

А. Е. Закржевский

МЕТОД РАЗВЕРТЫВАНИЯ КОСМИЧЕСКОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ
С ПРИВЕДЕНИЕМ К МЕСТНОЙ ВЕРТИКАЛИ

*Ин-т механики им. С.П.Тимошенко НАНУ
Ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина, e-mail: alex.e.zakr@gmail.com*

Abstract. A space tether of two bodies connected by an elastic massless string is studied. A new in principle approach to solving the problem on deployment of the space tether in a circular orbit with setting its to a local vertical is formulated and theoretically substantiated. This approach is based on use of the theorem on change of the moment of momentum. It allows to construct the program control of the length of letting out string that provides the purposeful change of the moment of momentum of the tether. The tether is under action of the moment of forces of the Earth gravitational field up to the value, which corresponds to a position of the deployed tether along the local vertical. An example of application of the developed approach to the case of deployment of the particular tether demonstrates a simplicity of using the method in practice as well as the way of verification of the mathematical model.

Key words: flexible space tether, new method of deployment, verification of mathematical model, numerical simulation.

1. Введение.

Идеи использования системы тел, соединенных длинными гибкими связями-тросами, в космическом пространстве восходят к работам К.Э. Циолковского и имеют вековую историю. В них изложены идеи и использования слабых сил градиента силы тяжести и создания искусственной силы тяжести путем вращения космической системы вокруг общего центра масс [2, 3].

Существенный интерес к созданию космических тросовых систем (КТС) появился в середине 70-х годов в связи с предложением G. Colombo и M.D. Grossi (Смитсоновская астрофизическая лаборатория, США) использовать зонд на 100 км тросе для исследования параметров полей Земли и ее атмосферы на низких высотах. Новизна и своеобразие задач и методов исследования поведения КТС привлекали к ним внимание специалистов. С начала 80-х происходит формирование области КТС в отдельную область исследования космического пространства.

К настоящему времени развитие КТС находится в фазе экспериментальной натурной отработки. Накопленный материал дает богатые возможности, с одной стороны, для обоснованного выбора реальных на данный момент экспериментальных и полетных исследований, а с другой стороны, для постановки новых задач, исследование которых ранее казалось неоправданным и преждевременным. За последние сорок лет разработано множество различных проектов использования тросовых систем в космосе. Большинство из них связано с использованием радиальной связки двух тел – космического аппарата (КА) и субспутника. Так, например, высокая устойчивость радиальной КТС позволила предложить ее использование в качестве основного несущего элемента для различных вариантов солнечных космических электростанций [11, 12], для гравитационной стабилизации КА и для транспортировки грузов между модулями (космический лифт) [16], в качестве лунного космического лифта [13, 22] и

космического "эскалатора" [9]. Условия микрогравитации на концевых телах связки могут использоваться как для научных и технологических процессов, так и для жизнеобеспечения КА и космических станций (КС) [19], например, для перекачки жидкости [14] или улучшения условий жизни на орбите [8].

Количество публикаций, посвященных исследованию различных аспектов функционирования космических тросовых систем, огромно. В качестве работ, в которых проведен глубокий анализ возможностей использования КТС, следует отметить монографии [11, 15]. Среди проблем, связанных с созданием КТС, особое место занимает проблема развертывания связки двух космических объектов в заданное положение. Этой проблеме также посвящено большое количество публикаций. Их различия определяются, в первую очередь, принятой физической моделью связки, а также характером стабилизирующего управления, применяемого для приведения связки в заданное конечное положение.

В практике применения КТС их наиболее востребованная конфигурация на орбите такая, при которой центр гравитации системы движется по круговой орбите и связь расположена вдоль местной вертикали.

В случае постоянной длины связи эта вертикальная конфигурация – устойчивое относительное равновесие системы в орбитальном базисе. Конечно, теоретически это требует абсолютно сферической Земли. В пределах технической точности это предположение можно считать выполненным [29].

При изменении длины связи конфигурация вдоль местной вертикали теряет свою устойчивость в соответствии с теоремой об изменении момента количества движения [17]. Важное эксплуатационное требование, чтобы субспутник во время развертывания или свертывания оставался на местной вертикали, может быть достигнуто только при управлении его движением. В принципе, для управления движением концевых тел связки могут использоваться тяговые устройства, расположенные непосредственно на них, однако это существенно усложняет всю систему. Поэтому в литературе появилось много публикаций, результаты которых демонстрируют возможности более простых способов управления положением связки. Следует отметить, что во время развертывания чаще всего нет необходимости удерживать связку в непосредственной близости от вертикали. Достаточно привести ее к местной вертикали в конце процесса развертывания.

Ряд авторов рассматривают в качестве начального этапа свободное развертывание [25]. В этом случае после начального отталкивания субспутника от основного КА нить вытягивается практически без сопротивления под действием градиента сил гравитации. В результате после торможения нити в конце развертывания связка начинает совершать либрационные (маятниковые) колебания в плоскости орбиты относительно радиального равновесного положения и из-за внутреннего демпфирования в вязкоупругой связи в конечном счете успокаивается в положении, близком к местной вертикали. Этот процесс очень длительный, в связи с чем разрабатываются методы его ускорения. В работе [6] возникшие при первичном развертывании маятниковые колебания связки с упруго-вязкой нитью демпфируются параметрическим подтягиванием связки вблизи точки возврата маятниковых колебаний и выпуском ее снова в окрестности местной вертикали; это – процесс, обратный параметрическому возбуждению маятника. Линейное управление с обратной связью помогает достигнуть заключительного равновесия более эффективно, как только амплитуда маятника становится достаточно малой.

В принципе трудно представить себе абсолютно свободное развертывание, поскольку силы сопротивления вытягиванию нити из контейнера не могут отсутствовать полностью. Кроме того, на завершающем этапе такие силы сопротивления могут сыграть полезную роль, предотвращая недопустимые ударные нагрузки. В связи с этим появились работы, учитывающие управляемое натяжение связки и на первом этапе развертывания [7].

Известны способы развертывания орбитальных тросовых систем, предусматривающие выпуск троса с регулированием скорости его выпуска. При выпуске троса с постоянной скоростью реализуется так называемое "равномерное" развертывание, а при выпуске троса со скоростью, пропорциональной длине его выпущенной части, – так называемое "экспоненциальное" развертывание. Известны также многочисленные

модификации такого способа развертывания, когда скорость выпуска троса регулируется в зависимости от длины его выпущенной части и в соответствии с заданным угловым движением связки относительно местной вертикали. Описание и анализ различных способов развертывания орбитальных тросовых систем с регулированием скорости выпуска троса приведены в работах [1, 10, 15, 19].

Все способы развертывания орбитальных тросовых систем с регулированием скорости выпуска троса имеют один общий недостаток. При таком управлении выпуском троса невозможно осуществить гашение продольных колебаний связки, возникающих вследствие упругости троса. Увеличение интенсивности продольных колебаний способно привести к полному ослаблению троса, что, в свою очередь, может вызвать перебои в работе устройств его выпуска.

Известны способы развертывания орбитальных тросовых систем, предусматривающие выпуск троса с регулированием силы его натяжения. Основным преимуществом таких способов развертывания является возможность непосредственного гашения продольных колебаний связки в процессе выпуска троса.

Описание таких способов развертывания и устройств для их реализации приведено в работах [23, 24, 28]. В [27] для простой системы с невесомой связью решена задача оптимального управления по быстродействию, в результате чего получен «bang-bang» закон управления натяжением связи, позволяющий перевести спутник из положения относительного равновесия вдоль местной вертикали в такое же положение на значительном удалении от основного КА без существенного отклонения спутника от местной вертикали и с постоянно натянутой связью. Недостатком такого способа является сложность практической реализации регулирования силы натяжения выпускаемого слабонатянутого троса.

Varlow и др. [7] провели всестороннее исследование управляемого развертывания, сравнивая шесть его различных сценариев: (1) свободное развертывание только под действием сил градиента гравитации; (2) тормозимое развертывание; (3) развертывание на основе закона Кисселя с применением линейного PD контроллера, использующего информацию о натяжении связи, длине и скорости выхода нити; (4) разомкнутое оптимальное по быстродействию управление; (5) управление маятниковым движением; (6) стабилизация после стратегии хаотического управления. Steindl и др. [26, 27] разработали оптимальные контроллеры для создания силы управления развертыванием и свертыванием КТС, основанные на методе многократной стрельбы. Williams [30] предложил контроллер для движения КТС в плоскости орбиты, который показывает высокую вычислительную эффективность. Williams и Trivailo [31] также сделали сравнение различных функций стоимости для оптимального управления КТС в плоском случае.

Исследование было позже расширено для того, чтобы управлять либрациями КТС на эллиптических орбитах, отслеживая периодические траектории либрации [32]. Padgett и Mazzoleni [21] исследовали плоскую гантелевидную систему с экспоненциальным управлением длиной и нашли, что связка может быть развернута без вращения. В некоторой степени вопросы, рассматриваемые ниже, отражены в работах [4, 33].

Трудности реализации описанных методов восстановления стабильной вертикальной конфигурации развернутой связки на круговой орбите можно избежать, если следовать по пути программного изменения длины развертываемой связи и момента количества движения всей связки.

Ведь суть проблемы состоит в том, чтобы развертывая связку из состояния ее маятниковых колебаний в плоскости орбиты, которые возникают при традиционном развертывании на промежуточную длину, изменить ее момент количества движения до той величины, какой должна обладать развернутая вдоль местной вертикали связка заданной длины.

Для изменения момента количества движения следует использовать момент гравитационного поля сил. Как это сделать, будет показано ниже. Основным условием, позволяющим реализовать такой процесс с высокой точностью, является наличие натяжения нити в течение всего процесса развертывания.

2. Математическая модель системы.

Следует различать два основных вида связок. К первому можно отнести связки, состоящие из космических тел, массы которых существенно различаются, например, зонд небольшой массы, развертываемый с большого КА или с космической станции. Ко второму виду можно отнести связки двух объектов, имеющих близкие или равные по величине массы.

Не нарушая общности постановки задачи, в качестве модели связки выберем две равные точечные массы, соединенные упругой невесомой нитью. Пренебрежение размерами концевых тел обосновывается тем фактом, что далее не рассматриваются режимы движения, в которых возможно наматывание связи на концевые тела. Пренебрежение весом нити оправдано для связок с непроводящей электрический ток связью, выполняемой из современных легких материалов. Суммарная масса таких связей в условиях их слабого натяжения на околоземных орбитах составляет незначительную часть от общей массы связки. Кроме того, опыт предыдущих исследований, в частности, анализ результатов, проведенный в [27], свидетельствует о том, что управляемое движение континуальной системы с массивной связью, описываемой дифференциальными уравнениями в частных производных, практически не отличается от такового для связки, масса которой сосредоточена в концевых телах. Кроме того, различием в положении центра гравитации и центра масс связки будем пренебрегать, так как при длине расположенной вдоль местной вертикали связки 5 км расстояние между этими точками чуть больше 1 м.

В результате примем, что по круговой орбите вокруг Земли движется центр масс связки.

Для удобства дальнейшего описания динамики рассматриваемой механической системы введем следующие правые координатные базисы: абсолютный – ось $O_E Z_A$ совпадает с осью мира и направлена на Полярную звезду, ось $O_E X_A$ направлена в точку весеннего равноденствия и орбитальный $Cx^{or}y^{or}z^{or}$

(рис. 1) — ось Cx^{or} совпадает с вектором скорости центра масс связки, ось Cy^{or} совпадает с вектором угловой скорости орбитального движения, ось Cz^{or} совпадает с местной вертикалью.

При нулевых значениях параметров Ω, i, u , которые определяют взаимную ориентацию этих координатных базисов, при использовании традиционных наименований осей их названия не совпадают (рис. 1). Чтобы этого не было, можно использовать еще два вспомогательных поворота. В результате матрица перехода между этими базисами принимает вид

$$T_{Abs_Orb} = \begin{vmatrix} -ci\ cu\ so - co\ su, & ci\ co\ cu - so\ su, & cu\ si \\ si\ so, & -co\ si, & ci \\ co\ cu - ci\ so\ su, & cu\ so + ci\ co\ su, & si\ su \end{vmatrix}.$$

Здесь $ci = \cos i, si = \sin i, cu = \cos u, su = \sin u, co = \cos \Omega, so = \sin \Omega$.

На этом же рисунке показана связка двух точечных масс и действующие на нее силы гравитационного поля, в качестве модели которого выбрано центральное поле сил. Здесь видно, что \vec{R}_C легко задать в абсолютном базисе, зная параметры орбиты и положение центра масс двух точек на ней. Соответственно, векторы \vec{r}_1, \vec{r}_2 можно просто задать проекциями в орбитальном базисе: $\vec{r}_1 = \{x_1^{or}, y_1^{or}, z_1^{or}\}, \vec{r}_2 = \{x_2^{or}, y_2^{or}, z_2^{or}\}$. Вы-

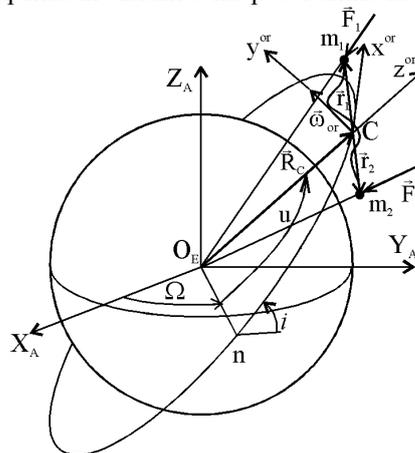


Рис. 1

берем эти проекции вместе с их производными по времени в орбитальном базисе в качестве фазовых переменных задачи.

Внешние гравитационные силы в орбитальном базисе, следуя [5], определим в виде

$$\vec{F}_i = -\frac{\mu m_i}{(x_i^{or})^2 + (y_i^{or})^2 + (z_i^{or} + |\vec{R}_C|)^2} \frac{\vec{R}_C}{|\vec{R}_C|} \quad (i=1,2). \quad (1)$$

Размеры связки малы по сравнению с расстоянием $|\vec{R}_C|$ до центра притяжения. С точностью до членов второго порядка малости относительно величин r_i / R_C компоненты этих гравитационных сил можно представить в виде

$$\vec{F}_i = \left\{ -\frac{\mu m_i}{R_C^2} \frac{x_i^{or}}{R_C}, -\frac{\mu m_i}{R_C^2} \frac{y_i^{or}}{R_C}, -\frac{\mu m_i}{R_C^2} + 2\frac{\mu m_i}{R_C^2} \frac{z_i^{or}}{R_C} \right\} = \vec{F}_i^{(0)} + \vec{F}_i^{(1)} \quad (i=1,2), \quad (2)$$

где

$$\vec{F}_i^{(0)} = \left\{ 0, 0, -\frac{\mu m_i}{R_C^2} \right\} \quad (3)$$

– гравитационные силы, действующие на центр масс связки. Под действием этих сил центр гравитации, который в рассматриваемой постановке задачи принимается совпадающим с центром масс, движется по кеплеровой орбите. Уравнение движения центра масс имеет вид

$$\ddot{\vec{R}}_C = -\frac{\mu \vec{R}_C}{|\vec{R}_C|^3}, \quad (4)$$

где вектор равнодействующей двух сил (2) коллинеарен вектору \vec{R}_C .

Уравнения движения точечных масс связки можно записать, используя второй закон Ньютона, справедливый в инерциальном базисе:

$$m_1 \ddot{\vec{R}}_1 = \vec{F}_1 - T \vec{e}_{r1}; \quad (5)$$

$$m_2 \ddot{\vec{R}}_2 = \vec{F}_2 - T \vec{e}_{r2}.$$

Здесь \vec{e}_{ri} – орты векторов \vec{r}_i , T – величина силы натяжения связки и любой другой силы, совпадающей с линией ее действия, например, силы пружины, применяемой для начального расталкивания тел,

$$\vec{R}_1 = \vec{R}_C + \vec{r}_1; \quad \vec{R}_2 = \vec{R}_C + \vec{r}_2. \quad (6)$$

Подставив (2) с учетом (3) и (6) в уравнения (5), разделенные на m_1 и m_2 соответственно, приходим к уравнениям относительного движения связки в виде

$$\ddot{\vec{r}}_i = -\frac{\mu \vec{r}_i}{|\vec{R}_C|^3} - \frac{T}{m_i} \vec{e}_{ri} + \frac{\vec{F}_i^{(1)}}{m_i}. \quad (7)$$

В дальнейшем будем рассматривать движение концевых масс связки в орбитальном базисе, который не является инерциальным. Рассматривая абсолютные производные по времени в орбитальном базисе, для производных векторов \vec{r}_i можно записать:

$$\dot{\vec{r}}_i = \overset{o}{\vec{r}}_i + \vec{\omega}^{orb} \times \vec{r}_i; \quad \ddot{\vec{r}}_i = \overset{oo}{\vec{r}}_i + 2\vec{\omega}^{orb} \times \overset{o}{\vec{r}}_i + \overset{o}{\vec{\omega}}^{orb} \times \vec{r}_i + \vec{\omega}^{orb} \times (\vec{\omega}^{orb} \times \vec{r}_i) \quad (i=1,2). \quad (8)$$

Здесь символ “ $\overset{o}{}$ ” над вектором обозначает его производную по времени в орбитальном базисе.

В результате уравнения движения (5) для общего случая эллиптической орбиты можно представить в виде

$$\overset{oo}{\vec{r}}_i = -2\bar{\omega}^{orb} \times \overset{o}{\vec{r}}_i - \overset{o}{\bar{\omega}}^{orb} \times \vec{r}_i - \bar{\omega}^{orb} \times (\bar{\omega}^{orb} \times \vec{r}_i) + (\vec{F}_i^{(1)} - T\vec{e}_{r_i}) / m_i \quad (i=1, 2). \quad (9)$$

Проекции векторов, входящих в правые части, в орбитальном базисе имеют вид

$$\vec{r}_i = \{x_i^{orb}, y_i^{orb}, z_i^{orb}\}, \bar{\omega}^{orb} = \{0, \omega^{or}, 0\}.$$

Следовательно, имеют место такие равенства:

$$\bar{\omega}^{orb} \times \overset{o}{\vec{r}}_i = \{\omega^{or} \dot{z}_i^{or}, 0, -\omega^{or} \dot{x}_i^{or}\}; \quad (10)$$

$$\overset{o}{\bar{\omega}}^{orb} \times \vec{r}_i = \{\dot{\omega}^{or} z_i^{or}, 0, -\dot{\omega}^{or} x_i^{or}\}; \quad (11)$$

$$\bar{\omega}^{orb} \times (\bar{\omega}^{orb} \times \vec{r}_i) = \bar{\omega}^{orb} \times \{\omega^{or} z_i^{or}, 0, -\omega^{or} x_i^{or}\} = \{-(\omega^{or})^2 z_i^{or}, 0, -(\omega^{or})^2 x_i^{or}\}. \quad (12)$$

В проекциях слагаемых уравнения (9) на оси орбитального базиса имеем

$$-2\bar{\omega}^{orb} \times \overset{o}{\vec{r}}_i = \{-2\omega^{or} \dot{z}_i^{or}, 0, 2\omega^{or} \dot{x}_i^{or}\}; \quad (13)$$

$$-\overset{o}{\bar{\omega}}^{orb} \times \vec{r}_i = \{-\dot{\omega}^{or} z_i^{or}, 0, \dot{\omega}^{or} x_i^{or}\}; \quad (14)$$

$$-\bar{\omega}^{orb} \times (\bar{\omega}^{orb} \times \vec{r}_i) = \{(\omega^{or})^2 z_i^{or}, 0, (\omega^{or})^2 x_i^{or}\}. \quad (15)$$

Тогда уравнения движения рассматриваемой связки на круговой орбите ($\dot{\omega}^{or} = 0$) принимают окончательный вид

$$\overset{oo}{\vec{r}}_i = \{-2\omega^{or} \dot{z}_i^{or} + (\omega^{or})^2 z_i^{or} - \frac{\mu}{r_C^2} \frac{x_i^{or}}{r_C} - T e_{r_i}(1) / m_i;$$

$$-\frac{\mu}{r_C^2} \frac{y_i^{or}}{r_C} - T e_{r_i}(2) / m_i;$$

$$2\omega^{or} \dot{x}_i^{or} + (\omega^{or})^2 x_i^{or} + 2\frac{\mu}{r_C^2} \frac{z_i^{or}}{r_C} - T e_{r_i}(3) / m_i\} \quad (i=1, 2), \quad (16)$$

где $e_{r_i}(1), e_{r_i}(2), e_{r_i}(3)$ – направляющие косинусы ортов точечных масс в орбитальном базисе. Как было упомянуто выше, неизвестными являются проекции векторов \vec{r}_1, \vec{r}_2 на оси орбитального базиса и их производные по времени. Для замыкания системы двенадцати уравнений первого порядка относительно указанных неизвестных в каждый момент времени должно быть известно выражение для величины силы натяжения связки. Этот вопрос рассмотрен ниже.

3. Метод проверки математической модели.

В процессе интегрирования уравнений движения любой механической системы могут возникнуть ошибки, связанные с ошибками в математических выкладках исследователя. Иногда такие ошибки незначительно искажают результаты в рассмотренной области значений параметров исследуемой системы и на первый взгляд незаметны. Чтобы избежать такой ситуации, целесообразно использовать независимую проверку результатов, используя общие теоремы механики. Для космических объектов рассматриваемого типа, подверженных действию известных внешних сил, для проверки результатов интегрирования целесообразно использовать теорему об изме-

нении момента количества движения точек системы. Запишем эту теорему в следующем виде:

$$\vec{K}^C(t) = \vec{K}^C(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{m}^C(\tau) d\tau. \quad (17)$$

В принципе, эта теорема справедлива в том случае, когда точка C , относительно которой вычисляется момент количества движения точек материальной системы, неподвижна в инерциальном базисе, как например, точка O_E в абсолютном базисе (рис. 1). Однако, с помощью несложных преобразований легко показать, что в случае рассматриваемого здесь движения точки C по кеплеровой орбите указанная теорема остается справедливой при вычислении момента количества движения и моментов внешних сил относительно точки C .

Действительно, вектор кинетического момента произвольной системы точек можно записать в виде

$$\vec{K}^{O_E} = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{v}_i m_i = \sum_i m_i (\vec{R}_C + \vec{R}_i) \times (\vec{v}_C + \vec{\omega}^{orb} \times \vec{r}_i + \vec{r}_i^o).$$

Очевидно, это выражение можно переписать так:

$$\begin{aligned} \vec{K}^{O_E} &= \vec{R}_C \times \vec{v}_C \sum_i m_i + \vec{R}_C \times \sum_i m_i \vec{\omega}^{orb} \times \vec{r}_i + \vec{R}_C \times \sum_i m_i \vec{r}_i^o + \\ &+ \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_C + \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega}^{orb} \times \vec{r}_i) + \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{r}_i^o. \end{aligned}$$

Слагаемые 2, 3, 4 этой записи обращаются тождественно в нуль, поскольку $\sum_i m_i \vec{r}_i = M \vec{r}_C \equiv 0$ и $\sum_i m_i \vec{r}_i^o = M \vec{r}_C^o \equiv 0$. Теперь можно записать

$$\vec{K}^{O_E} = \vec{R}_C \times \vec{v}_C \sum_i m_i + \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega}^{orb} \times \vec{r}_i) + \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{r}_i^o$$

или

$$\vec{K}^{O_E} = \vec{R}_C \times \vec{v}_C M + \Theta^C \cdot \vec{\omega}^{orb} + \vec{K}_r^C = \vec{R}_C \times \vec{v}_C M + \vec{K}_r^C.$$

Здесь $\vec{R}_C \times \vec{v}_C M$ – момент количества движения материальной точки C массы M относительно точки O_E . Если точка C движется по кеплеровой орбите (в общем случае эллиптической), то в соответствии со вторым законом Кеплера векторное произведение $\vec{R}_C \times \vec{v}_C M = \{0, r_C^2 \omega^{or} M, 0\}$ остается постоянным по величине и направлению вектором в абсолютном пространстве. Таким образом, под действием гравитационного момента, возникающего при отклонении связки от местной вертикали, изменяется только величина $\vec{R}_C \times \vec{v}_C M = \{0, r_C^2 \omega^{or} M, 0\}$ и указанная теорема в записи (17) справедлива.

Теперь рассмотрим действие на связку момента гравитационного поля сил. Выражение для него можно записать в виде

$$\vec{M}^{O_E} = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{R}_C + \vec{r}_i) \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}^C,$$

так как векторы $\sum_i \vec{R}_C \times \vec{F}_i = \vec{R}_C \times \vec{F}_C \equiv 0$, поскольку они параллельны. Уравнение (17)

удобно применять для сравнения значений момента количества движения системы, полученных при интегрировании этого соотношения, со значениями текущего момен-

та количества движения системы, построенными в результате использования всех значений фазовых переменных. Член в левой части вычисляется на каждом шаге интегрирования как сумма текущих моментов количества движения всех элементов системы. Первый член правой части вычисляется по начальным условиям, второй – на каждом шаге интегрирования. Хорошее совпадение значений левых и правых частей указывает на отсутствие ошибок в уравнениях движения и в вычислительной программе. Такая проверка должна быть включена в вычислительную программу, создаваемую для численного моделирования динамики орбитальной системы тел.

Кинетический момент связки относительно точки С

$$\vec{K}^C = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega}^{orb} \times \vec{r}_i) + \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{r}_i^* \right). \quad (18)$$

В орбитальном базисе это записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{K}^C = \sum_i (m_i \omega^{or} \{ -x^{or} y^{or}, (x^{or})^2 + (z^{or})^2, -\omega^{or} y^{or} z^{or} \} + \\ + m_i \{ -\dot{y}^{or} z^{or} + y^{or} \dot{z}^{or}, \dot{x}^{or} z^{or} - x^{or} \dot{z}^{or}, -\dot{x}^{or} y^{or} + x^{or} \dot{y}^{or} \}). \end{aligned} \quad (19)$$

4. Сценарий развертывания связки.

Пока тела будущей связки находятся рядом, использовать силы гравитационного поля для их относительного движения невозможно, поскольку в пределе оба тела имеют одинаковые ускорения под действием сил земного притяжения. Развертывание связок на орбите обычно производят в два этапа. В практике развертывания любых связок, в том числе и электродинамических, на начальном этапе развертывания используют либо пружинные толкатели, либо двигатели малой тяги, способные развести тела на такое расстояние, при котором градиент сил гравитации может быть использован для дальнейшего развертывания связки. Здесь на начальном этапе развертывания будут рассмотрены пружинные толкатели. Длину первоначального развертывания связки следует выбрать заранее. Пусть L_1 – длина деформированной нити, развертываемой на начальном этапе, а L_F – окончательная длина такой нити. На первом этапе будем рассматривать выпускание нити, сдерживаемое силами трения в точке выхода ее из контейнера, расположенного на любом из тел. При этом натяжение нити равно силе трения. Для предотвращения ударных нагрузок в конце первого этапа перед его завершением трение постепенно увеличивается до полной остановки процесса. В результате связка переходит в режим медленных маятниковых колебаний в плоскости орбиты.

Не нарушая общности постановки задачи, далее принимаем концевые массы одинаковыми. В результате принятых упрощений теперь достаточно рассматривать поведение только одной из масс. Учитывая тот факт, что возмущения, стремящиеся вывести связку из плоскости орбиты, в данной постановке задачи отсутствуют, при описании сценария развертывания будем рассматривать движение только в плоскости орбиты, оставляя при дальнейшем численном моделировании полную систему уравнений пространственного движения связки (16). В случае плоского движения будем определять положение массы m_1 расстоянием ее r до начала орбитального базиса и углом φ , отсчитываемым в плоскости орбиты от оси Cz^{or} . Теперь радиус-вектор массы m_1 можно записать в виде

$$\vec{r}_1 = r \{ \sin \varphi, 0, \cos \varphi \}. \quad (20)$$

Гравитационные силы (2) принимают вид $\vec{F}_1 = m r (\omega^{or})^2 \{ -\sin \varphi, 0, 2 \cos \varphi \}$, $\vec{F}_2 = m r (\omega^{or})^2 \{ \sin \varphi, 0, -2 \cos \varphi \}$. Гравитационный момент, действующий на связку в целом,

$$\vec{M}^C = \{ 0, -3 m r^2 (\omega^{or})^2 \sin 2\varphi, 0 \}. \quad (21)$$

В соответствии с предлагаемым здесь методом второй этап развертывания начинается в момент отклонения связки на максимальный угол в отрицательном направ-

лении $\varphi = \varphi_0$. Обозначим этот момент времени T_2 . Потребуем, чтобы угол между местной вертикалью и связкой, начиная с момента времени $t = T_2$, менялся по заданному закону $\varphi(t)$. При движении связки в плоскости орбиты вектор кинетического момента связки в орбитальном базисе имеет вид

$$\vec{K}^C = \{0, 2r(t)^2 m(\omega^{or} + \dot{\varphi}(t)), 0\}, \quad (22)$$

где m – масса одного тела связки; ω^{or} – величина угловой скорости движения центра масс связки по круговой орбите вокруг Земли; $r(t) = L(t)/2$ – половина длины связки.

Так как колебания происходят в плоскости орбиты, то $\vec{K}^C \times \vec{\omega} = 0$, и, согласно теореме об изменении момента количества движения механической системы, в любой момент времени должна выполняться зависимость

$$\frac{d\vec{K}^C}{dt} = \vec{M}^C. \quad (23)$$

Подставляя в (23) выражения (21) и (22), после элементарных преобразований получим скалярное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с соответствующим начальным условием

$$\dot{r} = -r \frac{3(\omega^2 \sin 2\varphi + 2\ddot{\varphi})}{4(\omega + \dot{\varphi})}; \quad r(T_2) = r_0 = L_1 / 2, \quad (24)$$

откуда следует

$$L(t) = L_1 \exp \left[- \int_{T_2}^t \left(\frac{3\omega^2 \sin(2\varphi(\tau)) + 2\ddot{\varphi}(\tau)}{4(\omega + \dot{\varphi}(\tau))} \right) d\tau \right]. \quad (25)$$

Как видно из приведенных выкладок, $L(t)$ является функцией от $\varphi(t)$, а также от длительности маневра $t_F - T_2$. В результате выбора удобного закона изменения угла $\varphi(t)$, который будет соответствовать плавному приближению связки к местной вертикали, для разных значений длительности маневра можно получить разные законы изменения длины $r(t)$, из которых можно выбрать тот, который соответствует, во-первых, заданной конечной длине связки, а во-вторых, не приводит к отсутствию ее натяжения в процессе разворачивания. С физической точки зрения изложенный подход определения закона управления длиной связки может быть истолкован как использование момента сил гравитационного поля для целенаправленного изменения момента количества движения системы.

Очевидно, что при известном законе изменения $\varphi(t)$ на некотором интервале времени $t \in [T_2, t_F]$ из решения (25) задачи Коши (24) может быть получен закон изменения длины выпускаемой нити, соответствующий заданному закону изменения угла $\varphi(t)$. Теперь осталось лишь подобрать закон $\varphi(t)$ так, чтобы он соответствовал приемлемому плавному приведению связки к местной вертикали в момент окончания второго этапа разворачивания. Легко показать, что для этого искомым закон изменения угла $\varphi(t)$ должен удовлетворять условиям

$$\varphi(T_2) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(T_2) = \dot{\varphi}(t_F) = \ddot{\varphi}(t_F) = 0, \quad \ddot{\varphi}(T_2) = -3 / 2\omega^2 \sin(2\varphi(T_2)), \quad (26)$$

выполнение которых обеспечит плавное начало и такое же завершение разворачивания.

Если первые пять из приведенных условий очевидны, то последнее условие следует пояснить подробнее. Оно связано с необходимостью обращения в нуль первой производной по времени величины $L(t)|_{t=T_2}$, так как скорость изменения длины связки в начале второго этапа разворачивания равна нулю, поскольку $L(T_2)$ – фиксирован-

ная величина. Это условие следует непосредственно из уравнения (24), в котором для обращения $\dot{L}(T_2)$ в нуль достаточно обращения в нуль числителя правой части уравнения. $\dot{L}(t_F)$ также обращается в нуль автоматически в результате выполнения третьего и пятого условий для $\varphi(t)$. Такой характер завершения разворачивания гарантирует отсутствие рывков, возбуждающих продольные колебания нити.

Закон изменения $\varphi(t)$ можно представить в виде произвольного конечного функционального ряда, коэффициенты которого могут быть определены из вышеприведенных условий. В качестве примера зададим закон изменения угла $\varphi(t)$ в виде полинома

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^5 c_i \left(\frac{t - T_2}{t_F - T_2} \right)^i. \quad (27)$$

Его коэффициенты, полученные из условий (26), имеют вид:

$$c_0 = \varphi_0; c_1 = 0; c_2 = -0,75\omega^2 \sin(2\varphi_0); c_3 = (-10\varphi_0 + 2,25\omega^2 t_F^2 \sin(2\varphi_0)) / t_F^3; \\ c_4 = (15\varphi_0 - 2,25\omega^2 t_F^2 \sin(2\varphi_0)) / t_F^4; c_5 = (-6\varphi_0 + 0,75\omega^2 t_F^2 \sin(2\varphi_0)) / t_F^5. \quad (28)$$

Полученный в соответствии с выражением (25) закон изменения $L(t)$ зависит от величины φ_0 и радиуса орбиты центра масс.

5. Численный пример.

Рассмотрим далее практическую реализацию изложенного метода программного приведения упругой космической связки двух тел к местной вертикали. Примем следующие значения параметров связки: массы концевых тел одинаковы и равны 10 кг, начальная длина связки 1 м, длина промежуточного разворачивания – 3,9 км, длина окончательного разворачивания – 5 км, начальное сжатие пружины расталкивания – 10 Н, длина хода пружины – 40 см, жесткость пружины на растяжение – 5000 Н. Наклонение орбиты примем равным 83 градуса, долготу восходящего узла – 90 градусов.

Пусть в начальный момент оба тела неразвернутой связки движутся по орбите радиуса 7000 км. Не останавливаясь подробно на первом этапе разворачивания, укажем лишь, что метод определения силы натяжения связки T зависит от принятого режима разворачивания. Очевидно, что если на первом этапе регулируется натяжение нити, например, устройством типа “barberpole” [18], сила натяжения нити равна силе торможения. Эта величина на реальном объекте может быть легко измерена. Для использования ее в математической модели при численном моделировании она может быть вычислена на основании математической модели тормозного устройства.

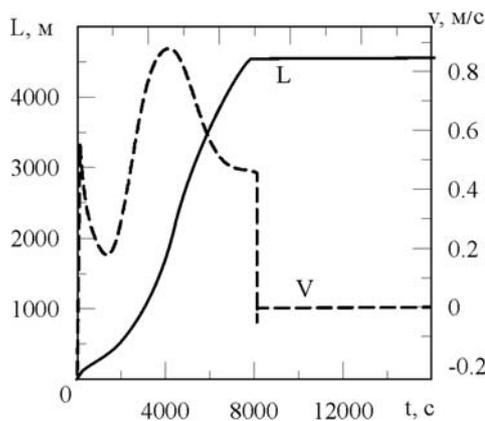


Рис. 2

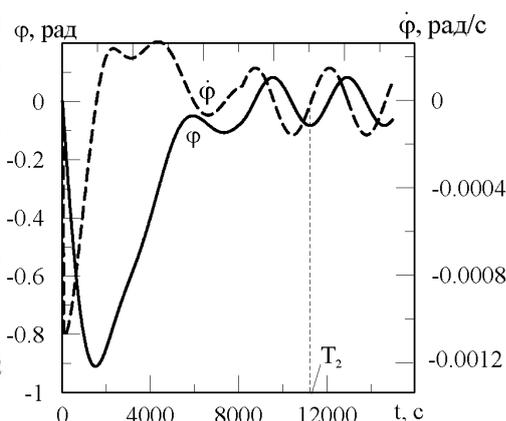


Рис. 3

Пусть первый этап разворачивания завершается вхождением связки в режим маятниковых колебаний в плоскости орбиты. Если далее ничего не предпринимать, то поведение связки будет соответствовать рис. 2 и 3.

На рис. 2 показано изменение реальной длины растянутой нити связки $L(t)$ и ее первой производной $v(t)$. Поскольку торможение выпуска нити в конце резко увеличивается, в этот момент возникает небольшой скачок скорости в обратном направлении, который тут же гасится. На рис. 3 показано поведение во времени угла $\varphi(t)$ отклонения связки от местной вертикали и скорости его изменения. Здесь T_2 – время первого прохождения $\varphi(t)$ через минимум $\varphi(t) = -0,082$ рад. после завершения первого этапа развертывания. В соответствии с излагаемым методом в этот момент должен начинаться второй этап развертывания. Предсказать заранее, какая будет амплитуда маятниковых колебаний, невозможно, пока на нить действуют силы трения, из-за их плохой прогнозируемости. Когда же длина нити фиксирована и ее продольные колебания затухли, момент времени T_2 и амплитуда колебаний могут быть прогнозируемы на основе модели связки с жесткой связью и результатов трех-четырех измерений $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ за несколько десятков секунд до T_2 . Этому времени окажется достаточно, чтобы построить программу изменения во времени длины связки, приводящую ее к местной вертикали.

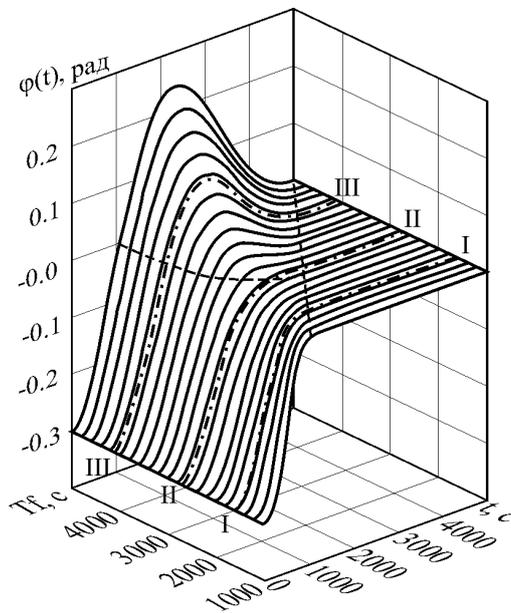


Рис. 4

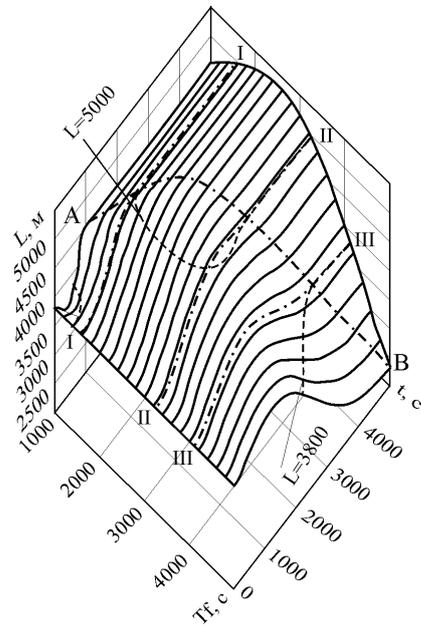


Рис. 5

Покажем, как получить закон $L(t)$, решающий поставленную задачу. Пусть прогнозируемая амплитуда колебаний $\varphi(T_2) = -0,3$. Вычисляя $\varphi(\tilde{t})$, где $\tilde{t} = t - T_2$ при разных значениях $Tf = t_F - T_2$, получим зависимость, показанную на рис. 4.

Пунктирные линии на этом графике соответствуют нулевым значениям $\varphi(\tilde{t})$. Справа от пунктирной прямой $\varphi(\tilde{t}) = 0$. Римскими цифрами обозначены три характерных решения. Их удобнее обсуждать, обратившись к рис. 5, на котором показаны законы изменения длины связки, соответствующие таким законам $\varphi(\tilde{t})$, также обозначенные римскими цифрами.

Пунктирные линии на рис. 5 соответствуют сечению приведенной фигуры плоскостями $L(t) = 5000$ м и $L(t) = 3800$ м. Штрихпунктирная линия А – В соответствует точкам выхода кривых $L(t)$ на постоянные значения. Таким образом, режим I – I на рисунках наиболее приемлем для решения поставленной задачи. При таком режиме длина связки начинает плавно увеличиваться, а в конце плавно останавливается. Связка получает заданную длину 5000 м и оказывается расположенной вдоль местной вертикали. Режим II – II также приведет к решению задачи, но в конце потребуются вы-

пустить нить чуть больше, чем требуется, а затем втянуть нить до заданной величины. При этом связка пройдет местную вертикаль и окажется в области положительных значений $\varphi(\tilde{t})$, а затем вернется к местной вертикали. Режим III – III не позволяет решить поставленную задачу, но он демонстрирует возможность устранить маятниковые колебания связки в плоскости орбиты, сохранив ее длину. В соответствии с этим законом следует вначале выпустить нить на определенную длину, а затем ее втянуть и связка остановится у местной вертикали, сохранив ту длину, с которой она вошла в этот режим.

На завершающем этапе развертывания, в рамках предложенного метода приведения связки к местной вертикали, в соответствии с решением (25) должна регулироваться длина выпускаемой растянутой нити, т.е. $L(t)$. Если устройство выпуска нити фиксирует длину недеформированной нити $\tilde{L}(t)$, то на реальном объекте для корректного выполнения предписанного режима в закон изменения $\tilde{L}(t)$ должна быть введена поправка $\tilde{L}(t) = L(t) - \Delta\tilde{L}(t)$, где $\Delta\tilde{L}(t) = T(t)L(t)/(EF + T(t))$, где EF – жесткость нити на растяжение. Измеряя натяжение, такую корректировку достаточно просто реализовать.

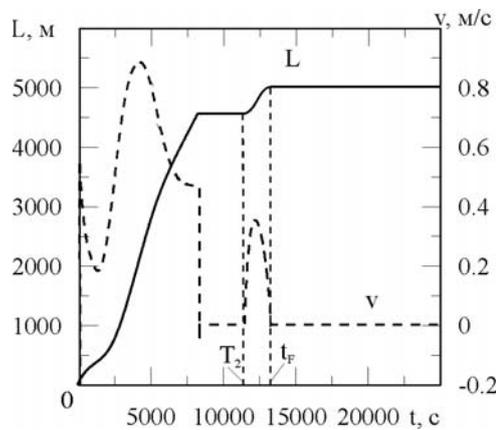


Рис. 6

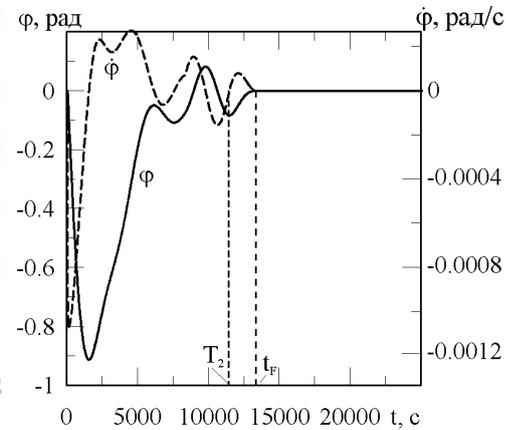


Рис. 7

В процессе численного моделирования завершающего этапа развертывания на основе построенной математической модели можно поступить следующим образом. Полученный в соответствии с выражением (25) программный закон изменения во времени величины $L(t)$ должен удовлетворять уравнениям движения связки (16). Поэтому из них можно определить программный закон изменения натяжения связки T , а следовательно, $\Delta\tilde{L}(t)$ и $\tilde{L}(t)$. Поскольку при движении связки в плоскости орбиты $\vec{e}_{r,1} = \{\sin\varphi, 0, \cos\varphi\}$, для определения программного закона изменения T можно использовать только третье из уравнений (16), так как попадающий в знаменатель выражения для $T \cos\varphi$ в этом случае не приведет к делению на ноль при $t = t_F$, где программное значение $\varphi(t_F)$ нулевое.

Рассмотрим далее поведение связки, маятниковые колебания которой показаны на рис. 2 и 3, если для гашения этих колебаний применить изложенный метод.

На рис. 6 видно, как изменяется длина связки на интервале времени $t \in [T_2, t_F]$. Это и есть программное управление приведением связки в конце развертывания к местной вертикали. Показанное на рис. 7 поведение угла $\varphi(t)$ на этом же интервале времени является результатом такого управления. Именно такой закон $\varphi(t)$ был использован для установления программного управления длиной выпускаемой нити в соответствии с решением (25) задачи Коши (24). Траектории концевых тел связки в орбитальной плоскости в орбитальном базисе показаны на рис. 8. Участки траектории, предшествующие моменту времени $t = T_2$, состоящие из горизонтально распо-

ложенных дуг окружности, соответствуют либрационным колебаниям связки. Части траектории, для которых $t \in [T_2, t_F]$, соответствуют завершающему этапу разворачивания. Окончательные позиции концевых тел находятся на местной вертикали.

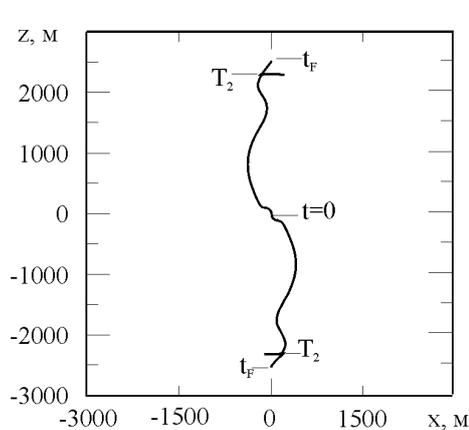


Рис. 8

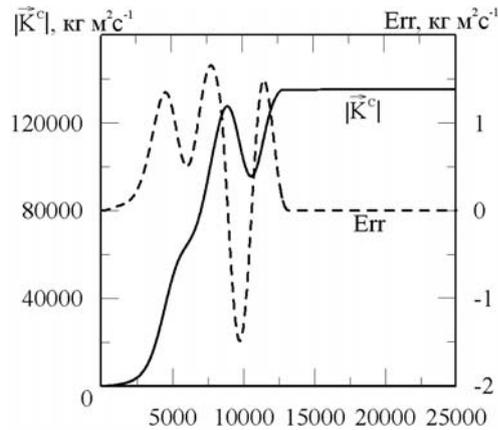


Рис. 9

Тот факт, что завершающий этап разворачивания плавно начинается и так же заканчивается, хорошо виден на рис. 6. Отсутствие резких скачков силы натяжения и ее обращения в нуль подтверждается контролем этой силы во времени.

В процессе численного моделирования здесь проводился контроль погрешности вычислений. Текущее значения модуля вектора кинетического момента, построенного по текущим значениям фазовых переменных задачи для уравнений (16), сравнивалось с его значениями, полученными из теоремы об изменении момента количества движения точек системы (см. уравнение (17)). На рис. 9 сплошная линия соответствует модулю вектора кинетического момента связки, а пунктирная – отличию ее вычисления двумя указанными путями. Очевидно, что погрешности вычислений вполне приемлемы для поставленной задачи.

6. Заключение.

В этой статье изложен и теоретически обоснован принципиально новый подход к решению задачи о разворачивании упругой космической связки двух тел на круговой орбите с приведением ее к местной вертикали. Этот подход основан на использовании теоремы об изменении момента количества движения. С физической точки зрения, предложено целенаправленное изменение момента количества движения связки за счет ее взаимодействия с гравитационным полем Земли, позволяющее выполнить ряд дополнительных требований к качеству динамических процессов в упругой космической системе. С точки зрения теории управления, разработан метод построения программного управления длиной выпускаемой нити, позволяющего развернуть упругую связку двух тел с приведением ее к местной вертикали без возбуждения продольных колебаний. Приведенный пример применения разработанного подхода к случаю разворачивания конкретной связки демонстрирует простоту использования метода на практике, а также метод проверки численной модели.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто космічну зв'язку двох тіл, з'єднаних пружною невагомою ниткою. Сформульовано та теоретично обґрунтовано принципово новий підхід до розв'язування задачі розгортання космічної зв'язки двох тіл на круговій орбіті із приведенням її до місцевої вертикалі. Підхід засновано на використанні теореми про зміну моменту кількості руху. Він дозволяє побудувати програмне керування довжиною нитки, яка випускається, що забезпечує цілеспрямовану зміну моменту кількості руху зв'язки під дією моменту сил гравітаційного поля Землі до того значення, яке відповідає положенню розгорнутої зв'язки уздовж місцевої вертикалі. Наведений приклад застосування розробленого підходу до випадку розгортання конкретної зв'язки демонструє простоту використання методу на практиці, а також спосіб перевірки математичної моделі.

1. Левин Е.М. О разрывании протяженной связки на орбите // Космические исследования. – 1983. – 21, № 1. – С. 678 – 688.
2. Циолковский К.Э. Свободное пространство. – Собрание сочинений. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – Т.2. – С. 26 – 68.
3. Циолковский К.Э. Путь к звездам. – Собрание сочинений. – М.: Изд-во АН СССР, 1960. – 455 с.
4. Akbarzade, M., Farshidianfar, A., Application of the Amplitude-Frequency Formulation to a Nonlinear Vibration System Typified by a Mass Attached to a Stretched Wire // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 4. – P. 476 – 483.
5. Beletsky V. V. Motion of an Artificial Satellite About its Center of Mass. – Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1966. – 414 p.
6. Barkow B. Controlled Deployment of a Tethered Satellite System // Proc. Appl. Math. Mech. – 2003. – 2. – P.224 – 225.
7. Barkow B., Steindl A., Troger H., Wiedermann G. Various Methods of Controlling the Deployment of a Tethered Satellite // J. Vibr. and Control. – 2003. – 9. – P.187 – 208.
8. Bekey I. Tethers open new space options // Astronautics and Aeronautics. –1983. –21, N4. – P. 32 – 40.
9. Bekey I., Penzo P.A. Tether propulsion // Aerospace America. – 1986. – 24, N7. – P. 40 – 43.
10. Beletsky V.V., Levin E.M. Dynamics of space tether systems // Adv. Astronaut. Sci. – 1993. – 83p.
11. Cantafio L.J., Chobotov V.A., Wolfe M.G. Photovoltaic gravitationally stabilised, solid-state satellite solar power station // J. Energy. – 1977. – 1, N6. – P. 352 – 363.
12. Chobotov V.A. Gravitational excitation of an extensible dumbbell satellite // J. Spacecraft and Rockets. – 1967. – 4, N10. – P. 1295–1300.
13. Hoyt R.P., Uphoff Ch. Cislunar Tether Transport System // J. Spacecraft and Rockets. – 2000. – 37, N 2. – P. 1 – 15.
14. Kroll K.R. Tethered propellant resupply technique for space stations // Acta Astronautica. – 1985. – 12, N12. – P. 987 – 994.
15. Levin E.M. Dynamic Analysis of Space Tether Missions. – San Diego: Univelt, 2007. – 454 p.
16. Lorenzini E.C. et al. Acceleration levels the space station and a tether elevator for micro- and variable-gravity applications. – Venice, Italy, October 1987. – P. 513 – 522.
17. Lur'e A. Analytical Mechanics. – Heidelberg: Springer, 2002. – 864 p.
18. Menon C., Kruijff M., Vavouliotis A. Design and testing of a space mechanism for tether deployment // J. Spacecraft and Rockets. – 2007. – 44, N4. – P. 927 – 939.
19. Modi V. 3. , Misra A.K. Deployment dynamics of tethered satellite systems // AIAA Paper. – 1978. – N 1398. – 10 p.
20. Napolitano L.G., Bevilacqua F. Tethered constellations, their utilization as microgravity platforms and relevant features / 35-th International Astronautical Congress (October 7–13, 1984). — Lausanne, Switzerland, 1984. — P. 84 – 439.
21. Padgett, D.A., Mazzoleni, A.P.: Analysis and design for nospin tethered satellite retrieval // J. Guidance Control and Dyn. – 2007. – 30, N5. – P. 1516 – 1519.
22. Pearson J. Anchored lunar satellites for cislunar transportation and communication // J. Astron. Sci. – 1979. – 17, N1. – P. 39 – 62.
23. Rupp C.C., Kissel R.R. Tetherline system for orbiting satellites // U. S. Patent N 4083520, April II, 1978, Int. Cl. B. 64 G 1/100, US Cl. 244/167; 244/161.
24. Rupp C. C., Laue J. H. Shuttle/Tethered Satellite System // J. Astronaut. Sci. – 1978. – 26, N1. – P. 1 – 17.
25. Steiner W., Steindl A., Troger H. Center manifold approach to the control of a tethered satellite system // Appl. Math. and Comp. – 1995 – 70. – P. 315 – 327.
26. Steindl A., Steiner W., Troger H.: Optimal control of retrieval of a tethered subsatellite // Solid Mech. Appl. – 2005 – 122. – P. 441 – 450.
27. Steindl A., Troger H. Optimal Control of Deployment of a Tethered Subsattelite Nonlinear Dynamics. – 2003. – 31. – P. 257 – 274.
28. Swet C. J. Method for deployment and stabilising orbiting structures // U.S. Patent Office N 3532298, Oct. 6, 1970, Int. Cl. B 64 G 1/00, U.S. Cl. 244-1.
29. Wiedermann G., Schagerl M., Steindl A., Troger H. Computation of Force Controlled Deployment and Retrieval of a Tethered Satellite by the Finite Element Method. – Munchen, Germany: ECCM '99 European Conf. on Comp. Mech., August 31 – September 3. – 1999. – P. 410 – 429.
30. Williams P. Application of pseudospectral methods for receding horizon control // J. Guidance, Control, and Dyn. – 2004 – 27, – N2. – P. 310 – 314.
31. Williams P., Trivailo P. On the optimal deployment and retrieval of tethered satellites. – Tucson: The 41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, 10 – 13 July, 2005. – P. 157 – 163.
32. Williams P. Libration control of tethered satellites in elliptical orbits // J. Spacecraft and Rockets. – 2006. – 43, N2. – P. 476 – 479.
33. Zakrzhevskii, A. E., Khoroshilov, V. S. Dynamics of an Unstabilized Spacecraft During the Deployment of an Elastic Pantograph Structure // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 3. – P. 341 – 351.

Поступила 12.01.2014

Утверждена в печать 26.05.2015