*$ , когда расстояние между торцами волокон равно длине волокна  $r_1^* = 1$  (рис. 2.11, а) и одной тысячной части длины волокна  $r_1^* = 0,001$  (рис. 2.11, б).

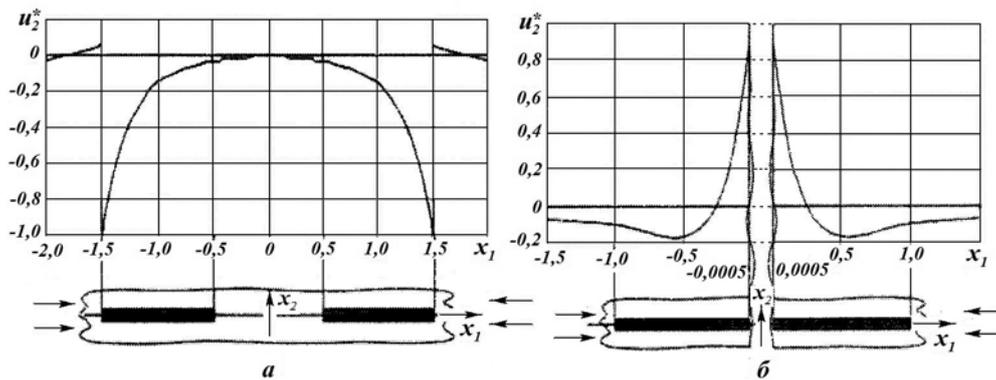


Рис. 2.11

Из представленных результатов можно сделать вывод, что при  $r_1^* = 1$ , с учетом значений  $k$  и  $E_a E_m^{-1}$ , происходит потеря устойчивости по форме, которая достаточно близка к «мысленной» форме потери устойчивости, которая представлена на рис. 2.10, с) как «общая изгибная форма потери устойчивости»; при  $r_1^* = 0,001$ , с учетом значений  $k$  и  $E_a E_m^{-1}$ , потеря устойчивости происходит по форме, достаточно близкой к «мысленной» форме, представленной на рис. 2.10, d) как «взаимный поворот с изгибом при наличии шарнира между торцами волокон».

Результаты исследования вопроса о влиянии взаимодействия двух армирующих элементов конечных размеров при их последовательном размещении на величину критической деформации представлены на рис. 2.12 в виде зависимости величины  $|\varepsilon_{11}^{kp}|$  вдоль оси  $0x_1$  от величины безразмерного параметра  $r_1^*$  — относительного расстояния между торцами цилиндров; причем интервал изменения  $r_1^*$  разделен на две части  $(0,001 \leq r_1^* \leq 0,01$  и  $0,1 \leq r_1^* \leq 32)$ , для которых приняты разные масштабы по оси  $0r_1^*$ .

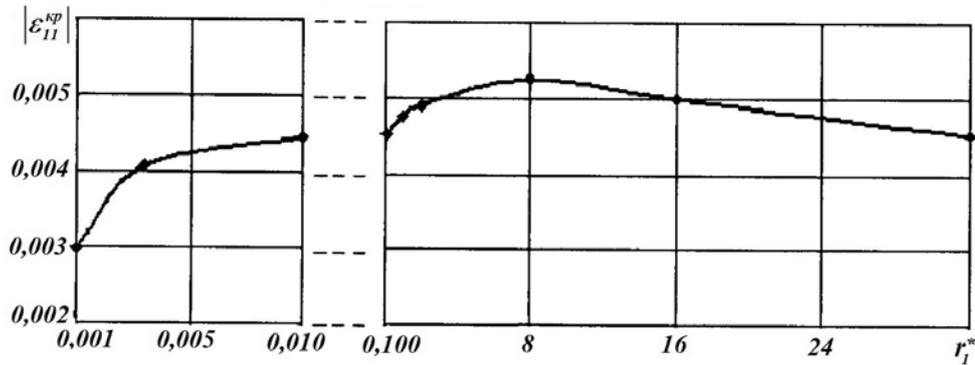


Рис. 2.12

Из анализа представленных результатов можно сформулировать следующие выводы: при достаточно больших расстояниях между волокнами конечных размеров ( $r_1^* > 30$ ) величина критической деформации  $|\varepsilon_{11}^{kp}|$  приближается к значению, соответствующему случаю одного волокна в матрице; при этом реализуется форма потери устойчивости, близкая к «мысленной» форме, когда каждый армирующий элемент теряет устойчивость почти без взаимодействия с другим армирующим элементом (рис. 2.10, а). С уменьшением расстояния  $r_1^*$  степень взаимодействия волокон увеличивается; так, в интервале  $0,005 \leq r_1^* \leq 30$  реализуется форма потери устойчивости, соответствующая «общей изгибной форме» (рис. 2.10, с), а величина  $|\varepsilon_{11}^{kp}|$  достигает максимального значения (при  $r_1^* = 8$  для принятых значений параметров композита); в интервале  $0,001 \leq r_1^* \leq 0,005$  реализуется форма потери устойчивости с «взаимным поворотом с изгибом при наличии шарнира между торцами волокон» (рис. 2.10, d) и наблюдается резкое уменьшение величины критической деформации  $|\varepsilon_{11}^{kp}|$ .

Таким образом, в результате численного исследования обнаружено, что зависимость величины критической деформации от значения расстояния между торцами волокон (при их последовательном размещении) имеет немонотонный характер. Этот **механический эффект в представленной работе обнаружен впервые**. Объяснение обнаруженного механического эффекта, по-видимому, может базироваться на том, что в указанном диапазоне изменения расстояния между торцами волокон (при их последовательном размещении) происходит замена форм потери устойчивости.

Дополнительные результаты исследования устойчивости композитных материалов, армированных волокнами конечных размеров, с учетом взаимодействия между соседними волокнами, представлены в работах [11, 14, 15, 49, 54].

**2.2.3. Периодический ряд волокон вдоль сжимающей нагрузки.** Рассмотрим композитный материал с армирующими элементами (волокнами) конечных размеров, имеющий регулярную структуру в виде отдельных периодических рядов одинаковых волокон, которые в пределах каждого ряда взаимодействуют между собой. При этом периодические ряды волокон являются параллельными и размещены на таком расстоянии между собой, что они не взаимодействуют ни в докритическом состоянии, ни при потере устойчивости.

Ситуация представленная на рис. 2.13 соответствует случаю композитных материалов, в которых общая концентрация волокон позволяет исследовать только один отдельный периодический вдоль оси  $Ox_2$  ряд параллельных одинаковых армирующих элементов (волокон) конечных размеров, которые взаимодействуют между собой (в пределах периодического ряда) в докритическом состоянии и при потере устойчивости.

Дополнительно введен параметр  $r$ , характеризующий расстояние между соседними параллельными волокнами; для представления результатов расчетов также используется соответствующий безразмерный параметр  $r^* = r \cdot m_1^{-1}$  (рис. 2.13).

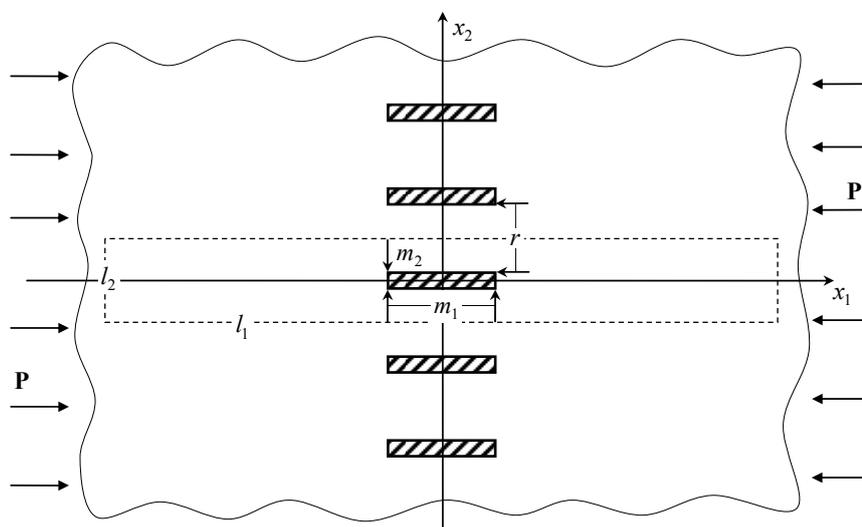


Рис. 2.13

Для решения задач выделяется внешний прямоугольник, размеры которого  $l_1 \times l_2$  определяются в результате вычислительных экспериментов, которые обеспечивают независимость конечного результата от величин  $l_1 \times l_2$ . В данном случае периодического вдоль оси  $Ox_2$  ряда одинаковых волокон размеры указанного внешнего прямоугольника  $l_2$  вдоль оси  $Ox_2$  выбираются из условия периодичности. Если исследовать форму потери устойчивости вдоль оси  $Ox_2$  с периодом, который равняется периоду структуры, то для величины  $l_2$  получим следующее выражение:  $l_2 = m_2 + r$ , где в правой части указан период структуры в соответствии с обозначениями на рис. 2.13. Таким образом, внешний прямоугольник  $l_1 \times l_2$  на рис. 2.13 показан пунктирной линией, при этом, в данном случае, только значение параметра  $l_1$  определяется путем вычислительного эксперимента.

Следует отметить, что в случае периодической структуры (рис. 2.13) с периодом  $T = m_2 + r$  можно рассматривать формы потери устойчивости вдоль оси  $Ox_2$  с периодом, кратным периоду структуры  $N(m_2 + r)$ , где  $N$  – целое число. В этом случае для определения размера  $N(m_2 + r)$  внешнего прямоугольника  $l_1 \times l_2$  имеет место выражение  $l_2 = N(m_2 + r)$ .

На рис. 2.14 представлены результаты расчетов в виде зависимости величины  $|\varepsilon_{11}^{kp}|$ , характеризующей критическое значение деформации вдоль оси  $Ox_1$  «на бесконечности», от безразмерного параметра  $r^*$ , который соответствует относительному расстоянию между соседними волокнами в периодическом ряду. Расчеты были выполнены при следующих значениях параметров компонентов композита: отношения модулей Юнга  $E_a E_m^{-1} = 500$ ; коэффициенты Пуассона  $\nu_a = \nu_m$ ; коэффициент формы наполнителя  $k = m_1 / m_2 = 10, 20, 50, 100, 500$ . Безразмерное расстояние между волокнами последовательно изменялось в интервале  $0,02 \leq r^* \leq 5$ .

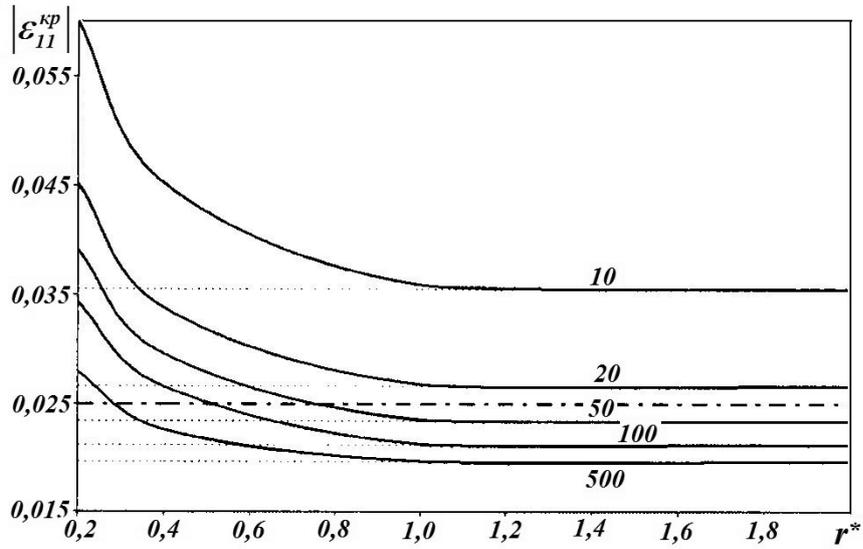


Рис. 2.14

Из результатов, представленных на рис. 2.14, можно сделать вывод, что с увеличением расстояния между соседними волокнами, величина которого превышает длину волокна ( $r^* > 1$ ), значения критической деформации периодического вдоль оси  $0x_2$  ряда параллельных волокон конечных размеров практически не изменяется, а ее значение соответствует результатам, полученным для случая одного волокна в матрице, которые изображены на рис. 2.14 пунктирными линиями для соответствующих значений геометрических параметров наполнителя. С уменьшением расстояния между соседними волокнами в ряду параллельных волокон ( $r^* < 1$ ) величина критической деформации увеличивается.

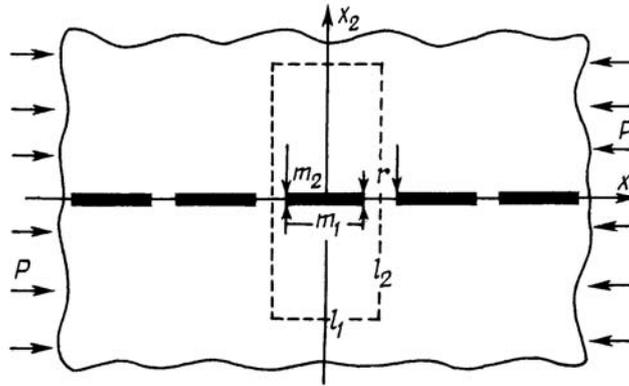


Рис. 2.15

Ситуация, представленная на рис. 2.15, соответствует случаю композитных материалов, в которых общая концентрация волокон позволяет исследовать только один отдельный периодический вдоль оси  $0x_1$  ряд последовательно размещенных одинаковых армирующих элементов (волокон) конечных размеров, которые взаимодействуют между собой (в пределах периодического ряда) как в докритическом состоянии, так и при потере устойчивости.

Дополнительно введен параметр  $r$ , характеризующий расстояние между соседними параллельными волокнами; для представления результатов расчетов также используется соответствующий безразмерный параметр  $r^* = r \cdot m_1^{-1}$  (рис. 2.15).

Для решения задач выделяется внешний прямоугольник, размеры которого  $l_1 \times l_2$  определяются в результате вычислительного эксперимента, что обеспечивает независимость конечных результатов от величин  $l_1 \times l_2$ . В данном случае периодического вдоль оси  $Ox_1$  ряда одинаковых волокон размеры указанного внешнего прямоугольника  $l_1$  вдоль оси  $Ox_1$  выбираются из условия периодичности. Если исследовать форму потери устойчивости вдоль оси  $Ox_1$  с периодом, который равняется периоду структуры, то для величины  $l_1$  получим следующее выражение:  $l_1 = m_1 + r$ , где в правой части указан период структуры в соответствии с обозначениями на рис. 2.15. Таким образом, внешний прямоугольник  $l_1 \times l_2$  на рис. 2.15 показан пунктирной линией, при этом, в данном случае, только значения параметра  $l_2$  определяются путем вычислительного эксперимента.

Следует отметить, что в случае периодической структуры (рис. 2.15) с периодом  $T = m_1 + r$  можно рассматривать формы потери устойчивости вдоль оси  $Ox_1$  с периодом, кратным периоду структуры  $N(m_1 + r)$ , где  $N$  – целое число. В этом случае для определения размера  $N(m_1 + r)$  внешнего прямоугольника  $l_1 \times l_2$  имеет место выражение  $l_1 = N(m_1 + r)$ .

По аналогии с анализом результатов для одного и двух волокон при последовательном размещении, в данном случае периодического ряда последовательно размещенных волокон конечных размеров, целесообразно рассмотреть «мысленные» формы потери устойчивости. Так, на рис. 2.16, *a – в* показаны «мысленные» формы потери устойчивости, являющиеся симметричными относительно вертикальных линий, проведенных через середины отрезков между торцами соседних волокон; аналогично на рис. 2.17, *a – в* показаны «мысленные» формы потери устойчивости, которые являются антисимметричными относительно этих вертикальных линий. «Мысленные» формы потери устойчивости, представленные на рис. 2.16 и рис. 2.17, можно еще охарактеризовать тем, что форма на рис. 2.16, *a* и формы на рис. 2.17, *б, в* являются периодичными вдоль оси  $Ox_1$  с периодом, равным периоду структуры  $T$ , а формы на рис. 2.16, *б, в* и форма на рис. 2.17, *a* являются периодичными вдоль оси  $Ox_1$  с периодом, равным удвоенному периоду структуры  $2T$ .

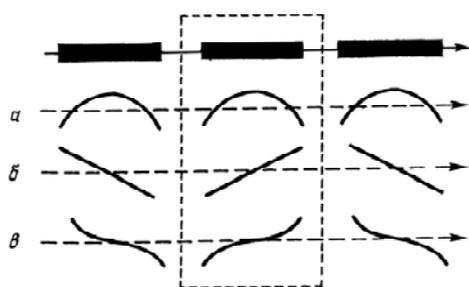


Рис. 2.16

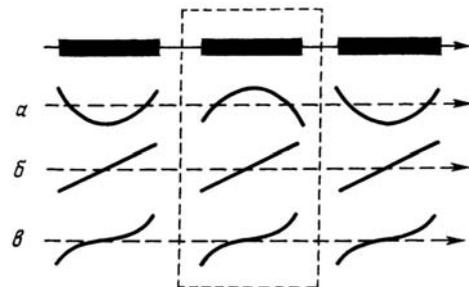


Рис. 2.17

«Мысленную» форму потери устойчивости на рис. 2.16, *a* можно назвать близкой к изогнутой форме потери устойчивости, которая реализуется в случае достаточно отдаленных волокон при практически отсутствующем взаимном влиянии. «Мысленную» форму потери устойчивости на рис. 2.16, *б* можно назвать близкой к жесткому повороту близко размещенных волокон, которая реализуется для достаточно жестких материалов волокон при их сравнительно близком размещении, когда матрица не обеспечивает надлежащего поддерживающего влияния и между торцами волокон

возникает как бы «пластический шарнир». «Мысленную» форму потери устойчивости на рис. 2.16, в можно назвать близкой к повороту с изгибом, который реализуется для относительно жестких материалов волокон и соответствует форме потери устойчивости на рис. 2.16, б, дополненной некоторым изгибом волокон. Приведенные соображения о «мысленных» формах потери устойчивости удобно использовать при интерпретации отдельных конкретных результатов к описанию форм потери устойчивости, полученных путем численного решения задач.

Для изучения форм потери устойчивости на рис. 2.18 представлено распределение безразмерного перемещения (2.23) вдоль оси  $0x_1$  для некоторых значений относительного расстояния между соседними волокнами  $r^*$ , когда расстояние между торцами волокон равно длине волокна  $r^* = 1$  (кривая 1) и двум десятым длины волокна  $r^* = 0,2$  (кривая 2).

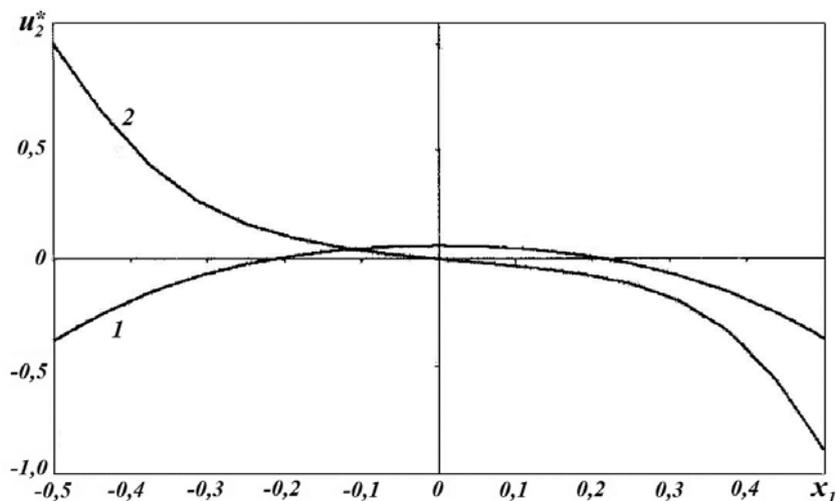


Рис. 2.18

Форма потери устойчивости 1 на рис. 2.18 практически совпадает с «мысленной» формой на рис. 2.16, а и рис. 2.17, а, названными «изгибной» формой потери устойчивости, которая реализуется при отсутствии взаимодействия между волокнами и соответствует случаю одного изолированного волокна в матрице. Форма потери устойчивости 2 на рис. 2.18 практически совпадает с «мысленной» формой на рис. 2.16, в и рис. 2.17, в, названными поворотом с изгибом. Следует отметить, что такая форма потери устойчивости, соответствующая повороту с изгибом, реализуется когда между торцами соседних волокон как бы возникает «пластический шарнир». Таким образом, при сближении последовательно размещенных волокон в периодическом ряду происходит смена форм потери устойчивости; аналогичная ситуация имела место в случае двух волокон при их последовательном размещении.

Результаты расчетов представлены на рис. 2.19 в виде зависимости величины критической деформации  $|\varepsilon_{11}^{kp}|$  от безразмерной величины  $r^*$ , характеризующей относительное расстояние между соседними волокнами. Расчеты были выполнены для следующих значений параметров компонентов композита: отношения модулей Юнга  $E_a E_m^{-1} = 1000$ ; коэффициенты Пуассона  $\nu_a = \nu_m$ ; коэффициент формы наполнителя  $k = m_1 / m_2 = 100, 200, 300, 500$  (кривые 1, 2, 3, 4, соответственно); штрих-пунктирные линии соответствуют значениям  $|\varepsilon_{11}^{kp}|$  для одного волокна при тех же значениях  $k$ . Безразмерное расстояние между волокнами последовательно изменялось в интервале  $0,2 \leq r^* \leq 4,5$ .

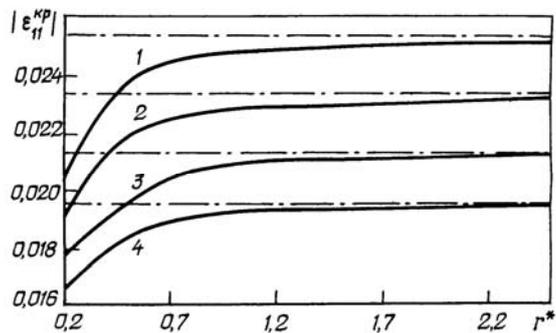


Рис. 2.19

Из результатов, показанных на рис. 2.19, можно сделать вывод, что при расстояниях между торцами соседних волокон, превышающих длину волокна ( $r^* > 1$ ), величина критической деформации  $|\varepsilon_{11}^{kp}|$  для периодического ряда последовательно размещенных волокон конечных размеров практически совпадает со значениями  $|\varepsilon_{11}^{kp}|$  для одного изолированного волокна конечных размеров в матрице, при соответствующих параметрах компонентов композита, показаны на рис. 2.19 пунктирными линиями.

Дополнительные результаты исследования устойчивости композитных материалов, армированных периодическими рядами волокон конечных размеров, с учетом взаимодействия между соседними волокнами в пределах ряда, представлены в работах [16, 17, 36, 37, 50].

### 2.3. Анализ приповерхностной неустойчивости.

В настоящем пункте в краткой форме представлены результаты исследования задач устойчивости композитного материала, слабоармированного короткими волокнами вблизи плоской свободной граничной поверхности, под действием сжимающего нагружения, направленного вдоль волокон параллельно поверхности (рис. 2.20).

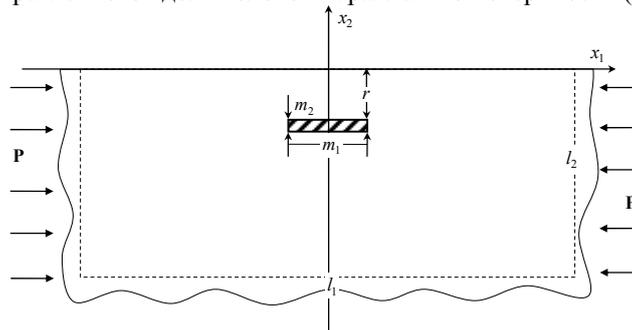


Рис. 2.20

В связи с малой концентрацией наполнителя взаимодействие между волокнами не учитывается, поэтому композитный материал в условиях плоской деформации, в декартовых координатах  $x_1 0x_2$ , моделируется полубесконечной матрицей, наполненной одним коротким волокном, направленным вдоль оси  $0x_1$ , которая совпадает со свободной граничной поверхностью.

**2.3.1. Специфические особенности приповерхностной неустойчивости.** Следует отметить, что в результате исследования докритического напряженно-деформированного состояния была обнаружена следующая ситуация: под действием сжимающей нагрузки в композитном материале, армированном коротким волокном возле свободной граничной поверхности, возникает несимметричное докритическое состояние, которое приводит к начальному искривлению волокна.

Рассмотрим сначала некоторые результаты исследования докритического напряженно-деформированного состояния. Расчеты были выполнены для следующих значений параметров компонентов композитного материала: отношения модулей Юнга  $E^* = E_a E_m^{-1} = 343$ ; коэффициенты Пуассона  $\nu_1 = \nu_2 = 0,4$ ; коэффициент формы армирующего элемента (волокна)  $LD^{-1} = m_1 / m_2 = 1000$ . Безразмерное расстояние между

волокном и поверхностью  $r^* = r/m_1$  последовательно изменялось в интервале  $0 \leq r^* \leq 15$ .

С целью исследования формы начального искривления волокна рассмотрим распределение вертикальных перемещений  $u_2(x_1)$  вдоль оси  $0x_1$  в диапазоне  $x_1 = \pm m_1$ , где интервал  $x_1 = \pm m_1/2$  соответствует материалу волокна, для линий  $x_2 = r + m_2/2$ ,  $r + m_2, r$ , которые проходят через горизонтальную ось волокна, линию нижнего и верхнего контакта компонентов для значения  $r^* = 0$ .

В случае, когда расстояние от поверхности до волокна достаточно велико ( $r^* = 15$ ), характер распределения перемещений материала волокна относительно собственной оси является симметричным, в то время как искривление самой оси волокна практически отсутствует. В том случае, когда волокно находится на поверхности ( $r^* = 0$ ), происходит искривление волокна вместе с граничной поверхностью, при этом наблюдается искривление оси волокна в сторону области, не заполненной материалом матрицы. Очевидно, несимметричность начального напряженно-деформированного состояния обусловлена взаимным влиянием волокна и свободной граничной поверхности под действием сжимающей нагрузки.

Далее рассмотрим изменение характера искривления волокна в зависимости от расстояния до граничной поверхности  $r^*$ . На рис. 2.21 и рис. 2.22 представлен характер распределения вертикальных перемещений  $u_2(x_1)$  в интервале  $x_1 = \pm m_1$  для выбранных линий  $x_2 = r, r + m_2/2$  (кривые 2, 3), которые проходят через горизонтальную ось волокна и верхний контакт компонентов, который находится ближе к граничной поверхности, а также линии граничной поверхности  $x_2 = 0$  (кривая 1) для следующих значений безразмерного расстояния волокна от поверхности:  $r^* = 0,1$  (рис. 2.21) и  $r^* = 0,2$  (рис. 2.22).

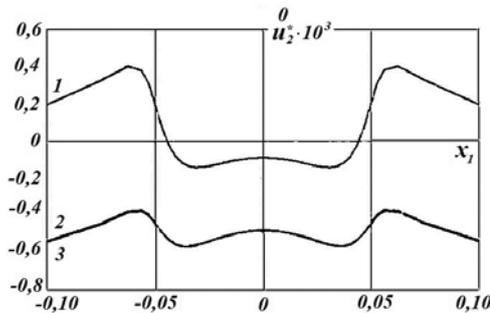


Рис. 2.21

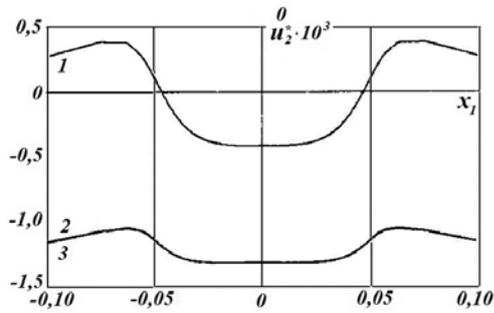


Рис. 2.22

Из представленных результатов следует, что с увеличением расстояния между волокном и граничной поверхностью происходит изменение направления изгиба волокна. Так, на рис. 2.23 показана зависимость от расстояния  $r^*$  величины смещения

$$u_2^* = u_2 \Big|_{x_1=0} \quad - u_2 \Big|_{x_1=m_1/2} \quad \text{для центра симметрии волокна } x_2 = r + m_2/2 \text{ относительно}$$

торцов (кривая 1), а также его проекции  $x_2 = 0$  на граничную поверхность (кривая 2).

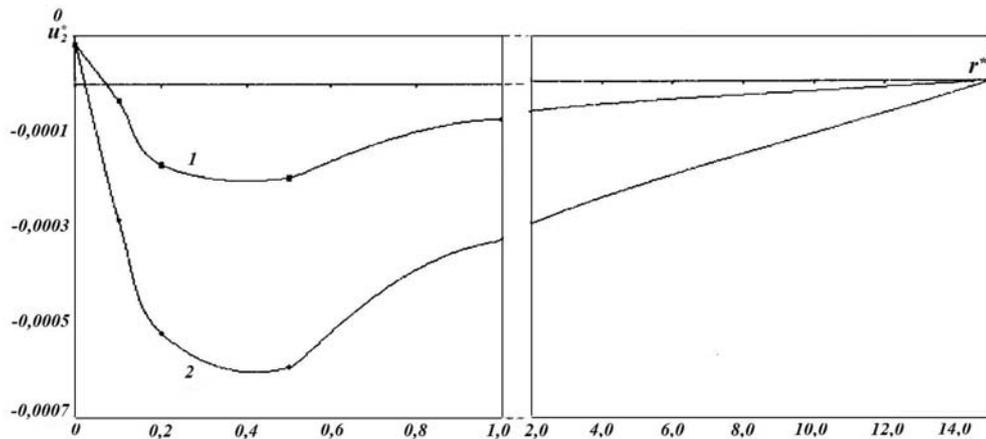


Рис. 2.23

Как следует из результатов, представленных на рис. 2.23, для значения расстояния  $r^* = 0$ , когда волокно находится на поверхности, средняя линия волокна смещается в область, не заполненную материалом матрицы, в то время как торцы волокна удерживаются в матрице. При удалении от поверхности материал матрицы, который находится между волокном и граничной поверхностью, как бы «вдавливает» волокно в матрицу и лишь на достаточно большом расстоянии  $r^* > 15$  взаимное влияние волокна от поверхности нейтрализуется.

**2.3.2. Анализ численных результатов задачи устойчивости.** Для решения поставленных задач в полубесконечной матрице выделяется прямоугольная расчетная область, содержащая материал наполнителя, одна из сторон которой совпадает со свободной граничной поверхностью. Размеры расчетной области  $l_i$  определяются в результате вычислительного эксперимента так, чтобы на сторонах прямоугольника, которые не совпадают с граничной поверхностью, выполнялись условия затухания возмущений, обусловленные концентрацией напряжений вокруг волокна.

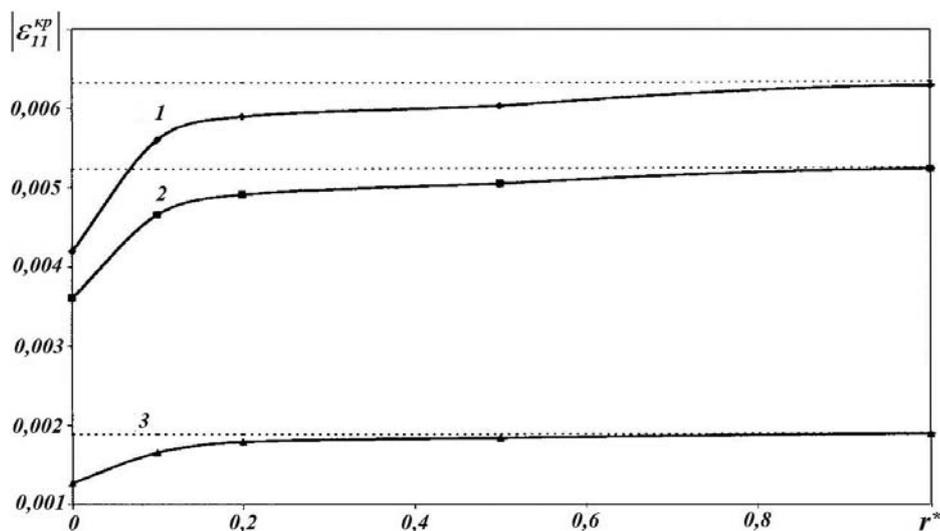


Рис. 2.24

Расчеты были выполнены для следующих параметров компонентов композита: отношения модулей Юнга  $E^* = E_a E_m = 343,1000$ ; коэффициент Пуассона  $\nu_a = \nu_m$ ; коэффициент формы наполнителя  $k = m_1 / m_2 = 200,1000$ . Безразмерное расстояние между волокном и поверхностью  $r^* = r / m_1$  последовательно изменялось в интервале  $0 \leq r^* \leq 15$ . На рис. 2.24 представлены результаты расчетов в виде зависимости абсолютной величины критической деформации  $\varepsilon_{11}^{kp}$  от безразмерной величины  $r^*$ , характеризующей расстояние между волокном и граничной поверхностью, для некоторых значений параметров ( $E^* = 1000$ ,  $k = 1000$  – кривая 1;  $E^* = 343$ ,  $LD^{-1} = 200$  – кривая 2;  $E^* = 1000$ ,  $LD^{-1} = 200$  – кривая 3). Пунктирными линиями показаны значения критической деформации для случая внутренней потери устойчивости одного волокна в матрице при соответствующих значениях геометрических и механических параметров компонентов композита.

На основании представленных результатов исследования устойчивости композитного материала, слабоармированного короткими волокнами возле плоской свободной граничной поверхности можно сделать вывод о возможной потере устойчивости под действием сжатия, направленного вдоль волокон, параллельно граничной поверхности. При этом, для величины расстояния между волокном и поверхностью, превышающей длину волокна, имеет место явление внутренней потери устойчивости, тогда как с уменьшением расстояния возникает явление приповерхностной неустойчивости композитного материала.

Более подробно результаты исследования устойчивости композитных материалов, слабоармированных волокнами конечных размеров, возле плоской свободной граничной поверхности, представлены в работах [18, 38].

**2.4. Заключение к Разделу 2.** Таким образом, в Разделе 2 приведены результаты исследований потери устойчивости в структуре композитных материалов при сжатии применительно к модели «волокон конечных размеров». Целесообразно отметить следующие основные моменты, относящиеся к Разделу 2.

Предложенная модель «волокон конечных размеров» при исследовании устойчивости композитных материалов, армированных короткими волокнами, позволяет учитывать конечность размеров армирующих элементов. В результате сравнения результатов указанных исследований с результатами, полученными в рамках модели «бесконечно длинных волокон», обнаружена согласованность результатов двух указанных моделей.

Путем анализа результатов решения задач устойчивости композитных материалов для случаев одного, двух волокон конечных размеров, периодических рядов одинаковых волокон, а также для случая короткого волокна возле свободной граничной поверхности, исследовано влияние механических и геометрических параметров компонентов композита на величину критической деформации и формы потери устойчивости армирующих элементов в структуре композитного материала с учетом взаимодействия. В результате анализа были обнаружены новые механические эффекты.

1. В случае одного волокна для сравнительно коротких армирующих элементов обнаружена форма потери устойчивости, соответствующая как бы «жесткому» повороту волокна, когда матрица не обеспечивает достаточного поддерживающего действия и при потере устойчивости возле торцов волокна как бы образуется «шарнир, близкий к пластическому шарниру».

2. В случае двух последовательно размещенных волокон конечных размеров обнаружены новые формы потери устойчивости, названные «общей изгибной формой», когда два армирующих элемента теряют устойчивость как бы по «одной изгибной форме», и «поворот с изгибом», когда материал матрицы между волокнами не обеспечивает достаточной поддержки и при потере устойчивости между волокнами как бы образуется «шарнир, близкий к пластическому шарниру».

3. В случае двух последовательно размещенных волокон конечных размеров зависимость критической деформации от величины расстояния между торцами волокон имеет немонотонный характер, что обусловлено заменой форм потери устойчивости при соответствующем расстоянии между волокнами.

Путем сравнительного анализа результатов расчетов, полученных с применением модели «бесконечно длинных волокон» и модели «волокон конечных размеров» выполнена оценка достоверности результатов исследования устойчивости композитных материалов в рамках модели «бесконечно длинных волокон» и установлены следующие пределы применимости указанных моделей:

- в интервале изменения геометрического параметра  $10 \leq LD^{-1} \leq 100$ , критические значения деформации вдоль оси  $Ox_1$ , вычисленные в рамках модели «волокон конечных размеров», в несколько раз меньше соответствующих значений, полученных в рамках модели «бесконечно длинных волокон»;

- в случае наиболее коротких волокон (при  $LD^{-1} = 10$ ) критические значения деформации вдоль оси  $Ox_1$ , вычисленные в рамках модели «волокон конечных размеров», почти на порядок меньше соответствующих значений, полученных в рамках модели «бесконечно длинных волокон».

Таким образом, в интервале изменения геометрического параметра  $10 \leq LD^{-1} \leq 100$ , модель «бесконечно длинных волокон» неприменима. Соответственно, армирующие элементы с геометрическим параметром  $LD^{-1} = 100$  являются уже достаточно короткими волокнами, что не допускает исследования устойчивости в рамках модели «бесконечно длинных волокон».

РЕЗЮМЕ. Статтю присвячено огляду та аналізу результатів, що отримано в рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл (ТЛГСДТ) та нової моделі (так звана модель «волокон скінченних розмірів») стосовно теорії стійкості волокнистих і шаруватих композитних матеріалів, в порівнянні з попередніми результатами, що були отримані в рамках відомої моделі (так званої моделі «нескінченно довгих волокон»). Стаття складається з двох частин.

Перша частина присвячена короткому історичному огляду експериментальних і теоретичних досліджень наступних двох проблем: перша проблема – втрата стійкості у внутрішній структурі композитів, друга проблема – послідовне руйнування композитів, коли вищевказана втрата стійкості – це початковий етап руйнування. Застосовність моделі «нескінченно довгих волокон» і моделі «волокон скінченних розмірів» стосовно втрати стійкості різних композитів доведено на основі аналізу експериментальних результатів різних авторів.

Друга частина цієї статті присвячена короткому представленню та розгляду результатів теоретичних досліджень, що отримані в рамках ТЛГСДТ і моделі «волокон скінченних розмірів» стосовно теорії стійкості волокнистих та шаруватих композитів. Представлено результати розв'язання задач стійкості композитів для наступних випадків: одного і двох коротких волокон, періодичного ряду коротких волокон і коротких волокон поблизу вільної поверхні кордону. Розглянуто вплив механічних і геометричних параметрів компонентів композита на критичні деформації та викривлення армуючих елементів (наповнювачів) в структурі композита. Слід підкреслити, що зазначені результати для моделі «волокон скінченних розмірів» отримано в рамках плоскої задачі з врахуванням перспективного розгляду відповідних просторових задач, що є актуальними.

1. Гольдман А.Я., Савельева Н.Ф., Смирнов В.И. Исследование механических свойств тканевых стеклопластиков при растяжении и сжатии нормально к плоскости армирования // Механика полимеров. – 1968. – № 5. – С. 803 – 809.
2. Гузь А.Н. О построении теории устойчивости однонаправленных волокнистых материалов // Прикл. механика. – 1969. – 5, № 2. – С. 62 – 70.
3. Гузь А.Н. Об определении теоретического предела прочности на сжатие армированных материалов // Докл. АН УССР, сер. А. – 1969. – № 3. – С. 236 – 238.
4. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1971. – 276 с.

5. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – К.: Наук. думка, 1973. – 272 с.
6. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К.: Вища шк., 1986. – 512 с.
7. Гузь А.Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии. – К.: Наук. думка, 1990. – 632 с.
8. Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2 томах. – К.: Литера, 2008.
  - Т. 1. Разрушение в структуре материала. – 592 с.
  - Т. 2. Родственные механизмы разрушения. – 736 с.
9. Гузь А.Н., Декрет В.А., Коханенко Ю.В. Плоские задачи устойчивости композитных материалов для случая наполнителя конечных размеров // Механика композитных материалов. – 2000. – 36, № 1 – С. 77 – 86.
10. Гузь А.Н., Декрет В.А., Коханенко Ю.В. Устойчивость композитных материалов, армированных наполнителем конечных размеров в условиях плоской деформации // Известия высших учебных заведений. Северокавказский регион. – 2001. – Спецвыпуск. – С. 60 – 63.
11. Гузь А.Н., Декрет В.А., Коханенко Ю.В. Взаимодействие коротких волокон в матрице при потере устойчивости. Плоская задача // «Проблемы механики» / Сборник статей к 90-летию со дня рождения А.Ю.Ишлинского. – М.: Физматлит, 2003. – С. 331 – 341.
12. Гузь А.Н., Руцицкий Я.Я., Гузь И.А. Введение в механику нанокompозитов. – К.: Академперіодика, 2010. – 398 с.
13. Гузь А.Н., Черевко М.А., Марголин Г.Г., Ромашко И.М. О разрушении однонаправленных бороалюминиевых композитов при сжатии // Мех. композитных материалов. – 1986. – № 2. – С. 226 – 230.
14. Декрет В.А. Розв'язання плоскої задачі стійкості композитного матеріалу, армованого двома короткими волокнами // Доп. НАНУ. – 2003. – № 8. – С. 37 – 40.
15. Декрет В.А. Плоска задача стійкості композита, армованого двома паралельними короткими волокнами // Доп. НАНУ. – 2003. – № 12. – С. 38 – 41.
16. Декрет В.А. Про стійкість композитного матеріалу, армованого періодичним рядом послідовно розміщених коротких волокон // Доп. НАНУ. – 2004. – № 11. – С. 47 – 50.
17. Декрет В.А. Про стійкість композитного матеріалу, армованого періодичним рядом паралельно розміщених коротких волокон // Доп. НАНУ. – 2004. – № 12. – С. 41 – 44.
18. Декрет В.А. Про стійкість композитного матеріалу, слабкоармованого короткими волокнами поблизу вільної поверхні // Доп. НАНУ. – 2006. – № 10 – С. 49 – 51.
19. Композитные материалы: в 8-ми томах / Под общей ред. Л. Браутмана и Д. Крока (Перевод с англ.). – М.: Мир (Т. 1, 2, 5 и 6); Машиностроение (Т. 3, 4, 7 и 8). – 1978 – 1979.
  - Т. 1. Поверхности раздела в металлических композитах. – 1978. – 511 с.
  - Т. 2. Механика композитных материалов. – 1978. – 564 с.
  - Т. 3. Применение композитных материалов в технике. – 1979. – 511 с.
  - Т. 4. Композитные материалы с металлической матрицей. – 1978. – 508 с.
  - Т. 5. Разрушение и усталость. – 1978. – 484 с.
  - Т. 6. Поверхности раздела в полимерных композитах. – 1978. – 294 с.
  - Т. 7. Анализ и проектирование конструкций. Ч. 1. – 1979. – 300 с.
  - Т. 8. Анализ и проектирование конструкций. Ч. 2. – 1979. – 264 с.

20. Лоули А., Козак М.Дж. Влияние поверхности раздела на характеристики композита в упруго-пластической области / «Композитные материалы, Т.1. Поверхности раздела в металлических композитах. – М.: Мир, 1978». – С. 231 – 365.
21. Методы статических испытаний армированных пластиков. – Рига: Зинатне, 1972. – 228 с.
22. Механика разрушения и прочность конструкций. Справочное пособие: в 4 томах / Под общей ред. В.В. Панасюка. – К.: Наук. думка, 1988 – 1990.
- Т. 1. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З. Основы механики разрушения материалов, 1988. – 488 с.
- Т. 2. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами, 1988. – 616 с.
- Т. 3. Ковчик С.Е., Морозов Е.М. Характеристики кратковременной трещиностойкости материалов и методы их определения, 1988. – 434 с.
- Т. 4. Романив О.Н., Ярема С.Я., Никифорчин Г.Н., Махутов Н.А., Стадник М.М. Усталость и циклическая трещиностойкость конструкционных материалов, 1990. – 680 с.
23. Механика композитов: в 12 томах / Под общей ред. А.Н.Гузя. – К.: Т. 1 – 4 Наук. думка; Т. 5 – 12 «А.С.К.». – 1993 – 2003.
- Т. 1. Статика материалов / Под ред. В.Т. Головчана, 1993. – 434 с.
- Т. 2. Динамика и устойчивость материалов / Под ред. Н.А. Шульги, 1993. – 430 с.
- Т. 3. Статистическая механика и эффективные свойства материалов / Под ред. Л.П. Хорошуна, 1993. – 390 с.
- Т. 4. Механика материалов с искривленными структурами / Под ред. А.Н.Гузя и С.Д. Акбарова, 1995. – 320 с.
- Т. 5. Механика разрушения / Под ред. А.А. Каминского, 1996. – 340 с.
- Т. 6. Технологические напряжения и деформации в материалах / Под ред. Н.А. Шульги и В.Т.Томашевского, 1997. – 396 с.
- Т. 7. Концентрация напряжений / Под ред. А.Н. Гузя, А.С. Космодамианского и В.П. Шевченко, 1998. – 388 с.
- Т. 8. Статика элементов конструкций / Под ред. Я.М. Григоренко, 1999. – 384 с.
- Т. 9. Динамика элементов конструкций / Под ред. В.Д. Кубенко, 1999. – 384 с.
- Т. 10. Устойчивость элементов конструкций / Под ред. И.Ю. Бабича, 2001. – 376 с.
- Т. 11. Численные методы / Под ред. Я.М. Григоренко и Ю.Н. Шевченко, 2002. – 448 с.
- Т. 12. Прикладные исследования (Под ред. А.Н. Гузя и Л.П. Хорошуна), 2003. – 400 с.
24. Наполнители для полимерных композитных материалов / Под ред. Г.С. Каца и Д.В. Милевски. Справочное пособие (перевод с англ.). – М.: Химия, 1981. – 738 с.
25. Разрушение: в 7 томах / Под ред. Г. Либовица. (Перевод с англ.). – М.: Мир (Т. 1, 2, 3, 7 ч. 1 и 7 ч. 2); Машиностроение (Т. 4 и 5); Металлургия (Т. 6). – 1973 – 1977.
- Т. 1. Микроскопические и макроскопические основы механики разрушения. – 1973. – 616 с.
- Т. 2. Математические основы механики разрушения. – 1975. – 764 с.
- Т. 3. Инженерные основы и воздействие внешней среды. – 1976. – 796 с.
- Т. 4. Исследование разрушения для инженерных расчетов. – 1977. – 400 с.
- Т. 5. Расчет конструкций на хрупкую прочность. – 1977. – 464 с.
- Т. 6. Разрушение металлов. – 1976. – 496 с.
- Т. 7, ч. 1. Разрушение неметаллов и композитных материалов. Неорганические материалы (стекла, горные породы, композиты, керамики, лед). – 1976. – 634 с.
- Т. 7, ч. 2. Разрушение неметаллов и композитных материалов. Органические материалы (стеклообразные полимеры, эластомеры, кость). – 1976. – 470 с.

26. Розен Б.У. Механика упрочнения композитов. В: «Волокнистые композитные материалы. – М.: Мир, 1967». – С. 54 – 94.
27. Розен Б.У., Дау Н.Ф. Механика разрушения волокнистых композитов. В: «Разрушение, т. 7, ч. 1. Разрушение неметаллов и композитных материалов. Неорганические материалы (стекла, горные породы, композиты, керамики, лед). – М.: Мир, 1976». – С. 300 – 366.
28. Чамис К. Микроскопические теории прочности. В: «Композитные материалы, т. 5. Разрушение и усталость. – М.: Мир, 1978». – С. 106 – 166.
29. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Наука, 1983. – 298 с.
30. Babich I.Yu. and Guz A.N. Deformation instability of laminated materials // Sov. Appl. Mech. – 1969. – **5**, N 5. – P. 488 – 491.
31. Budiansky H. Micromechanics // Composites and Structures. – 1983. – **16**, N 1. – P. 3 – 13.
32. Budiansky H., Fleck N.A. Compressive failure of fibre composites // J. Mech. Phys. Solids. – 1993. – **41**, N 1. – P. 183 – 211.
33. Budiansky H., Fleck N.A. Compressive kinking of fibre composites: a topical review // Applied Mechanics Review. – 1994. – **47**, N 6, Part 2. – P. 246 – 250.
34. *Comprehensive Composite Materials*: In 6 volumes / Editor-in-Chief: A.Kelly, C. Zweben. – Elsevier. – 2006.
- Vol.1. Fiber reinforcements and general theory of composites / Editor: Tsu-Wei Chou. – 802 p.
- Vol. 2. Polymer matrix composites. (Editors: R. Talreja, J.-A.E. Manson). – 669 p.
- Vol. 3. Metal matrix composites / Editor: T.W. Clyne. – 669 p.
- Vol. 4. Carbon/ Carbon, Cement and Ceramic Composites / Editor: R. Warren. – 697 p.
- Vol. 5. Test methods, nondestructive evaluation and smart materials / Editors: L. Carlson, R.L. Crane, K. Uchino. – 632 p.
- Vol. 6. Design and applications / Editors: W.G. Bader, K. Kedsvard, Y.Sawada. – 809 p.
35. *Comprehensive Structural Integrity*: In 10 volumes / Int. Advisory Board: Ian Milne, R.O.Ritchie, B.Karihaloo. – Elsevier. – 2006.
- Vol. 1. Structural integrity assessment – example and case studies / Editors: Ian Milne, R.O.Ritchie, B.Karihaloo.
- Vol. 2. Fundamental theories and mechanisms of failure / Editors: B.Karihaloo, W.G.Knauss.
- Vol. 3. Numerical and computational methods / Editors: R. de Borst, H.A.Mang.
- Vol. 4. Cyclic loading and fatigue / Editors: R.O.Ritchie, Y.Murakami.
- Vol. 5. Creep and high-temperature failure /Editor: A.Saxena.
- Vol. 6. Environmentally-assisted fracture / Editors: J.Petit, Peter Scott.
- Vol. 7. Practical failure assessment methods / Editors: R.A.Ainsworth, R.H.Schwalbe.
- Vol. 8. Interfacial and nanoscale failure / Editors: W.Gerberich, Wei Yang.
- Vol. 9. Bioengineering / Editors: Yin-Wing Mai, Swee-Hin Teoh.
- Vol. 10. Indexes.
36. Dekret V.A. Two-dimensional buckling problem for a composite reinforced with a periodic row of collinear short fibers // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 6. – P. 684 – 691.
37. Dekret V.A. Plane stability problem for a composite reinforced with a periodic row of parallel fibers // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 5. – P. 498–504.
38. Dekret V.A. Near-surface instability of composites weakly reinforced with short fibers //Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 6. – P. 619 – 625.

39. *Dow N.F., Gruntfest I.J.* Determination of most needed potentially possible improvements in materials for ballistic and space vehicles // General Electric Co., Space Sci. Lab., TIRS 60 SD 389, June 1960.
40. *Fleck N.A.* Compressive failure of fiber composites. In: «Advances in Applied Mechanics, vol. 33. – New York: Academic Press, 1997». – P. 43 – 119.
41. *Guz A.N.* Mechanics of composite-material failure under axial compression (brittle failure) // *Sov. Appl. Mech.* – 1982. – **18**, N 10. – P. 863 – 872.
42. *Guz A.N.* Stability theory for unidirectional fiber-reinforced composites // *Int. Appl. Mech.* – 1996. – **32**, N 8. – P. 577 – 586.
43. *Guz A.N.* Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – Berlin: Springer-Verlag, 1999. – 556 p.
44. *Guz A.N.* On one two-level model in the mesomechanics of compression fracture of cracked composites // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 3. – P. 274 – 285.
45. *Guz A.N.* Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 1 – P. 1 – 57.
46. *Guz A.N.* and *Guz I.A.* On the theory of stability of laminated composites // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, N 4. – P. 323 – 329.
47. *Guz A.N.* and *Guz I.A.* On models in the theory of stability of multi-walled carbon nanotubes // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **40**, N 1. – P. 1 – 29.
48. *Guz A.N., Dekret V.A.* On two models in the three-dimensional theory of stability of composites // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 8. – P. 839 – 854.
49. *Guz A.N., Dekret V.A.* Interaction of Two Parallel Short Fibers in the Matrix at Loss of Stability // *Computer Modeling in Engineering & Sciences.* – 2006. – **13**, N 3. – P. 165 – 170.
50. *Guz A.N., Dekret V.A.* Stability problem of composite material reinforced by periodical row of short fibers // *Computer Modeling in Engineering & Sciences.* – 2009. – **42**, N 3. – P. 177 – 186.
51. *Guz A.N., Dekret V.A.* Stability Loss in Nanotube Reinforced Composites // *Computer Modeling in Engineering & Sciences.* – 2009. – **49**, N 1. – P. 69 – 80.
52. *Guz A.N., Dekret V.A., Kokhanenko Yu.V.* Solution of plane problems of the three-dimension problems stability of a ribbon-reinforced composite // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 10. – P. 1317 – 1328.
53. *Guz A.N., Dekret V.A., Kokhanenko Yu.V.* Planar Stability Problem of Composite Weakly Reinforced by Short Fibers // *Mechanics of Composite Materials and Structures.* – 2005. – N 12. – P. 313 – 317.
54. *Guz A.N., Dekret V.A., Kokhanenko Yu.V.* Two-dimensional stability problem for interacting short fibers in a composite: in-line arrangement // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 9. – P. 994 – 1001.
55. *Guz A.N., Lapusta Yu.N. and Samborskaya A.N.* A micromechanics solutions of a 3D internal instability problem for a fiber series on an infinite matrix // *Int. Journal of Fracture.* – 2002. – **116**, N 3. – P. L55 – L60.
56. *Guz A.N., Lapusta Yu.N., Samborskaya A.N.* 3D model and estimation of fiber interaction effects during internal instability in non-linear composites // *Int. Journal of Fracture.* – 2005. – **134**, N 3 – 4. – P. L45 – L51.
57. *Guz A.N., Kritsuk A.A., Emel'yanov R.F.* Character of the failure of unidirectional glass-reinforced plastic in compression // *Sov. Appl. Mech.* – 1969. – **5**, N 9. – P. 997 – 999.
58. *Guz A.N., Samborskaya A.N.* General stability problem of a series of fibers in an elastic matrix // *Sov. Appl. Mech.* – 1991. – **27**, N 3. – P. 223 – 230.
59. *Handbook of Fillers and Reinforcements for Plastics* (Eds Katz H., Milevski J.V.) – New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1978. 652 p.

60. *Jochum Ch., Grandidier J.-C.* Microbuckling elastic modeling approach of a single carbon fiber embedded in an epoxy matrix // *Composites Science and Technology*. – 2004. – **64**. – P. 2441 – 2449.
61. *Kaminsky A.A.* Mechanics of long-time fracture of viscoelastic bodies with cracks: theory, experiment (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 5. – P. 3 – 79.
62. *Khoroshun L.P., Nazarenko L.V.* Deformation and damage of composites with anisotropic components (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 4. – P. 388 – 455.
63. *Kokhanenko Yu.V.* Numerical study of three-dimensional stability problems for laminated and ribbon-reinforced composites // *Int. Appl. Mech.* – 2001, – **37**, N 3. – P. 317 – 345.
64. *Lourie O., Cox D.M. and Wagner H.D.* Buckling and collapse of embedded carbon nanotubes // *Phys. Rev. Letters*. – 1998. – **81**, N 8. – P. 1638 – 1641.
65. *Micromechanics* of composite materials: Focus on Ukrainian research, Special Issue // *Appl. Mech. Rev.* – 1992. – **45**. – P. 13 – 101.
66. *Pinnel M.R., Lawley F.* Correlation on uniaxial yielding and substructure in aluminium – stainless steel composites // *Metall. Trans.* – 1970. – **1**, N 5. – P. 929 – 933.
67. *Rosen B.W.* Mechanics of Composite Strengthening. In: «Fiber Composite Materials, American Society for Metals, Metals Park, Ohio. – 1965». – P. 37 – 75.
68. *Sadovsky M.A., Pu S.L., Hussain M.A.* Buckling of microfibers // *J. Appl. Mech.* – 1967. – **34**, N 4. – P. 295 – 302.
69. *Satish Kumar, Tensuya Uchida, Thuy Dang, Xiefei Zhang, Young-Bin Park.* Polymer / Carbon Nano Fiber Composite Fibers // *SAMPE* – 2004. – Long Beach, CA May 16 – 20, 2004. – P. 1 – 12.
70. *Schuerch H.* Prediction of compressive strength in uniaxial boron fiber metal matrix composite material // *AIAA Journal*. – 1966. – **4**, N 1. – P. 102 – 106.
71. *Shetty H.R., Chou T.W.* Mechanical-properties and failure characteristics of FP-aluminum and W-aluminum composites // *Metall. Trans. A*. – 1985. – **16**, N 5. – P. 853 – 864.
72. *Soutis C., Flek N.A. and Smith P.A.* Failure prediction technique for compression loaded carbon fibre-epoxy laminate with open holes // *J. Comp. Mat.* – 1991. – **25**. – P. 1476 – 1498.
73. *Thostenson E.T., Chou T.W.* Nanotube buckling in aligned multi-wall carbon nanotube composites // *Carbon*. – 2004. – **42**, N 14. – P. 3015 – 3018.
74. *Wadee M.A., Hunt G.W., Peletier M.A.* Kink band instability in layered structures // *J. Mech. Phys. Solids*. – 2004. – **52**. – P. 1071 – 1091.

Поступила 17.10.2014

Утверждена в печать 22.12.2015