

В. В. Михаськів, Б. М. Стасюк

УПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ВКЛЮЧЕНИЯ В ФОРМЕ КОРОТКОГО ВОЛОКНА
ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕМ КОНТАКТЕ С ТРЕХМЕРНОЙ МАТРИЦЕЙ

*Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача
НАН Украины, ул. Научная, 3б, Львов, Украина;
e-mail: tex@iapmm.lviv.ua, stasyuk.bohdan.m@gmail.com*

Abstract. By the boundary element method, a three-dimensional problem of the theory of elasticity on transferring the loads from an infinite matrix to an inclusion of arbitrary shape is solved when the imperfect sliding contact between them exists. The specific contact conditions are taken into account indirectly in the system of six boundary integral equations. These equations are further regularized and discretized on the introduced mesh of boundary elements. An example of inclusion in the form of short cylindrical fiber with rounded ends is considered. Here the contact forces on the fiber surface, displacements and stresses in the fiber are studied under omni-directional compression of matrix at infinity.

Key words: three-dimensional elastic matrix, elastic inclusion, noncanonical shape, sliding contact, stress-strain state, boundary element method.

§1. Введение.

Идеальный механический контакт является наиболее распространенной в механике математической моделью межфазного соединения включения с матрицей, когда предусматривается непрерывность перемещений и усилий на поверхности раздела сред. Разного рода ослабления этого соединения могут вносить существенные изменения в возникающие в композите упругие поля. Во многих практических случаях между включением и матрицей реализуется скользящий или гладкий контакт, сопровождающийся отсутствием касательных усилий на поверхности соединения. Как указано в [4], по сравнению с моделью гладкого контакта включения с матрицей, все межфазные дефекты можно считать укрепляющим фактором, положительно влияющим на свойства композита. Таким образом, исследования гладкого контакта объемного включения сложной формы с трехмерной матрицей наравне с задачами об их идеальном контакте [8] являются актуальными и важными для практических инженерных расчетов конструкций из композитных материалов. По разным аспектам этой проблемы в трехмерном случае опубликован ряд работ [5 – 11], касающихся изучения классических (сферических, эллипсоидальных) форм включений. При рассмотрении неоднородностей с усложненной топологией необходимо привлечение численных методов анализа, в этом смысле преимущества метода граничных элементов определяются дискретизацией только двумерной поверхности раздела сред.

Ниже предложен алгоритм указанного метода для определения напряженного состояния включения произвольной формы, в частности, в виде характерного для нанокompозитов короткого цилиндрического волокна, при условии его гладкого сцепления с бесконечной упругой матрицей. Отметим, что влияние таких форм наполнителей на устойчивость материала исследовано в работе [3].

§2. Гранично-интегральная формулировка задачи.

Рассмотрим трехмерное упругое изотропное включение $\Omega^{(2)}$ (упругое волокно), граничащее с бесконечной упругой средой $\Omega^{(1)}$. Граница контакта матрицы и включения является произвольной гладкой поверхностью S с наружной нормалью $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$. Механические свойства составляющих неоднородного тела определяются модулями сдвига $G^{(i)}$ и коэффициентами Пуассона $\nu^{(i)}$ ($i = 1, 2$; здесь и в дальнейшем все величины, относящиеся к матрице, обозначим верхним индексом "1", а к включению – индексом "2" в круглых скобках). На тело действует статическая нагрузка, обуславливающая поле перемещений $\mathbf{u}^{(0)}(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})$ в однородной упругой среде с механическими характеристиками матрицы, через $\sigma_{ij}^{(0)}$ ($i, j = \overline{1,3}$) обозначим связанные с этим полем законом Гука напряжения. Между составными частями тела реализуется гладкий контакт, т. е. обеспечивается непрерывность нормальных к поверхности раздела фаз перемещений и усилий, а также отсутствие касательных усилий на поверхности S :

$$\begin{aligned} u_n^{(1)}(x) &= u_n^{(2)}(x) = u_n(x); \quad t_n^{(1)}(x) = -t_n^{(2)}(x) = t_n(x); \quad x \in S; \\ t_r^{(1)}(x) &= t_r^{(2)}(x) = 0; \quad t_\tau^{(1)}(x) = t_\tau^{(2)}(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{r}(r_1, r_2, r_3)$ и $\boldsymbol{\tau}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ – касательные к поверхности S ортогональные векторы единичной длины.

Интегральные представления Соммильяны для решений внешней ($k=1$) и внутренней ($k=2$) задач теории упругости в перемещениях позволяют определить перемещения в теле в глобальной системе координат в [4]

$$u_i^{(k)}(x) = u_i^{(0)}(x) \delta_{ik} + (-1)^k \sum_{j=1}^3 \left[\iint_S U_{ij}^{(k)}(x, \xi) t_j^{(k)}(\xi) dS_\xi - \iint_S T_{ij}^{(k)}(x, \xi) u_j^{(k)}(\xi) dS_\xi \right]; \quad (2.2)$$

$$x \in \Omega^{(k)}; \quad k = 1, 2; \quad i = \overline{1,3},$$

где $t_j^{(k)}(x)$, $u_j^{(k)}(x)$ ($x \in S$) – контактные значения компонент усилий и перемещений на поверхности S со стороны нормали, когда $k=1$, и с противоположной стороны, когда $k=2$; δ_{ij} – символ Кронекера; ядра $U_{ij}^{(k)}$ и $T_{ij}^{(k)}$ записываем следующим образом:

$$\begin{aligned} U_{ij}^{(k)}(x, \xi) &= \frac{1}{16\pi G^{(k)}(1-\nu^{(k)})|x-\xi|} \left[(3-4\nu^{(k)})\delta_{ij} + \frac{(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{|x-\xi|^2} \right]; \\ T_{ij}^{(k)}(x, \xi) &= \frac{1}{8\pi(1-\nu^{(k)})|x-\xi|^2} \times \\ &\times \left\{ \left[(1-2\nu^{(k)})\delta_{ij} + 3\frac{(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{|x-\xi|^2} \right] \sum_{m=1}^3 \frac{(x_m-\xi_m)}{|x-\xi|} n_m(\xi) - \right. \end{aligned}$$

$$-(1-2\nu^{(k)}) \left\{ \left(\frac{x_i - \xi_i}{|x - \xi|} n_j(\xi) - \frac{x_j - \xi_j}{|x - \xi|} n_i(\xi) \right) \right\} \quad (i, j = \overline{1,3}; k = 1,2). \quad (2.3)$$

Для получения системы граничных интегральных уравнений (ГИУ) осуществим в (2.2) граничный переход к поверхности S , учитывая свойства упругих потенциалов простого и двойного слоев. Тогда имеем равенства

$$\begin{aligned} u_i^{(1)}(x) - \sum_{j=1}^3 \left[\iint_S T_{ij}^{(1)}(x, \xi) \left[u_j^{(1)}(\xi) - u_i^{(1)}(x) \right] dS_\xi - \iint_S U_{ij}^{(1)}(x, \xi) t_j(\xi) dS_\xi \right] &= u_i^{(0)}(x); \\ \sum_{j=1}^3 \left[\iint_S T_{ij}^{(2)}(x, \xi) \left[u_j^{(2)}(\xi) - u_i^{(2)}(x) \right] dS_\xi - \iint_S U_{ij}^{(2)}(x, \xi) t_j(\xi) dS_\xi \right] &= 0 \\ (x \in S; i = \overline{1,3}). & \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь применена процедура первичной регуляризации интегралов с сингулярным ядром $T_{ij}^{(k)}$ с целью преобразования их к слабосингулярным в таком виде:

$$\begin{aligned} & \iint_S T_{ij}^{(k)}(x, \xi) u_j^{(k)}(\xi) dS_\xi = \\ &= u_j^{(k)}(x) \iint_S T_{ij}^{(k)}(x, \xi) dS_\xi + \iint_S T_{ij}^{(k)}(x, \xi) \left[u_j^{(k)}(\xi) - u_j^{(k)}(x) \right] dS_\xi = \\ &= -\frac{1}{2} u_j^{(k)}(x) + \iint_S T_{ij}^{(k)}(x, \xi) \left[u_j^{(k)}(\xi) - u_j^{(k)}(x) \right] dS_\xi. \end{aligned}$$

Проблема несоответствия количества искомого неизвестных и полученных ГИУ может быть решена двумя путями. Первый из них предполагает явное включение в систему решаемых уравнений граничных условий. Этот подход, после регуляризации сингулярных интегралов, позволяет свести задачу к решению девяти уравнений относительно контактных величин $u_i^{(k)}(x)$, $t_i(x)$ ($k = 1,2; i = \overline{1,3}$). Более предпочтительным является подход, связанный с возможностью избавиться от «лишних» неизвестных путем преобразования ГИУ (2.4) в локальной системе координат, ориентированной на нормаль к поверхности S в точке интегрирования, и предполагающий неявное удовлетворение контактных условий.

Сначала введем функции скачков граничных значений перемещений на поверхности S как $\Delta u_i(x) = u_i^{(1)}(x) - u_i^{(2)}(x)$. Тогда ГИУ (2.4) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & u_i^{(2)}(x) + \Delta u_i(x) - \\ & - \sum_{j=1}^3 \left[\iint_S T_{ij}^{(1)}(x, \xi) \left[u_j^{(2)}(\xi) - u_i^{(2)}(x) \right] dS_\xi + \iint_S T_{ij}^{(1)}(x, \xi) \left[\Delta u_j(\xi) - \Delta u_i(x) \right] dS_\xi - \right. \\ & \left. - \iint_S U_{ij}^{(1)}(x, \xi) t_j(\xi) dS_\xi \right] = u_i^{(0)}(x); \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^3 \left[\iint_S T_{ij}^{(2)}(x, \xi) \left[u_j^{(2)}(\xi) - u_i^{(2)}(x) \right] dS_\xi - \iint_S U_{ij}^{(2)}(x, \xi) t_j(\xi) dS_\xi \right] = 0;$$

$$x \in S, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (2.5)$$

Далее перейдем к новым искомым функциям, осуществляя преобразование от системы координат $Ox_1x_2x_3$ к локальной системе координат $x_0r\tau n$. На основании условий гладкости контакта соотношения между поверхностными перемещениями и усилиями в разных системах координат приобретают форму $\Delta u_i = r_i \Delta u_r + \tau_i \Delta u_\tau$; $t_i = n_i t_n$. С учетом изложенного систему ГИУ можно представить в виде

$$\begin{aligned} & u_i^{(2)}(x) + r_i(x) \Delta u_r(x) + \tau_i(x) \Delta u_\tau(x) - \\ & - \iint_S T_{ij}^{(1)}(x, \xi) \left[u_j^{(2)}(\xi) - u_j^{(2)}(x) \right] dS_\xi + \left[r_j(x) \Delta u_r(x) + \right. \\ & \left. + \tau_j(x) \Delta u_\tau(x) \right] \iint_S T_{ij}^{(1)}(x, \xi) dS_\xi - \iint_S T_{ij}^{(1)}(x, \xi) \left[r_j(\xi) \Delta u_r(\xi) + \tau_j(\xi) \Delta u_\tau(\xi) \right] dS_\xi + \\ & + \iint_S U_{ij}^{(1)}(x, \xi) n_j(\xi) t_n(\xi) dS_\xi = u_i^{(0)}(x); \\ & \sum_{j=1}^3 \left[\iint_S T_{ij}^{(2)}(x, \xi) \left[u_j^{(2)}(\xi) - u_i^{(2)}(x) \right] dS_\xi - \iint_S U_{ij}^{(2)}(x, \xi) n_j(\xi) t_n(\xi) dS_\xi \right] = 0; \\ & x \in S, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (2.6) \end{aligned}$$

В замкнутой системе шести скалярных ГИУ (2.6) относительно трех компонент поверхностных перемещений включения $u_i^{(2)}$, нормальных контактных усилий t_n и двух скачков поверхностных касательных перемещений $\Delta u_r, \Delta u_\tau$ автоматически удовлетворены условия скользящего контакта между включением и матрицей.

§3. Граничноэлементное решение системы ГИУ.

Для построения дискретного аналога ГИУ межфазная поверхность S покрываем компактной непрерывной сетью N четырехугольных восьмиузловых и треугольных шестиузловых суперпараметрических криволинейных элементов S^q ($q = \overline{1, N}$). Дискретизация системы уравнений (2.6) осуществляем путем замены интегралов по межфазной поверхности S суммой интегралов по граничным элементам S^q , отображенным на плоскую область квадратной или треугольной формы в зависимости от типа элемента с использованием аппроксимации по всем его узлам. При этом координаты произвольной точки поверхности граничного элемента выражаются через координаты узлов граничного элемента и его функции формы зависимостями

$$x_j = f_j^q(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=1}^8 x_j^{v(q,n)} N_n(\xi_1, \xi_2), \quad j = \overline{1, 3}, \quad x \in S^q, \quad (3.1)$$

где $v(q, n)$ – глобальный номер узла, имеющего n -ный локальный номер в q -ом граничном элементе; $N_n(\xi_1, \xi_2)$ – функции формы, а именно:

$$N_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(-\xi_1 - \xi_2 - 1); \quad N_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2);$$

$$N_3(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_2 - 1); \quad N_4(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 - \xi_2^2)(1 + \xi_1);$$

$$N_5(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(\xi_1 + \xi_2 - 1);$$

$$N_6(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2); \quad N_7(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(-\xi_1 + \xi_2 - 1);$$

$$N_8(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_1).$$

Компоненты векторов перемещений и усилий в точках поверхности включения билинейно интерполируются через их значения в угловых (нечетных) узлах элемента таким образом:

$$u_j^{(2)}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=1}^4 u_j^{(2)\nu(q, 2n-1)} M_n(\xi_1, \xi_2), \quad i = \overline{1, 3};$$

$$\Delta u_r(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=1}^4 \Delta u_r^{\nu(q, 2n-1)} M_n(\xi_1, \xi_2); \quad \Delta u_\tau(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=1}^4 \Delta u_\tau^{\nu(q, 2n-1)} M_n(\xi_1, \xi_2);$$

$$P_n(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=1}^4 P_n^{\nu(q, 2n-1)} M_n(\xi_1, \xi_2); \quad (3.2)$$

$$M_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2); \quad M_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2);$$

$$M_3(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2); \quad M_4(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2).$$

Таким образом, порядок топологической интерполяции на единицу выше порядка интерполяции искомым функций, что позволяет построить оптимальный по размерности дискретный аналог системы ГИУР для включений сложной топологической формы. Определяющие соотношения для треугольных шестиузловых граничных элементов можно получить из (3.1) и (3.2), предполагая вырождение элемента путем слияния 1, 7 и 8-го узлов.

Если точка $x \in S$ не относится к области граничного элемента, по которому ведется интегрирование, то интегралы в уравнениях (2.6) являются регулярными и могут быть вычислены с помощью формул Гаусса – Лежандра. Числовой эксперимент, проведенный в работе, показал удовлетворительную точность вычислений уже при втором порядке квадратур. При наличии сингулярных интегралов необходимо предварительно провести процедуру их численной регуляризации методом отображений, который заключается в разбиении области интегрирования на треугольные подобласти и применения к ним отображений, якобиан которых обращается в нуль в сингулярных точках. Более подробно процедура дискретизации уравнений такого типа изложена в работе [8]. Следует заметить, что в данном случае имеет место усложнение, связанное с определением ориентации единичных касательных векторов в узлах граничных элементов, явным образом входящих в систему уравнений (2.6). Определение

координат этих векторов методом дифференцирования функций формы граничного элемента зависит от внутренней нумерации узлов в элементе (рис. 1) и осуществляется по формулам:

$$r_{iq}(\xi_1, \xi_2) \Big|_{S_q} = \frac{\partial x_{iq}}{\partial \xi_1} \Big|_{S_q} = \sum_{n=1}^8 x_i^{v(q,n)} N_{n,1}(\xi_1, \xi_2);$$

$$\tau_{iq}(\xi_1, \xi_2) \Big|_{S_q} = \frac{\partial x_{iq}}{\partial \xi_2} \Big|_{S_q} = \sum_{n=1}^8 x_i^{v(q,n)} N_{n,2}(\xi_1, \xi_2).$$

Здесь запятая в выражении $N_{n,i}$ обозначает производную от функции N_n по переменной ξ_i ; $x_i^{v(q,n)}$ ($i = \overline{1,3}$) – координаты n -го узла q -го граничного элемента. Тогда компоненты вектора нормали в точке ξ принимают вид

$$n_{iq}(\xi) = \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{ijm} r_{jq}(\xi) \tau_{mq}(\xi),$$

где ε_{ijm} – символы Леви – Чивита. Поскольку один и тот же узел принадлежит к разным граничным элементам и ему автоматически присваиваются разные порядковые номера, то и ориентация единичных касательных векторов в одном и том же узле для разных граничных элементов будет разной. Поэтому, в дополнение к изложенной в [8] численной процедуре дискретизации системы ГИУ, необходимо применять алгоритм автоматического переориентирования единичных касательных векторов в узлах сетки в зависимости от их локального номера в каждом граничном элементе.

Удовлетворяя ГИУ (2.6) в угловых узлах граничных элементов, приходим к следующему дискретному аналогу ГИУ в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & u_i^{w(2)} + r_i^w \Delta u_r^w + \tau_i^w \Delta u_\tau^w - \sum_{q=1}^N \sum_{n=1}^4 \sum_{j=1}^3 \left[A_{ij}^{(1)qmw} u_j^{(2)v(q,2n-1)} + \right. \\ & \left. + A_{ij}^{(1)qmw} \left(r_i^{v(q,2n-1)} \Delta u_r^{v(q,2n-1)} + \tau_i^{v(q,2n-1)} \Delta u_\tau^{v(q,2n-1)} \right) - B_{ij}^{(1)qmw} n_j^{v(q,2n-1)} t_n^{v(q,2n-1)} \right] = u_i^{(0)}(x^w), \\ & \sum_{q=1}^N \sum_{n=1}^4 \sum_{j=1}^3 \left[A_{ij}^{(2)qmw} u_j^{v(q,2n-1)} - B_{ij}^{(2)qmw} n_j^{v(q,2n-1)} t_n^{v(q,2n-1)} \right] = 0, \\ & i = \overline{1,3}, \quad x^w \in S, \quad w = \overline{1, V}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где V – общее количество угловых узлов сетки граничных элементов; $A_{ij}^{(k)qmw}$ и $B_{ij}^{(k)qmw}$ – коэффициенты, определяемые как

$$A_{ij}^{(k)qmw} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}^{(k)}(x^w, f^{(q)}(\xi_1, \xi_2)) M_n(\xi_1, \xi_2) (1 - \delta_{w,v(q,n)}) \Big| J^{(q)}(\xi_1, \xi_2) \Big| d\xi_1 d\xi_2;$$

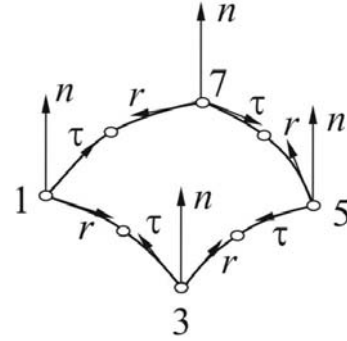


Рис. 1

$$B_{ij}^{(k)qmw} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}^{(k)}(x^w, f^{(q)}(\xi_1, \xi_2)) M_n(\xi_1, \xi_2) \left| J^{(q)}(\xi_1, \xi_2) \right| d\xi_1 d\xi_2;$$

J^q – якобиан преобразования (3.1) на q -том элементе.

Располагая дискретными значениями перемещений поверхности включения, а также нормальных усилий и скачков касательных перемещений на поверхности раздела сред, можно вычислить компоненты тензора напряжений в матрице и включении. Для этого необходимо подставить представления перемещений (2.2) с учетом введения новых контактных величин в закон Гука и соотношения Коши. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)}(x) &= \sigma_{ij}^0(x) - \frac{1}{1-\nu^{(1)}} \iint_S D_{ijk}^{(1)}(x, \xi) n_k t_n(\xi) dS_\xi + \\ &+ \frac{G^{(1)}}{1-\nu^{(1)}} \iint_S S_{ijk}^{(1)}(x, \xi) \left[u_k^{(2)}(\xi) + \Delta u_k(\xi) \right] dS_\xi, \quad x \in \Omega^{(1)}; \\ \sigma_{ij}^{(2)}(x) &= \frac{1}{1-\nu^{(2)}} \iint_S D_{ijk}^{(2)}(x, \xi) n_k t_n(\xi) dS_\xi - \frac{G^{(2)}}{1-\nu^{(2)}} \iint_S S_{ijk}^{(2)}(x, \xi) u_k^{(2)}(\xi) dS_\xi; \\ &x \in \Omega^{(2)}; \quad i, j = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь ядра $D_{ijm}^{(k)}$ с порядком особенности $|x - \xi|^{-2}$ и ядра $S_{ijm}^{(k)}$ с порядком особенности $|x - \xi|^{-3}$ являются линейными комбинациями производных от функций $U_{ij}^{(k)}$ и $T_{ij}^{(k)}$ и приведены в [2].

§4. Численные результаты.

В качестве примера рассмотрим всестороннее сжатие усилиями σ_0 матрицы с включением в форме короткого цилиндрического волокна, ограниченного элементами сферических и цилиндрической поверхностей (рис. 2) с радиусом R , полной длиной $2H$; тогда длина цилиндрической его части будет $2L = 2H - 2R$. В рассмотренной системе координат поверхность S представляем так:

$$S = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = R^2, & |x_3| \leq H - R; \\ x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - H + R)^2 = R^2, & H - R < |x_3| \leq H. \end{cases}$$

Для всестороннего сжатия основное поле перемещений $u_i^{(0)}$ или правая часть ГИУ (2.6) принимает такой вид:

$$u_i^{(0)}(x) = -\frac{\sigma_0}{G^{(1)}} \frac{1 + 2\nu^{(1)}}{2(1 + \nu^{(1)})}.$$

При вычислениях полагаем $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,45$. Удовлетворительной точности расчетов в пределах одного процента расхождения результатов при сгущении дискретизационной сетки удалось достичь, используя покрытие поверхности S 96 граничными элементами. В таблице при различных количествах используемых граничных элементов приведены значения нормальных напряжений $\sigma_{33}/\sigma^{(0)}$ и $\sigma_{11}/\sigma^{(0)}$ в центре

включения с геометрическим параметром $H/R = 2$ и жесткостью $G^{(2)}/G^{(1)} = 10$ для иллюстрации сходимости полученных результатов.

К-во элем.	480	360	288	216	192	144	96
$\sigma_{33}/\sigma^{(0)}$	-1.192369	-1.189312	-1.198138	-1.187521	-1.201534	-1.186677	-1.203319
$\sigma_{11}/\sigma^{(0)}$	-1.081506	-1.086179	-1.079360	-1.088751	-1.076674	-1.091078	-1.073166
$\Delta u_r/R$	0.0000093	0.0000138	0.0000307	0.0000593	0.0000723	0.0001388	0.0003373

С целью контроля точности удовлетворения граничных условий, приведены также относительные значения скачка перемещений на полюсе этого включения, которые вследствие симметрии в этой точке должны равняться нулю.

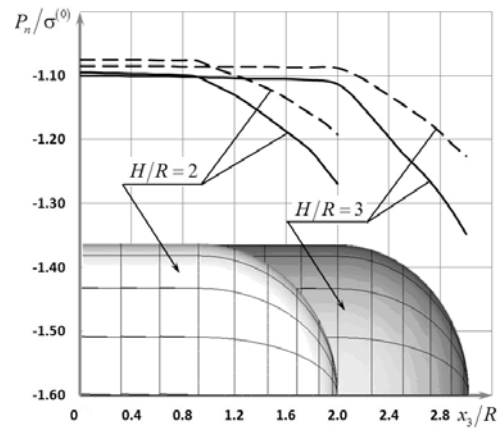
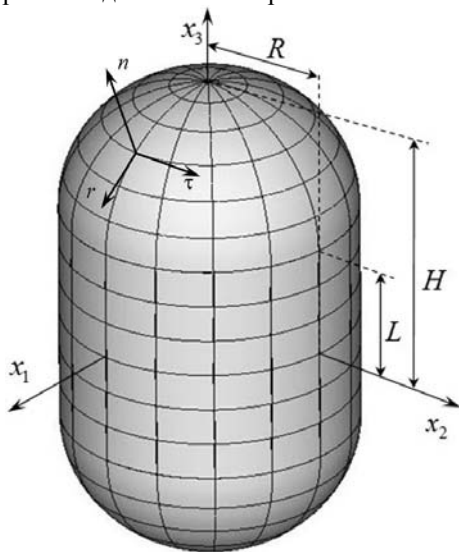


Рис. 2 Рис. 3

Достоверность предложенного метода проверена также на двух модельных задачах: 1) решение задачи о всестороннем сжатии упругого пространства с шарообразным включением, когда $H = R$, дает результат, совпадающий с известным аналитическим решением Эшелби аналогичной задачи при условии идеального механического контакта между матрицей и включением [1]; 2) случай чистого кручения относительно оси Ox_3 упругого пространства с рассмотренным цилиндрическим включением, когда вследствие проскальзывания на включение не передаются усилия. Численные результаты также подтверждают отсутствие деформирования включения в этом случае.

На рис. 3 – 5 показано изменение нормированных значений контактных усилий (рис. 3) и скачков полярных (рис. 4) и азимутальных (рис. 5) касательных перемещений на межфазной поверхности вдоль высоты включения для соотношений $H/R = 2$ и $H/R = 3$.

На рис. 6 приведены зависимости нормальных напряжений $\sigma_{33}/\sigma^{(0)}$ в поперечном сечении включения ($x_3 = 0$) вдоль оси Ox_1 . Сплошные кривые соответствуют случаю гладкого контакта между включением и матрицей, а штриховые – идеального механического межфазного контакта.

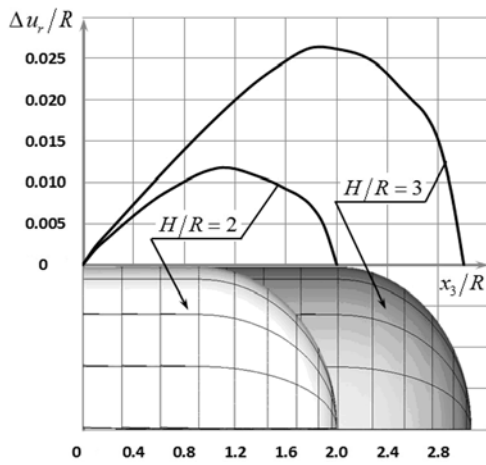


Рис. 4

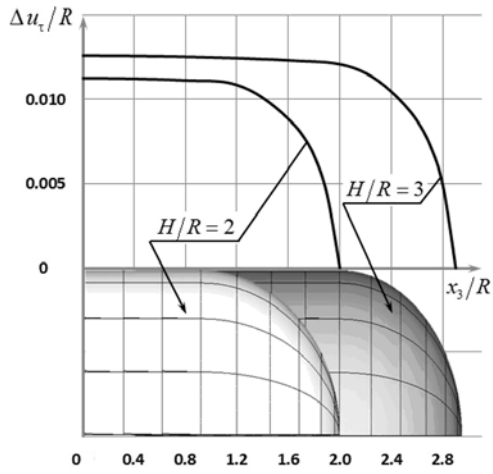


Рис. 5

На рис. 7 показаны зависимости максимальных нормированных значений этих же напряжений от нормированной длины включения H/R для включений разной жесткости ($G^{(2)}/G^{(1)} = 10$ и $G^{(2)}/G^{(1)} = 50$).

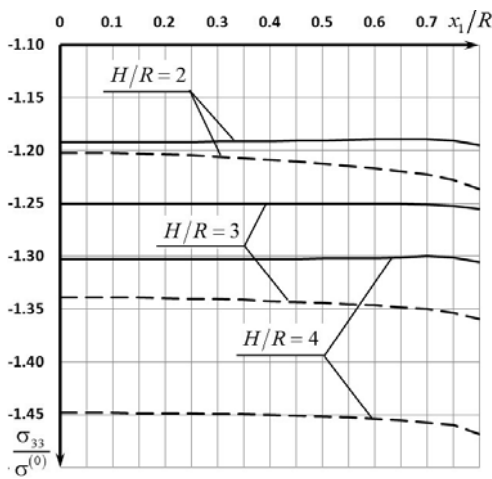


Рис. 6

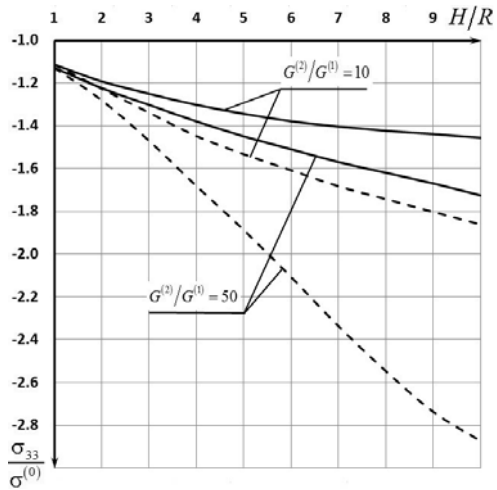


Рис. 7

Нормальные усилия на цилиндрической части межфазной поверхности практически не зависят от характера контакта включения с матрицей (рис. 4). К увеличению относительной длины включения эти величины также нечувствительны. Значительное увеличение нормального давления матрицы на включение по сравнению со случаем идеального механического контакта наблюдается лишь в районе полусферических торцов.

Как видно из представленных результатов на рис. 6 и 7, при гладком контакте матрицы с включением абсолютные значения напряжения σ_{33} в его срединном поперечном сечении значительно меньше по сравнению с аналогом для случая идеального механического контакта. Причем указанное различие возрастает как с удлинением рассматриваемого волокна, так и с увеличением его относительной жесткости. Лишь при всестороннем сжатии шарообразного включения ($H/R = 1$) напряжения внутри включения при гладком и идеальном механическом контакте совпадают. Как видно из рис. 6, распределение напряжений внутри включения при условии гладкого межфаз-

ного контакта имеет более равномерный характер по сравнению со случаем идеального механического контакта.

Из рис. 5 следует, что независимо от относительной длины включения, скачки полярных касательных перемещений на его поверхности достигают максимума примерно в зоне перехода от цилиндрической части поверхности включения в сферическую. Относительно зависимости скачков азимутальных касательных перемещений заметим, что, как видно из рис. 6, в цилиндрической части поверхности включения они изменяются незначительно и резко уменьшаются на торцевых частях его поверхности.

§5. Заключение.

В работе показано, что численно-аналитический метод граничных элементов является эффективным инструментом решения трехмерных задач теории упругости для тел с включениями, которые характеризуются как сложной геометрической формой, так и условиями скользящего контакта с окружающей средой. В частности, он позволяет непосредственное включение таких условий в гранично-интегральную формулировку задач, приводя к уменьшению количества решаемых уравнений.

На примере гладкого контакта конечного цилиндрического волокна с матрицей при всестороннем сжатии установлено качественные и количественные различия в распределении параметров напряженно-деформированного состояния структуры сравнительно со случаем идеального контакта. Этот фактор следует учитывать при моделировании эффективных механических свойств гранулированных и волоконистых композитов, допускающих нарушения сцепления наполнителя с матрицей.

Р Е З Ю М Е . Методом граничних елементів розв'язана тривимірна задача теорії пружності про передачу зусиль із безмежної матриці у включення довільної форми за неідеального ковзного контакту між ними. Специфічні умови контакту враховуються неявно у отриманій системі шести граничних інтегральних рівнянь, які надалі регуляризуються та дискретизуються на введений сітці граничних елементів. На прикладі включення у вигляді скінченного волокна із заокругленими торцями досліджено контактні зусилля на його поверхні, а також переміщення і напруження всередині неоднорідності при всесторонньому стиску матриці на безмежності.

1. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. – М.: Изд. иностр. лит., 1963. – 247 с.
2. Balas J., Sladek J., Sladek V. Stress Analysis by Boundary Element Methods. – Amsterdam: Elsevier, 1989. – 686 p.
3. Guz A.N. Three-Dimensional Theory of Stability of a Carbon Nanotube in a Matrix // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 1. – P. 19 – 31.
4. Guz A.N., Rushchitsky J.J. Analys of Structurally Complex Nanocomposites (Review) // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47**, N 4. – P. 351 – 409.
5. Jasiuk I., Chen J., Thorpe M.F. Elastic moduli of composites with rigid sliding inclusions // J. Mech. Phys. Solids. – 1992. – **40**, N 2. – P. 373 – 391.
6. Kushch V.I. Multipole expansion method in micromechanics of composites // Effective Properties of Heterogeneous Materials (Kachanov M., Sevostianov I., eds.). – Dordrecht: Springer, 2013. – P. 97 – 197.
7. Lutz M.P., Zimmerman R.W. Effect of an inhomogeneous interphase zone on the bulk modulus and conductivity of a particulate composite // Int. J. Solids Struct. – 2005. – **42**. – P. 429 – 437.
8. Mikhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Numerical Solution of Three-Dimensional Static Problems of Elasticity for a Body with a Noncanonical Inclusion // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 4. – P. 380 – 387.
9. Mura T., Jasiuk I., Tsuchida B. The stress field of a sliding inclusion // Int. J. Solids Struct. – 1985. – **21**, N 12. – P. 1165 – 1179.
10. Zhong Z., Yu X.B., Meguid S.A. 3D micromechanical modeling of particulate composite materials with imperfect interface // Int. J. Multiscale Comp. Eng. – 2004. – **2**, N 1. – P. 79 – 94.
11. Zhou K., Hoh H.J., Wang X., Keer L.M., Pang J.H.L., Song B., Wang Q.J. A review of recent works on inclusions // Mech. Mater. – 2013. – **60**, N 1. – P. 144 – 158.

Поступила 16.09.2013

Утверждена в печать 26.05.2015