

С.А.Калоеров, А.А.Самодуров

ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОМАГНИТОВЯЗКОУПРУГОСТИ
ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ПЛАСТИН

Донецкий национальный университет
kaloerov@mail.ru, andrey-samodurov@yandex.ru

Abstract. A method of solving the problem of electromagnetoviscoelasticity for multi-connected plates is proposed. By the small parameter method, this problem is reduced to the recursive sequence of problems of electromagnetoelasticity, which are solved by using the complex potentials. A technique is developed for determination through the complex potentials the approximations of the main characteristics of electromagnetoelastic state (stresses, inductions and intensities of electromagnetic field) at any time after application of load. As an example, the solution of the problem on plate with elliptic hole is given. An essential effect of time on values of basic characteristics of multi-connected electromagnetoviscoelastic plates is shown.

Key words: multi-connected electromagnetoviscoelastic plate, time operator, complex potential, small parameter method.

Введение.

В различных отраслях современной техники широкое применение получили элементы из пьезоматериалов. В связи с этим возникла необходимость разработки методов определения их электромагнитоупругого состояния при действии на них механических сил и электромагнитных полей. Общие подходы решения таких задач предложены в работах [2, 10], а в монографиях [3, 6] разработаны методы решения задач электромагнитоупругости для многосвязных областей, позволяющие определять напряженно-деформированное состояние пластинок с отверстиями, трещинами. Но во всех указанных работах не учитывались вязкоупругие свойства материалов, за счет которых возникающее мгновенное напряженно-деформированное состояние со временем изменяется. Учету этого явления и посвящена данная статья, в которой решение задачи линейной вязкоупругости для пьезопластины сведено к последовательности задач электромагнитоупругости, которые решаются с использованием комплексных потенциалов. На примере решения задачи для пластинки с эллиптическим отверстием показано влияние времени на значения напряжений.

§1. Постановка задачи.

Рассмотрим отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат $Oxuz$ находящуюся в условиях обобщенного плоского электромагнитоупругого состояния конечную пьезопластину, занимающую многосвязную область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$). К контурам пластинки приложены механические и электромагнитные воздействия; во внутренних точках области $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ ($r = \overline{1, R}$) действуют сосредоточенные силы, электрические заряды и магнитные диполи. Если внешний контур L_0 полностью уходит в бесконеч-

ность, то будем иметь бесконечную пластинку с отверстиями. В последнем случае предположим, что на бесконечности заданы напряжения σ_x^∞ , σ_y^∞ , τ_{xy}^∞ , угол жесткого поворота пластинки как целого ω_3^∞ , а также компоненты векторов индукций D_x^∞ , D_y^∞ , B_x^∞ , B_y^∞ или напряженностей E_x^∞ , E_y^∞ , H_x^∞ , H_y^∞ электромагнитного поля. Принимаем, что по упругим свойствам пластинка является вязкоупругой, электромагнитные свойства материала с течением времени не изменяются.

Для рассматриваемой пластинки решим задачу электромагнитовязкоупругости, заключающуюся в определении изменяющегося во времени электромагнитоупругого состояния (ЭМУС). Эту задачу решаем, используя принцип Вольтерра [11], в соответствии с которым следует сначала решать задачу электромагнитоупругости без учета времени, а затем в полученном решении заменять упругие постоянные соответствующими временными операторами и определять их воздействия с течением времени.

§2. Основные соотношения электромагнитоупругости.

Решение задачи электромагнитовязкоупругости без учета времени сводится к интегрированию основной системы уравнений [6, 10], состоящей из:

уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad (2.1)$$

уравнений электромагнитостатики

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0; \quad (2.2)$$

уравнений электромагнитоупругого состояния

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{16}\tau_{xy} + g_{11}D_x + g_{21}D_y + p_{11}B_x + p_{21}B_y; \\ \varepsilon_y &= s_{12}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{26}\tau_{xy} + g_{12}D_x + g_{22}D_y + p_{12}B_x + p_{22}B_y; \\ \gamma_{xy} &= s_{16}\sigma_x + s_{26}\sigma_y + s_{66}\tau_{xy} + g_{16}D_x + g_{26}D_y + p_{16}B_x + p_{26}B_y; \\ E_x &= -g_{11}\sigma_x - g_{12}\sigma_y - g_{16}\tau_{xy} + \beta_{11}D_x + \beta_{12}D_y + \nu_{11}B_x + \nu_{12}B_y; \\ E_y &= -g_{21}\sigma_x - g_{22}\sigma_y - g_{26}\tau_{xy} + \beta_{12}D_x + \beta_{22}D_y + \nu_{12}B_x + \nu_{22}B_y; \\ H_x &= -p_{11}\sigma_x - p_{12}\sigma_y - p_{16}\tau_{xy} + \nu_{11}D_x + \nu_{12}D_y + \chi_{11}B_x + \chi_{12}B_y; \\ H_y &= -p_{21}\sigma_x - p_{22}\sigma_y - p_{26}\tau_{xy} + \nu_{12}D_x + \nu_{22}D_y + \chi_{12}B_x + \chi_{22}B_y; \end{aligned} \quad (2.3)$$

соотношений Коши и потенциальности электромагнитного поля

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad H_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad H_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций; u, v – проекции вектора перемещений; D_x, D_y, E_x, E_y и φ – компоненты векторов индукции, напряженности и потенциал электрического поля; B_x, B_y, H_x, H_y и ψ – компоненты векторов индукции, напряженности и потенциал магнитного поля; s_{ij} – коэффициенты деформаций материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей; g_{ki} и p_{ki} – пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформаций и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях; β_{kl}, χ_{kl} и ν_{kl} – коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивости, измеренные при постоянных напряжениях. При этом имеет место соотношение совместности Сен-Венана

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad (2.5)$$

а остальные соотношения совместности деформаций выполняются тождественно.

Если задачу электромагнитоупругости решать с использованием обобщенных комплексных потенциалов, то определение электромагнитоупругого состояния пьезопластины при использовании теории функций комплексного переменного сводится к нахождению комплексных потенциалов электромагнитоупругости $\Phi_k(z_k)$ из соответствующих граничных условий. После получения комплексных потенциалов основные характеристики (напряжения, перемещения, индукции и потенциалы) вычисляем по формулам [3, 6]

$$\begin{aligned} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}) \Phi'_k(z_k); \\ (u, v, \varphi, \psi) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k) + (-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0, \varphi_0, \psi_0); \\ (D_x, D_y) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}) \Phi'_k(z_k); \\ (E_x, E_y) &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (r_k^0, \mu_k r_k^0) \Phi'_k(z_k); \quad (B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{9k}, \lambda_{10k}) \Phi'_k(z_k); \\ (H_x, H_y) &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi'_k(z_k); \\ z_k &= x + \mu_k y; \end{aligned} \quad (2.6)$$

μ_k – корни характеристического уравнения

$$\begin{aligned} l_{4s}(\mu) [l_{2\beta}(\mu) l_{2\gamma}(\mu) - l_{2v}^2(\mu)] - l_{3g}(\mu) [l_{3g}(\mu) l_{2\gamma}(\mu) - l_{3p}(\mu) l_{2v}(\mu)] - \\ - l_{3p}(\mu) [l_{3p}(\mu) l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}(\mu) l_{2v}(\mu)] = 0; \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22};$$

$$\begin{aligned}
l_{3g}(\mu) &= g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22}; \\
l_{3p}(\mu) &= p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu - p_{22}; \\
l_{2\beta}(\mu) &= -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22}, \quad l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22}; \\
l_{2\chi}(\mu) &= -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22}; \tag{2.9}
\end{aligned}$$

$$\lambda_{1k} = \mu_k^2; \quad \lambda_{2k} = 1; \quad \lambda_{6k} = -\mu_k;$$

$$\lambda_{7k} = \nu_k \mu_k; \quad \lambda_{8k} = -\nu_k; \quad \lambda_{9k} = \rho_k \mu_k; \quad \lambda_{10k} = -\rho_k;$$

$$p_k = s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} + (g_{11}\mu_k - g_{21})\nu_k + (p_{11}\mu_k - p_{21})\rho_k;$$

$$q_k = s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + \left(g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k}\right)\nu_k + \left(p_{12} - \frac{p_{22}}{\mu_k}\right)\rho_k;$$

$$r_k^0 = g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\rho_k;$$

$$h_k^0 = p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k; \tag{2.10}$$

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)}, \quad \rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{2\beta}(\mu_k)l_{3p}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)}; \tag{2.11}$$

$-\omega_3 y + u_0$, $\omega_3 x + v_0$ – жесткие перемещения тела как целого; ω_3 – угол поворота плоскости Oxy против часовой стрелки, причем $\omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$; u_0 , v_0 – компоненты поступательного движения тела; φ_0 и ψ_0 – нулевой уровень потенциалов электрического и магнитного полей.

Функции $\Phi_k(z_k)$ для неподкрепленных контуров L_l (первая основная задача) должны удовлетворять граничным условиям [6]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k) \Phi_k(z_k) = \pm \int_0^s (-Y_{ln}, X_{ln}, D_{ln}, B_{ln}) ds + (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}) \tag{2.12}$$

при задании на контуре индукции электромагнитного поля D_{ln} , B_{ln} или

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k) = \left(\mp \int_0^s Y_{ln} ds, \pm \int_0^s X_{ln} ds, \varphi_{l*}, \psi_{l*} \right) + (c_{l1}, c_{l2}, -\varphi_0, -\psi_0), \tag{2.13}$$

если на контуре заданы потенциалы электрического и магнитного полей φ_{l*} , ψ_{l*} . Для контуров, на которых заданы перемещения u_{l*} , v_{l*} (вторая основная задача), граничные условия имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, \nu_k, \rho_k) \Phi_k(t_k) =$$

$$= \left(u_{l^*} + \omega_3 y - u_0, v_{l^*} - \omega_3 x - v_0, \pm \int_0^s D_{ln} ds + c_{l3}, \pm \int_0^s B_{ln} ds + c_{l4} \right) \quad (2.14)$$

при задании на контурах индукций или

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(t_k) = (u_{l^*} + \omega_3 y - u_0, v_{l^*} - \omega_3 x - v_0, \varphi_{l^*} - \varphi_0, \psi_{l^*} - \psi_0), \quad (2.15)$$

если на контуре заданы потенциалы электрического и магнитного полей. В (2.12)–(2.15) верхние знаки в правой части относятся к внешнему контуру, нижние – к контурам отверстий и тонких колец. При идеальном механическом и электромагнитном контактах пластины с включением с областью $S^{(l)}$, граничные условия на L_l имеют вид [3]

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[(1, \mu_k, p_k, q_k, v_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k) - \right. \\ & \left. - (1, \mu_k^{(l)}, p_k^{(l)}, q_k^{(l)}, v_k^{(l)}, \rho_k^{(l)}, r_k^{0(l)}, h_k^{0(l)}) \Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) \right] = \\ & = (c_{l1}, c_{l2}, \omega_3 y - u_0 - \omega_3^{(l)} y + u_0^{(l)}, -\omega_3 x - v_0 + \omega_3^{(l)} x + v_0^{(l)}, c_{l3}, c_{l4}, \varphi_0, \psi_0), \quad (2.16) \end{aligned}$$

где $\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)})$ – комплексные потенциалы для включения с областью $S^{(l)}$; c_{li} , φ_0 , ψ_0 , u_0 , $u_0^{(l)}$, v_0 , $v_0^{(l)}$ – постоянные. Для абсолютно жесткого включения для L_l должно выполняться также условие [3]

$$\sum_{k=1}^4 (\beta_{kl1} - \bar{\beta}_{kl1}) = 0, \quad (2.17)$$

в котором β_{kl1} – вычет функции $\Phi_{k0}(z_k)$ в точке z_{kl} .

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} , получаемыми из L_l аффинными преобразованиями (2.7). В общем случае функции имеют вид [3, 6]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^R A_{kr}^0 \ln(z_k - z_{kr}^0) + \Phi_{k0}(z_k). \quad (2.18)$$

Здесь Γ_k – постоянные, равные нулю для конечной области и определяемые для бесконечной области из системы

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, v_k, \mu_k v_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k = \\ & = (\sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, 2\omega_3^\infty, -D_y^\infty, D_x^\infty, -B_y^\infty, B_x^\infty) \quad (2.19) \end{aligned}$$

при задании на бесконечности компонент векторов индукции электромагнитного поля или

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Gamma_k =$$

$$= \left(\sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, 2\omega_3^\infty, -E_x^\infty, -E_y^\infty, -H_x^\infty, -H_y^\infty \right), \quad (2.20)$$

если на бесконечности заданы компоненты векторов напряженности поля; A_{kl} , A_{kj}^0 – постоянные, определяемые из систем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0 \right) i A_{kl} = \\ = \left(\frac{Y_l}{2\pi}, -\frac{X_l}{2\pi}, 0, 0, -\frac{Q_{el}}{2\pi}, -\frac{Q_{ml}}{2\pi}, 0, 0 \right); \quad (2.21)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, p_k, q_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0 \right) i A_{kr}^0 = \left(\frac{Y_r}{2\pi}, -\frac{X_r}{2\pi}, 0, 0, -\frac{Q_{er}^0}{2\pi}, -\frac{Q_{mr}^0}{2\pi}, 0, 0 \right); \quad (2.22)$$

$\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k ; X_l , Y_l и Q_{el} , Q_{ml} – компоненты главного вектора внешних усилий и суммарные электрический и магнитный заряды, приложенные к контуру L_l ; X_r , Y_r и Q_{er}^0 , Q_{mr}^0 – компоненты сосредоточенной силы и сосредоточенные электрические заряды и диполи в точке $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$.

Таким образом, в каждом конкретном случае после выбора функций (2.18) и удовлетворения соответствующим граничным условиям (2.12) – (2.16) находятся комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$, а затем по ним основные характеристики ЭМУС (2.6). При этом, если выражения основных характеристик представляются произведениями рациональных функций постоянных в уравнениях состояния (2.3) на функции координат, то ЭМУС с течением времени можно определять, заменив в этих выражениях постоянные в уравнениях состояния временными операторами и вычислив действие этих операторов во времени.

§3. Определение электромагнитовязкоупругого состояние по принципу Вольтерра.

Из уравнений электромагнитоупругого состояния для деформаций в случае ортотропных материалов имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{13}\sigma_z + g_{11}D_x + g_{21}D_y + g_{31}D_z + p_{11}B_x + p_{21}B_y + p_{31}B_z; \\ \varepsilon_y &= s_{12}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{23}\sigma_z + g_{12}D_x + g_{22}D_y + g_{32}D_z + p_{12}B_x + p_{22}B_y + p_{32}B_z; \\ \varepsilon_z &= s_{13}\sigma_x + s_{23}\sigma_y + s_{33}\sigma_z + g_{13}D_x + g_{23}D_y + g_{33}D_z + p_{13}B_x + p_{23}B_y + p_{33}B_z; \\ \gamma_{yz} &= s_{44}\tau_{yz} + g_{14}D_x + g_{24}D_y + g_{34}D_z + p_{14}B_x + p_{24}B_y + p_{34}B_z; \\ \gamma_{xz} &= s_{55}\tau_{xz} + g_{15}D_x + g_{25}D_y + g_{35}D_z + p_{15}B_x + p_{25}B_y + p_{35}B_z; \\ \gamma_{xy} &= s_{66}\tau_{xy} + g_{16}D_x + g_{26}D_y + g_{36}D_z + p_{16}B_x + p_{26}B_y + p_{36}B_z; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$s_{11} = \frac{1}{E_1}; \quad s_{22} = \frac{1}{E_2}; \quad s_{33} = \frac{1}{E_3}; \quad s_{44} = \frac{1}{G_{12}}; \quad s_{55} = \frac{1}{G_{23}}; \quad s_{66} = \frac{1}{G_{31}};$$

$$s_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}; \quad s_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}; \quad s_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}; \quad (3.2)$$

E_i, ν_{ij} – модули Юнга и коэффициенты Пуассона для соответствующих направлений.

Если изменения технических постоянных со временем представить с помощью операторов Работнова Ю. Н. [11], тогда

$$E_i^* = E_i^0 \left[1 - \delta_i^* \mathcal{E}_{\alpha^*}^* (-\beta_i^* - \delta_i^*) \right]; \quad \nu_{12}^* = \nu_{12}^0 \left[1 + \delta^* \mathcal{E}_{\alpha^*}^* (-\beta^*) \right];$$

$$G_{ij}^* = G_{ij}^0 \left[1 - \delta_{ij}^* \mathcal{E}_{\alpha^*}^* (-\beta_{ij}^* - \delta_{ij}^*) \right], \quad (3.3)$$

в которых $E_i^0, \nu_{12}^0, G_{ij}^0$ – мгновенные значения соответствующих постоянных (остальные ν_{ij} выражаются через ν_{12});

$$\mathcal{E}_{\alpha^*}(\beta, t - \tau) = (t - \tau)^{\alpha^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n (t - \tau)^{n(1+\alpha^*)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha^*)]} \quad (3.4)$$

– оператор Работнова Ю. Н., $\Gamma(1+\alpha^*)$ ($-1 < \alpha^* < 0$) – гамма-функция, δ_i^*, β_i^* и $\delta_{ij}^*, \beta_{ij}^*$ – реологические постоянные материала, связанные с изменением соответствующих E_i и G_{ij} во времени; δ^*, β^* – реологические постоянные материала, связанные с изменением ν_{12} во времени.

Таким подходом можно воспользоваться, если известны реологические постоянные, связанные с изменением всех технических постоянных. Однако для анизотропных материалов в большинстве случаев известны лишь реологические постоянные, связанные с коэффициентами E_i, G_{ij} для главных направлений. Поэтому возникает необходимость получения неизвестных реологических постоянных через известные. Кроме того, для уменьшения числа операторов, входящих в полученные решения в исследованиях для конкретных задач применяют различные упрощения [13, 14, 20]. Это можно сделать, учитывая постоянство во времени некоторых величин.

Из уравнений (3.1) для первого инварианта тензора деформаций в случае ортотропного материала имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z &= (s_{11} + s_{12} + s_{13})\sigma_x + (s_{12} + s_{22} + s_{23})\sigma_y + (s_{13} + s_{23} + s_{33})\sigma_z + \\ &+ (g_{11} + g_{12} + g_{13})D_x + (g_{21} + g_{22} + g_{23})D_y + (g_{31} + g_{32} + g_{33})D_z + \\ &+ (p_{11} + p_{12} + p_{13})B_x + (p_{21} + p_{22} + p_{23})B_y + (p_{31} + p_{32} + p_{33})B_z \end{aligned} \quad (3.5)$$

или

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{1}{K_1}\sigma_x + \frac{1}{K_2}\sigma_y + \frac{1}{K_3}\sigma_z + \frac{1}{K_{1D}}D_x + \\ &+ \frac{1}{K_{2D}}D_y + \frac{1}{K_{3D}}D_z + \frac{1}{K_{1B}}B_x + \frac{1}{K_{2B}}B_y + \frac{1}{K_{3B}}B_z, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\mathcal{G} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ – первый инвариант тензора деформаций; K_1, K_2, K_3 – модули деформаций для растяжения-сжатия вдоль главных направлений [1]; K_{iD}, K_{iB} – модули деформаций для электромагнитных воздействий, причем

$$\frac{1}{K_1} = s_{11} + s_{12} + s_{13}; \quad \frac{1}{K_2} = s_{12} + s_{22} + s_{23}; \quad \frac{1}{K_3} = s_{13} + s_{23} + s_{33}; \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{K_{1D}} = g_{11} + g_{12} + g_{13}; \quad \frac{1}{K_{2D}} = g_{21} + g_{22} + g_{23}; \quad \frac{1}{K_{3D}} = g_{31} + g_{32} + g_{33};$$

$$\frac{1}{K_{1B}} = p_{11} + p_{12} + p_{13}; \quad \frac{1}{K_{1B}} = p_{21} + p_{22} + p_{23}; \quad \frac{1}{K_{3B}} = p_{31} + p_{32} + p_{33}. \quad (3.8)$$

При действии на тело гидростатического давления (всестороннего растяжения-сжатия), когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$, учитывая свойства первого инварианта тензора напряжений $\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, формулу (3.6) запишем в виде

$$g = \frac{1}{K} \theta + \frac{1}{K_{1D}} D_x + \frac{1}{K_{2D}} D_y + \frac{1}{K_{3D}} D_z + \frac{1}{K_{1B}} B_x + \frac{1}{K_{2B}} B_y + \frac{1}{K_{3B}} B_z; \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{K} = s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2s_{12} + 2s_{13} + 2s_{23}; \quad (3.10)$$

K – модуль объемной деформации тела для растяжения-сжатия, который со временем не изменяется [8, 12, 14]. Также примем, что со временем не изменяются и модули деформаций для электромагнитных воздействий K_{iD} и K_{iB} . Подставляя в (3.10) представления (3.2), получим

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{2\nu_{23}}{E_2} - \frac{2\nu_{13}}{E_1}. \quad (3.11)$$

В связи с тем, что в литературе отсутствуют значения модуля Юнга E_3 , коэффициентов Пуассона ν_{13} и ν_{23} и их реологические постоянные, примем, что [5, 19]

$$s_{33} = (s_{11} + s_{22}) / 2; \quad s_{13} = s_{23} = s_{12}, \quad (3.12)$$

т. е.

$$\frac{1}{E_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right); \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}. \quad (3.13)$$

Тогда из (3.11) получим равенство

$$\frac{1}{K} = \frac{3}{2E_1} + \frac{3}{2E_2} - \frac{6\nu_{12}}{E_1}, \quad (3.14)$$

откуда следует, что

$$\nu_{12} = \frac{1}{6} \left(\frac{3}{2} + \frac{3E_1}{E_2} - \frac{E_1}{K} \right). \quad (3.15)$$

Заменив в последних формулах модули Юнга временными операторами (3.3) с учетом постоянства во времени K , для ν_{12} получим операторные представления

$$\nu_{12}^* = \frac{1}{6} \left(\frac{3}{2} + \frac{3E_1^*}{E_2^*} - \frac{E_1^*}{K^0} \right), \quad (3.16)$$

где K^0 – постоянное значение модуля объемной деформации тела (3.14), в котором E_i принимают значения E_i^0 ;

$$E_1^* = E_1^0 \left[1 - \delta_1^* \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_1^* - \delta_1^*) \right]; \quad \frac{1}{E_2^*} = \frac{1}{E_2^0} \left[1 + \delta_2^* \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_2^*) \right]. \quad (3.17)$$

Таким образом, после решения задачи электромагнитоупругости, заменив в выражениях основных характеристик ЭМУС постоянные их временными операторами, можно определить значения этих величин в любой момент времени, если они представляются произведениями рациональных функций постоянных в уравнениях состояния (2.3) на функции координат. Но в большинстве случаев, и в первую очередь для многосвязных областей, невозможно получить решение задачи в явном виде, и, следовательно, непосредственное применение принципа Вольтерра к анализу электромагнитоупругого состояния тел невозможно. В связи с этим возникает необходимость и в этих случаях получать такие решения, которые явным образом содержали бы коэффициенты упругих деформаций. Это можно получить, используя метод малого параметра.

§4 Сведение задачи электромагнитоупругости к ряду задач электромагнитоупругости.

Выделим из коэффициентов деформации s_{ij} величину, меньшую единицы, и разложим все решение задачи в ряд по ней как по малому параметру.

Из технических постоянных меньшими единицы являются только коэффициенты Пуассона ν_{ij} . Поэтому в качестве малого параметра можно принять любой из коэффициентов, например ν_{12} . Но сходимость получаемых решений ускорится, если в качестве малого параметра принять не коэффициент Пуассона ν_{12} , а его изменение с течением времени представить ν_{12} в виде

$$\nu_{12} = \nu_{12}^0 + \lambda, \quad (4.1)$$

в котором ν_{12}^0 – мгновенно-упругое значение коэффициента Пуассона ν_{12} .

Учитывая равенство (4.1), из выражений (3.2), (2.10) получим

$$s_{12} = s_{12}^0 - \lambda s_{11}; \quad p_k = p_{k0} + \lambda p_{k1}; \quad q_k = q_{k0} + \lambda q_{k1}, \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} s_{12}^0 &= -\nu_{12}^0 s_{11}; \quad p_{k1} = -s_{11}; \quad q_{k1} = -s_{11} \mu_k; \\ p_{k0} &= \left(\mu_k^2 - \nu_{12}^0 \right) s_{11} - s_{16} \mu_k + \left(g_{11} \mu_k - g_{21} \right) \nu_k + \left(p_{11} \mu_k - p_{21} \right) \rho_k; \\ q_{k0} &= -\mu_k \nu_{12}^0 s_{11} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - s_{26} + \left(g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k} \right) \nu_k + \left(p_{12} - \frac{p_{22}}{\mu_k} \right) \rho_k. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Введем малый параметр λ в приведенное выше общее решение задачи электромагнитоупругости. Но прежде чем использовать этот параметр, несколько преобразуем систему (2.19) – (2.22).

Характеристическое уравнение (2.8) не может иметь вещественных корней [3, 6, 9], в том числе и равных нулю, т. е. $\mu_k \neq 0$. Кроме того, $l_{2\beta}(\mu_k) l_{2\gamma}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k) \neq 0$, иначе уравнение (2.8) не содержало бы полинома $l_{4s}(\mu_k)$ с коэффициентами деформации и не соответствовало бы задаче электромагнитоупругости. Следовательно, для любых пьезоматериалов – $\mu_k \left(l_{2\beta}(\mu_k) l_{2\gamma}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k) \right) \neq 0$. Исходя из этого, преобразуем

зуем системы уравнений (2.19) – (2.22) таким образом, чтобы их определители не содержали постоянную s_{12} , входящую в коэффициенты $q_k - \mu_k p_k$.

Исходя из выражений (2.10), имеем равенства

$$q_k - \mu_k p_k = \frac{s_{22}}{\mu_k} - s_{26} + s_{16}\mu_k^2 - s_{11}\mu_k^3 + v_k \left(-\frac{g_{22}}{\mu_k} + g_{12} + g_{21}\mu_k - g_{11}\mu_k^2 \right) + \rho_k \left(-\frac{p_{22}}{\mu_k} + p_{12} + p_{21}\mu_k - p_{11}\mu_k^2 \right). \quad (4.4)$$

Тогда четвертое уравнение системы (2.19) можно записать в виде

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[\frac{s_{22}}{\mu_k} - s_{26} + s_{16}\mu_k^2 - s_{11}\mu_k^3 + v_k \left(-\frac{g_{22}}{\mu_k} + g_{12} + g_{21}\mu_k - g_{11}\mu_k^2 \right) + \rho_k \left(-\frac{p_{22}}{\mu_k} + p_{12} + p_{21}\mu_k - p_{11}\mu_k^2 \right) \right] \Gamma_k = 2\omega_3^\infty. \quad (4.5)$$

Разделив уравнение (2.8) на $\mu_k (l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\gamma}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k))$, получим

$$s_{11}\mu_k^3 - 2s_{16}\mu_k^2 + (2s_{12} + s_{66})\mu_k - 2s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + v_k (g_{11}\mu_k^2 - (g_{21} + g_{16})\mu_k + (g_{12} + g_{26}) - \frac{g_{22}}{\mu_k}) + \rho_k (p_{11}\mu_k^2 - (p_{21} + p_{16})\mu_k + (p_{12} + p_{26}) - \frac{p_{22}}{\mu_k}) = 0. \quad (4.6)$$

Выразив из последнего уравнения $s_{11}\mu_k^3$ и подставив его в (4.4), находим

$$q_k - \mu_k p_k = \frac{s_{22}}{\mu_k} - s_{26} + s_{16}\mu_k^2 - s_{11}\mu_k^3 + v_k \left(-\frac{g_{22}}{\mu_k} + g_{12} + g_{21}\mu_k - g_{11}\mu_k^2 \right) + \rho_k \left(-\frac{p_{22}}{\mu_k} + p_{12} + p_{21}\mu_k - p_{11}\mu_k^2 \right) = 2 \frac{s_{22}}{\mu_k} - 3s_{26} + (2s_{12} + s_{66})\mu_k - s_{16}\mu_k^2 + v_k \left(-\frac{2g_{22}}{\mu_k} + 2g_{12} + g_{26} - g_{16}\mu_k \right) + \rho_k \left(-\frac{2p_{22}}{\mu_k} + 2p_{12} + p_{26} - p_{16}\mu_k \right). \quad (4.7)$$

Поэтому четвертое уравнение системы (2.19) примет вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{v_k}{s_{22}} \left(g_{22} - \frac{2g_{12} + g_{26}}{2} \mu_k + \frac{g_{16}}{2} \mu_k^2 \right) - \frac{\rho_k}{s_{22}} \left(p_{22} - \frac{2p_{12} + p_{26}}{2} \mu_k + \frac{p_{16}}{2} \mu_k^2 \right) \right] \Gamma_k = \frac{1}{2s_{22}} \left[2\omega_3^\infty + 3s_{26}\sigma_y^\infty + (2s_{12} + s_{66})\tau_{xy}^\infty + s_{16}\sigma_x^\infty \right]. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) преобразуем, учитывая первые три уравнения системы (2.19). Окончательно систему (2.19) запишем в виде

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{v_k}{s_{22}} \left(g_{22} - \frac{2g_{12} + g_{26}}{2} \mu_k + \frac{g_{16}}{2} \mu_k^2 \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\rho_k}{s_{22}} \left(p_{22} - \frac{2p_{12} + p_{26}}{2} \mu_k + \frac{p_{16}}{2} \mu_k^2 \right) \right], v_k, \mu_k v_k, \rho_k, \mu_k \rho_k \right\} \Gamma_k = \\
& = \left\{ \sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, \frac{1}{2s_{22}} \left[2\omega_3^\infty + 3s_{26}\sigma_y^\infty + 2s_{12} + s_{66}\tau_{xy}^\infty + s_{16}\sigma_x^\infty \right], -D_y^\infty, D_x^\infty, -B_y^\infty, B_x^\infty \right\}. \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Если на бесконечности заданы напряженности, то последние четыре уравнения системы (4.9) примут такой вид:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0 \right\} \Gamma_k = \left\{ -E_x^\infty, -E_y^\infty, -H_x^\infty, -H_y^\infty \right\}. \quad (4.10)$$

По аналогии с выводом уравнений (4.9) из систем (2.21) – (2.22) получаем

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2 \left[1 + \frac{v_k g_{11} + \rho_k p_{11}}{\mu_k s_{11}} \right], \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{v_k g_{22} - \rho_k p_{22}}{s_{22}} \right], v_k, r_k^0, \rho_k, h_k^0 \right\} i A_{kl} = \\
& = \left\{ \frac{Y_l}{2\pi}, -\frac{X_l}{2\pi}, -\frac{s_{16}X_l + s_{12}Y_l + g_{21}Q_{el} + p_{21}Q_{ml}}{2\pi s_{11}}, \frac{s_{12}X_l + s_{26}Y_l + g_{12}Q_{el} + p_{12}Q_{ml}}{2\pi s_{22}}, \right. \\
& \left. -\frac{Q_{el}}{2\pi}, 0, -\frac{Q_{ml}}{2\pi}, 0 \right\}; \quad (4.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2 \left[1 + \frac{v_k g_{11} + \rho_k p_{11}}{\mu_k s_{11}} \right], \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{v_k g_{22} - \rho_k p_{22}}{s_{22}} \right], v_k, r_k^0, \rho_k, h_k^0 \right\} i A_{kr}^0 = \\
& = \left\{ \frac{Y_r^0}{2\pi}, -\frac{X_r^0}{2\pi}, -\frac{s_{16}X_r^0 + s_{12}Y_r^0 + g_{21}Q_{er}^0 + p_{21}Q_{mr}^0}{2\pi s_{11}}, \frac{s_{12}X_r^0 + s_{26}Y_r^0 + g_{12}Q_{er}^0 + p_{12}Q_{mr}^0}{2\pi s_{22}}, \right. \\
& \left. -\frac{Q_{er}^0}{2\pi}, 0, -\frac{Q_{mr}^0}{2\pi}, 0 \right\}. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Разложим входящие в выражения (2.18) постоянные Γ_k , A_{kl} , A_{kr}^0 и функции $\Phi_k^*(z_k)$, а также углы поворотов ω_3 , в ряды по малому параметру λ [5, 19]

$$\begin{aligned}
& \Gamma_k = \sum_{j=0} \lambda^j \Gamma_{jk}; \quad A_{kl} = \sum_{j=0} \lambda^j A_{jkl}; \quad A_{kr}^0 = \sum_{j=0} \lambda^j A_{jkr}^0 \\
& \left(\Phi_k^*(z_k), \omega_3 \right) = \sum_{j=0} \lambda^j \left(\Phi_{jk}^*(z_k), \omega_{j3} \right). \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Подставив разложения (4.13), (4.3) в системы (4.9) – (4.12), учитывая, что $s_{12} = s_{12}^0 - \lambda s_{11}$ и сравнивая в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых

степенях λ , для определения постоянных Γ_{jk} , A_{jkl} , A_{jkr}^0 получим следующие последовательности систем уравнений:

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{\nu_k}{s_{22}} \left(g_{22} - \frac{2g_{12} + g_{26}}{2} \mu_k + \frac{g_{16}}{2} \mu_k^2 \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\rho_k}{s_{22}} \left(p_{22} - \frac{2p_{12} + p_{26}}{2} \mu_k + \frac{p_{16}}{2} \mu_k^2 \right) \right], \nu_k, \mu_k \nu_k, \rho_k, \mu_k \rho_k \right\} \Gamma_{0k} = \\
& = \left\{ \sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, \frac{1}{2s_{22}} \left[2\omega_3^\infty + 3s_{26}\sigma_y^\infty + (s_{66} - 2\nu_{12}^0 s_{11}) \tau_{xy}^\infty + s_{16}\sigma_x^\infty \right], -D_y^\infty, D_x^\infty, -B_y^\infty, B_x^\infty \right\}; \\
& 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{\nu_k}{s_{22}} \left(g_{22} - \frac{2g_{12} + g_{26}}{2} \mu_k + \frac{g_{16}}{2} \mu_k^2 \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\rho_k}{s_{22}} \left(p_{22} - \frac{2p_{12} + p_{26}}{2} \mu_k + \frac{p_{16}}{2} \mu_k^2 \right) \right], \nu_k, \mu_k \nu_k, \rho_k, \mu_k \rho_k \right\} \Gamma_{1k} = \\
& = \left\{ 0, 0, 0, -\frac{s_{11}}{2s_{22}} \tau_{xy}^\infty, 0, 0, 0, 0 \right\}; \tag{4.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2 \left[1 + \frac{\nu_k g_{11} + \rho_k p_{11}}{\mu_k s_{11}} \right], \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{\nu_k g_{22} - \rho_k p_{22}}{s_{22}} \right], \nu_k, r_k^0, \rho_k, h_k^0 \right\} i \Lambda_{0kl} = \\
& = \left\{ \frac{Y_l}{2\pi}, -\frac{X_l}{2\pi}, -\frac{s_{16} X_l - \nu_{12}^0 s_{11} Y_l + g_{21} Q_{el} + p_{21} Q_{ml}}{2\pi s_{11}}, \frac{-\nu_{12}^0 s_{11} X_l + s_{26} Y_l + g_{12} Q_{el} + p_{12} Q_{ml}}{2\pi s_{22}}, \right. \\
& \left. -\frac{Q_{el}}{2\pi}, 0, -\frac{Q_{ml}}{2\pi}, 0 \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2 \left[1 + \frac{\nu_k g_{11} + \rho_k p_{11}}{\mu_k s_{11}} \right], \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{\nu_k g_{22} - \rho_k p_{22}}{s_{22}} \right], \nu_k, r_k^0, \rho_k, h_k^0 \right\} i \Lambda_{1kl} = \\
& = \{0, 0, -s_{11} Y_l, -s_{11} X_l, 0, 0, 0, 0\}; \tag{4.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2 \left[1 + \frac{\nu_k g_{11} + \rho_k p_{11}}{\mu_k s_{11}} \right], \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{\nu_k g_{22} - \rho_k p_{22}}{s_{22}} \right], \nu_k, r_k^0, \rho_k, h_k^0 \right\} i A_{0kr}^0 = \\
& = \left\{ \frac{Y_r^0}{2\pi}, -\frac{X_r^0}{2\pi}, -\frac{s_{16} X_r^0 - \nu_{12}^0 s_{11} Y_r^0 + g_{21} Q_{er}^0 + p_{21} Q_{mr}^0}{2\pi s_{11}}, \frac{-\nu_{12}^0 s_{11} X_r^0 + s_{26} Y_r^0 + g_{12} Q_{er}^0 + p_{12} Q_{mr}^0}{2\pi s_{22}}, \right. \\
& \left. -\frac{Q_{er}^0}{2\pi}, 0, -\frac{Q_{mr}^0}{2\pi}, 0 \right\};
\end{aligned}$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2 \left[1 + \frac{v_k g_{11} + \rho_k p_{11}}{\mu_k s_{11}} \right], \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{v_k g_{22} - \rho_k p_{22}}{s_{22}} \right], v_k, r_k^0, \rho_k, h_k^0 \right\} i \Lambda_{1kr}^0 =$$

$$= \{0, 0, -s_{11} Y_r^0, -s_{11} X_r^0, 0, 0, 0, 0\}; \quad (4.16)$$

$$\Gamma_{jk} = A_{jkl} = A_{jkr}^0 = 0 \quad (j \geq 2).$$

Учитывая разложения (4.13), комплексные потенциалы (2.18) представим в виде

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \Phi_{jk}(z_k), \quad (4.17)$$

где

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + N_{jk}(z_k) + \Phi_{jk}^*(z_k); \quad (4.18)$$

$$N_{jk}(z_k) = \sum_{l=1}^L A_{jkl} \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^R A_{jkr}^0 \ln(z_k - z_{kr}^0); \quad (4.19)$$

$\Phi_{jk}^*(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} .

Комплексные потенциалы приближений $\Phi_{jk}(z_k)$ должны удовлетворять соответствующим граничным условиям. Подставив (4.17) в граничные условия и приравняв в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра λ , получим рекуррентную последовательность граничных условий для определения комплексных потенциалов приближений. Механические граничные условия для неподкрепленного контура из условий (2.12) получаем в виде

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k) \Phi_{jk}(t_k) = \delta_{j0}(c_{1l}, c_{2l}). \quad (4.20)$$

Если на контуре заданы перемещения, то из (2.14) получим

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_{k0}, q_{k0}) \Phi_{jk}(t_k) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1 - \delta_{j0})(p_{k1}, q_{k1}) \Phi_{j-1,k}(t_k) +$$

$$+ \delta_{j0}(u_{l^*} - u_0, v_{l^*} - v_0) + (\omega_{j3} y, -\omega_{j3} x). \quad (4.21)$$

Электромагнитные граничные условия принимают такой вид:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (v_k, \rho_k) \Phi_{jk}(t_k) = \delta_{j0}(c_{3l}, c_{4l}) \quad (4.22)$$

при задании на контуре электрической и магнитной индукций, и

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (r_k^0, h_k^0) \Phi_{jk}(t_k) = \delta_{j0}(\varphi_{l^*} + c_{3l}, \psi_{l^*} + c_{4l}), \quad (4.23)$$

если на контуре заданы электрические и магнитные потенциалы.

Если пластина имеет электромагнитовязкоупругие включения с областями $S^{(l)}$, в которых определены комплексные потенциалы $\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)})$, то для решения задачи

электромагнитовязкоупругости в ряды по малому параметру λ следует разлагать и комплексные потенциалы для каждого включения. Для упрощения решения задачи малые параметры для всех включений можно принять одинаковыми и равными малому параметру λ для пластинки. Тогда имеем

$$v_{12}^{(l)} = v_{12}^{0(l)} + \lambda, \quad (4.24)$$

где $v_{12}^{0(l)}$ – мгновенно-упругое значение коэффициента Пуассона $v_{12}^{(l)}$. Как и для пластинки, учитывая представления (4.24), по аналогии с (4.2) – (4.3) для каждого включения находим

$$s_{12}^{(l)} = s_{12}^{0(l)} - \lambda s_{11}^{(l)}, \quad s_{12}^{0(l)} = -v_{12}^{0(l)} s_{11}^{(l)}; \quad (4.25)$$

$$p_k^{(l)} = p_{k0}^{(l)} + \lambda p_{k1}^{(l)}, \quad q_k^{(l)} = q_{k0}^{(l)} + \lambda q_{k1}^{(l)}; \quad (4.26)$$

$$p_{k0}^{(l)} = \left((\mu_k^{(l)})^2 - v_{12}^{0(l)} \right) s_{11}^{(l)} - s_{16}^{(l)} \mu_k^{(l)} + \left(g_{11}^{(l)} \mu_k^{(l)} - g_{21}^{(l)} \right) v_k^{(l)} + \left(p_{11}^{(l)} \mu_k^{(l)} - p_{21}^{(l)} \right) \rho_k^{(l)};$$

$$p_{k1}^{(l)} = -s_{11}^{(l)}, \quad q_{k0}^{(l)} = -\mu_k^{(l)} v_{12}^{0(l)} s_{11}^{(l)} + \frac{s_{22}^{(l)}}{\mu_k^{(l)}} - s_{26}^{(l)} + \left(g_{12}^{(l)} - \frac{g_{22}^{(l)}}{\mu_k^{(l)}} \right) v_k^{(l)} + \left(p_{12}^{(l)} - \frac{p_{22}^{(l)}}{\mu_k^{(l)}} \right) \rho_k^{(l)};$$

$$q_{k1}^{(l)} = -s_{11}^{(l)} \mu_k^{(l)}. \quad (4.27)$$

Комплексные потенциалы для электромагнитовязкоупругих включений, по аналогии с (4.17), имеют вид

$$\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{j=0} \lambda^j \Phi_{jk}^{(l)}(z_k^{(l)}); \quad (4.28)$$

$$\Phi_{jk}^{(l)}(z_k^{(l)}) = \Phi_{jk}^{*(l)}(z_k^{(l)}); \quad (4.29)$$

$\Phi_{jk}^{*(l)}(z_k^{(l)})$ – функции, голоморфные в многосвязных областях $S_k^{(l)}$, ограниченных контурами $L_k^{(l)}$

Подставив функции (4.17) и (4.28) в граничные условия (2.16) и приравняв в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра λ , для случая идеального контакта пластинки и включения получим следующую рекуррентную последовательность граничных условий для определения комплексных потенциалов приближений:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[\left(1, \mu_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0 \right) \Phi_{jk}(t_k) - \left(1, \mu_k^{(l)}, \nu_k^{(l)}, \rho_k^{(l)}, r_k^{0(l)}, h_k^{0(l)} \right) \Phi_{jk}^{(l)}(t_k^{(l)}) \right] =$$

$$= \delta_{j0} (c_{1l}, c_{2l}, c_{3l}, c_{4l}, \varphi_0, \psi_0),$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[(p_{k0}, q_{k0}) \Phi_{jk}(t_k) - (p_{k0}^{(l)}, q_{k0}^{(l)}) \Phi_{jk}^{(l)}(t_k^{(l)}) \right] =$$

$$= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1 - \delta_{j0}) \left[(p_{k1}, q_{k1}) \Phi_{j-1,k}(t_k) - (p_{k1}^{(l)}, q_{k1}^{(l)}) \Phi_{j-1,k}^{(l)}(t_k^{(l)}) \right] +$$

$$+\delta_{j0}(-u_{j*}+u_{j0}, -v_{j*}+v_{j0})+\left(\left(\omega_{j3}-\omega_{j3}^{(l)}\right)y,-\left(\omega_{j3}-\omega_{j3}^{(l)}\right)x\right). \quad (4.30)$$

После определения из граничных условий функций приближений $\Phi_{jk}(z_k)$, а в случае наличия включений и $\Phi_{jk}^{(l)}(z_k^{(l)})$, заменив степени малого параметра λ^j временными операторами, можно получить значения комплексных потенциалов (4.17) и их производных в любой момент времени, а по ним основные характеристики ЭМУС (2.6). При этом, чтобы для пластинки определить степени малого параметра λ , следует учитывать, что на основании (4.1) имеем

$$\lambda = v_{12}^* - v_{12}^0. \quad (4.31)$$

Заменив в (4.31) v_{12}^* его временным оператором (3.16), получим

$$\lambda = D_1 \cdot \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_1^* - \delta_1^*) + D_2 \cdot \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_2^*); \quad (4.32)$$

$$D_1 = \frac{\delta_1^*}{4} \left[\frac{E_1^0}{E_2^0} \frac{\delta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*} + 1 - 4v_{12}^0 \right]; \quad D_2 = \frac{\delta_2^* E_1^0}{4 E_2^0} \frac{\beta_1^* - \beta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*}. \quad (4.33)$$

Исходя из формулы (4.31) и из свойств возведения оператора в степень, определяем

$$\lambda^j = \left(v_{12}^* - v_{12}^0 \right)^j = \left(\frac{v_{12}^0}{\beta_1^*} \right)^j \frac{1}{(j-1)!} \frac{\partial \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_1^*)}{\partial (-\beta_1^*)^{j-1}}. \quad (4.34)$$

Возведя λ по формуле (4.34) в степень j , получаем

$$\begin{aligned} \lambda^j &= \sum_{k=0}^j C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \mathfrak{D}_\alpha^{*j-k} (-\beta_1^* - \delta_1^*) \cdot \mathfrak{D}_\alpha^{*k} (-\beta_2^*) = \\ &= \sum_{k=0}^j C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \frac{\mathfrak{D}_\alpha^{*k} (-\beta_2^*) - \mathfrak{D}_\alpha^{*j-k} (-\beta_1^* - \delta_1^*)}{-\beta_2^* + \beta_1^* + \delta_1^*}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Вычислив λ^j по формуле (4.35) и подставив его, как и ранее, в выражение (4.17), определим функции $\Phi_k(z_k)$ и их производные, следовательно, и основные характеристики ЭМУС (2.6) в любой момент времени.

Аналогичным образом для каждого из включений имеем

$$v_{12}^{*(l)} = v_{12}^{0(l)} + \lambda. \quad (4.36)$$

При этом для включения $S^{(l)}$ так же, как и выше, определяем

$$\begin{aligned} \lambda^j &= \sum_{k=0}^j C_j^k \left(D_1^{(l)} \right)^{j-k} \left(D_2^{(l)} \right)^k \mathfrak{D}_\alpha^{*j-k} (-\beta_1^{*(l)} - \delta_1^{*(l)}) \cdot \mathfrak{D}_\alpha^{*k} (-\beta_2^{*(l)}) = \\ &= \sum_{k=0}^j C_j^k \left(D_1^{(l)} \right)^{j-k} \left(D_2^{(l)} \right)^k \frac{\mathfrak{D}_\alpha^{*k} (-\beta_2^{*(l)}) - \mathfrak{D}_\alpha^{*j-k} (-\beta_1^{*(l)} - \delta_1^{*(l)})}{-\beta_2^{*(l)} + \beta_1^{*(l)} + \delta_1^{*(l)}}; \quad (4.37) \\ D_1^{(l)} &= \frac{\delta_1^{*(l)}}{4} \left[\frac{E_1^{0(l)}}{E_2^{0(l)}} \frac{\delta_2^{*(l)}}{\beta_1^{*(l)} - \beta_2^{*(l)} + \delta_1^{*(l)}} + 1 - 4v_{12}^{0(l)} \right]; \end{aligned}$$

$$D_2^{(l)} = \frac{\delta_2^{*(l)} E_1^{0(l)}}{4} \frac{\beta_1^{*(l)} - \beta_2^{*(l)}}{E_2^{0(l)} \beta_1^{*(l)} - \beta_2^{*(l)} + \delta_1^{*(l)}}; \quad (4.38)$$

$E_i^{0(l)}$ ($i=1,2$) – мгновенно упругие значения $E_i^{(l)}$; $\delta_i^{*(l)}$, $\beta_i^{*(l)}$ – реологические постоянные материала включения, связанные с изменением $E_i^{(l)}$ во времени.

§5. Решение задачи для пластины с эллиптическим отверстием.

Рассмотрим бесконечную пластину с эллиптическим отверстием. Обозначим кон-

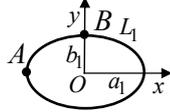


Рис. 1

тур отверстия и его полуоси через L_1 , a_1 , b_1 (рис. 1). Контур отверстия жестко подкреплён, электрическая и магнитная индукции на нём равна нулю. На бесконечности – $\sigma_y^\infty = p$;

$$\sigma_x^\infty = \tau_{xy}^\infty = \omega_3^\infty = 0. \quad \text{Кроме того,} \quad E_y^\infty = \varepsilon; \quad H_y^\infty = \mu;$$

$$E_x^\infty = H_x^\infty = 0 \quad \text{или} \quad D_y^\infty = \delta; \quad B_y^\infty = \beta; \quad D_x^\infty = B_x^\infty = 0.$$

В данном случае комплексные потенциалы (4.17) примут вид

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \Phi_{jk1}(z_k), \quad (5.1)$$

где Γ_{jk} – постоянные, определяемые из системы уравнений (4.14); $\Phi_{jk1}(z_k)$ – функции, голоморфные вне эллипсов L_{k1} , соответствующих L_1 при аффинных преобразованиях (2.7). Для построения этих функций используем конформные отображения.

Функции [4]

$$z_k = R_{k1}(\zeta_{k1} + m_{k1} / \zeta_{k1}), \quad (5.2)$$

в которых

$$R_{k1} = (a_1 - i \mu_k b_1) / 2; \quad m_{k1} = (a_1 + i \mu_k b_1) / (a_1 - i \mu_k b_1), \quad (5.3)$$

отображают конформно внешности единичных кругов $|\zeta_{k1}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{k1} . Тогда $\Phi_{jk1}(z_k)$, голоморфные вне L_{k1} , будут голоморфными вне единичных кругов $|\zeta_{k1}| \geq 1$, включая бесконечно удалённую точку, и их можно представить рядами Лорана по отрицательным степеням ζ_{k1} . Поэтому для функций (5.1) будем иметь выражения

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{jk1n}}{\zeta_{k1}^n}. \quad (5.4)$$

Подставляя функции (5.1) в граничные условия (4.21) – (4.22) и применяя метод рядов, получаем, что $a_{jk1n} = 0$ ($j=0,1,\dots, k=1,4, n \geq 2$), а a_{jk11} удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 (p_{k0}, q_{k0}) a_{jk11} &= -(1 - \delta_{j0}) \sum_{k=1}^4 (p_{k1}, q_{k1}) a_{j-1,k11} - \\ &- \delta_{j0} \sum_{k=1}^4 [(p_{k0}, q_{k0}) \Gamma_{j,k} R_{k1} m_{k1} + (\bar{p}_{k0}, \bar{q}_{k0}) \bar{\Gamma}_{j,k} \bar{R}_{k1}] - \\ &- \delta_{j1} \sum_{k=1}^4 [(p_{k1}, q_{k1}) \Gamma_{j-1,k} R_{k1} m_{k1} + (\bar{p}_{k1}, \bar{q}_{k1}) \bar{\Gamma}_{j-1,k} \bar{R}_{k1}]; \\ \sum_{k=1}^4 (v_k, \rho_k) a_{jk11} &= -\delta_{j0} \sum_{k=1}^4 [(\bar{v}_k, \bar{\rho}_k) \bar{\Gamma}_{jk} \bar{R}_{k1} - (v_k, \rho_k) \Gamma_{jk} R_{k1} m_{k1}]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Решая систему (5.5), определяем коэффициенты a_{jk11} . Окончательно комплексные потенциалы и их производные примут вид

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \frac{a_{jk11}}{\zeta_{k1}}; \quad \Phi'_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} - \frac{a_{jk11}}{R_{k1}(\zeta_{k1}^2 - m_{k1})}. \quad (5.6)$$

Вычислив по формуле (4.35) степени малого параметра λ^j и умножив их на функции приближений (5.6), получим комплексные потенциалы (4.17) и их производные, а по ним и значения основных характеристик (2.6) в любой момент времени.

Если контур отверстия не подкреплён, то построение решения проводится аналогичным образом. Это решение получаем из приведенного выше, если принять $p_{k0} = 1$; $q_{k0} = \mu_k$; $p_{k1} = q_{k1} = 0$. Если вместо индукций на контуре пластинки заданы потенциалы электрического и магнитного полей, то решение также получаем из приведенного при замене $v_k = r_k^0$; $\rho_k = h_k^0$.

Проведены численные исследования изменения основных характеристик ЭМУС в пластинке во времени из следующих материалов: композит на основе $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ (M1) [22]; композит, упругие и электрические постоянные которого соответствуют кадмию селенида $CdSe$, а пьезомагнитные и магнитные – $BaTiO_3$ [17, 21] (M2); композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют $PZT-4$, а пьезомагнитные и магнитные – $CoFe_2O_4$ [17, 21] (M3). Реологические постоянные для всех материалов примем такими, как в работе [5, 5a]: $\alpha^* = 0,846$; $\beta_1^* = 0,1570c^{\alpha-1}$; $\beta_2^* = 0,2745c^{\alpha-1}$; $\delta_1^* = 0,0323c^{\alpha-1}$; $\delta_2^* = 0,1295c^{\alpha-1}$.

При проведении расчетов количество приближений j по степеням малого параметра λ увеличивалось до тех пор, пока последующее приближение изменяло максимальные значения напряжений предыдущего приближения более, чем на 0,01%. Для этого в рассмотренных случаях необходимо было оставлять от 5 до 10 приближений (степеней малого параметра λ).

В таблице для пластинки из материалов M1 и M3 в зависимости от времени приведены значения напряжений в точках А и В на площадках, нормальных (со значком n) и касательных (со значком s) к контуру отверстия, а на рис. 2 изображены графики распределения напряжений σ_s по контуру для начального (сплошные линии) и стационарного (штриховые линии) состояния. Из анализа результатов следует, что уже через 200 час. напряжения в пластинке с течением времени практически не изменяются, т.е. в ней устанавливается стационарное состояние. Но значительные изменения напряжений происходят лишь в первые 20 час. При переходе в стационарное состояние значения напряжений изменяются значительно. Так, значения σ_s в точке А для пластины из материала M1 изменяются на 51%, для пластины из материала M3 – на 3%. Эти же изменения в точке В составляют, соответственно, 21% и 21%.

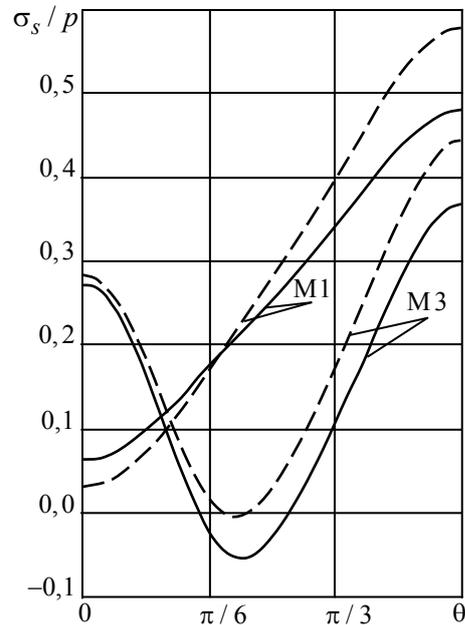


Рис. 2

Материал	Воздействие	Точки	Величина	t , час.							
				0	20	40	60	80	100	200	300
М1	$\sigma_y^\infty = p$	А	σ_s	0,063	0,040	0,038	0,036	0,035	0,035	0,032	0,031
			σ_n	0,006	-0,040	-0,042	-0,042	-0,043	-0,043	-0,044	-0,044
		В	σ_s	0,479	0,566	0,570	0,572	0,573	0,574	0,577	0,578
			σ_n	1,469	1,458	1,459	1,459	1,459	1,459	1,460	1,461
	$H_y^\infty = \mu$	А	$\sigma_s 10^2$	-2,161	-2,122	-2,122	-2,122	-2,123	-2,123	-2,124	-2,125
			$\sigma_n 10^2$	1,172	1,103	1,101	1,100	1,100	1,100	1,099	1,099
		В	$\sigma_s 10^1$	6,228	7,127	7,155	7,169	7,178	7,184	7,200	7,205
			$\sigma_n 10^2$	1,908	1,856	1,855	1,855	1,855	1,855	1,855	1,855
	$E_y^\infty = \varepsilon$	А	$\sigma_s 10^1$	-2,294	-2,286	-2,287	-2,288	-2,288	-2,289	-2,290	-2,291
			σ_n	5,114	4,631	4,618	4,611	4,607	4,604	4,597	4,596
		В	σ_s	4,607	5,340	5,367	5,382	5,391	5,397	5,415	5,423
			$\sigma_n 10^1$	1,412	1,385	1,385	1,385	1,385	1,385	1,385	1,385
М3	$\sigma_y^\infty = p$	А	σ_s	0,273	0,286	0,285	0,285	0,284	0,284	0,283	0,282
			σ_n	0,175	0,120	0,118	0,117	0,117	0,116	0,115	0,115
		В	σ_s	0,368	0,434	0,437	0,439	0,440	0,440	0,443	0,444
			σ_n	1,556	1,517	1,516	1,516	1,516	1,516	1,517	1,517
	$H_y^\infty = \mu$	А	$\sigma_s 10^2$	-10,007	-9,599	-9,590	-9,586	-9,584	-9,583	-9,582	-9,583
			$\sigma_n 10^2$	8,119	7,537	7,522	7,515	7,511	7,509	7,503	7,502
		В	$\sigma_s 10^2$	2,993	3,415	3,428	3,434	3,439	3,441	3,449	3,451
			$\sigma_n 10^3$	1,265	1,204	1,202	1,202	1,201	1,201	1,201	1,201
	$E_y^\infty = \varepsilon$	А	$\sigma_s 10^1$	-5,741	-5,594	-5,591	-5,591	-5,590	-5,590	-5,591	-5,592
			$\sigma_n 10^1$	2,515	2,302	2,296	2,294	2,292	2,291	2,289	2,288
		В	$\sigma_s 10^1$	1,159	1,333	1,339	1,342	1,344	1,346	1,349	1,351
			$\sigma_n 10^1$	4,898	4,689	4,684	4,682	4,681	4,681	4,680	4,680

Заметим, что полученные значения основных характеристик в начальном состоянии совпадают с известными [7]. В случае вязкоупругих материалов, близких к изотропным, они согласуются с результатами работы [18], для анизотропных – работы [19], для пьезоэлектрических – работ [15, 16].

Заключение.

В работе предложен метод решения задачи электромагнитовязкоупругости для многосвязных пластин. С использованием метода малого параметра задача сведена к решению последовательности задач электромагнитоупругости, решаемых с использованием комплексных потенциалов. Разработана методика определения по комплексным потенциалам приближений основных характеристик электромагнитоупругого состояния (напряжений, индукций и напряженностей электромагнитного поля) в произвольный момент времени после приложения нагрузки. В качестве числового примера представлено решение задачи для пластины с эллиптическим отверстием. Установлено изменение значений основных характеристик электромагнитовязкоупругого состояния многосвязных пластин во времени.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано метод розв'язання задачі електромагнітов'язкопружності для багатозв'язних пластин. Методом малого параметра задачу зведено до рекурентної послідовності задач електромагнітопружності, які розв'язуються з використанням комплексних потенціалів. Розроблена методика визначення за комплексними потенціалами наближень основних характеристик електромагнітопружного стану (напружень, індукцій та напруженостей електромагнітного поля) у будь-який момент часу після прикладення навантаження. Як приклад наведено розв'язок задачі для пластинки з еліптичним отвором. Встановлено зміну значень основних характеристик електромагнітов'язкопружного стану багатозв'язних пластин з часом.

1. *Ашкенадзи Е. К., Ганов Э. В.* Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.
2. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость.– К.: Наук. думка, 1989.– 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.; Т. 5).
3. *Калоеров С.А., Баева А.И., Бороненко О.И.* Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 270 с.
4. *Калоеров С.А., Горянская Е.С.* Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений.– К.: А.С.К., 1998. – С. 10–26. – (Механика композитов: В 12-ти т.; Т. 7).
5. *Калоеров С.А., Паршикова О. А.* Решение задачи термовязкоупругости для анизотропной пластинки // Теорет. и прикл. механика. – 2011. – **48**, № 2. – С. 51 – 70.
6. *Калоеров С.А., Петренко А.В.* Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
7. *Калоеров С.А., Самодуров А.А.* Исследование электромагнитоупругого состояния пьезопластинки с подкрепленными отверстиями // Вісн. Донец. ун-та. Сер. А. Природ. науки. – 2013. – 1. – С. 42 – 48.
8. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
9. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977.– 416 с.
10. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988.– 472 с.
11. *Работнов Ю.Н.* Равновесие упругой среды с последствием // Прикл. математика и механика. – 1948. – **12**, № 1. – С. 53 – 62.
12. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966.– 752 с.
13. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977.– 384 с.
14. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий.– К.: Наук. думка, 1968.– 888 с.
15. *Ask A., Menzel A., Ristinmaa M.* Electrostriction in electro-viscoelastic polymers / Mech. Mater. – 2012. – **50**. – P. 9 – 21.
16. *Ask A., Menzel A., Ristinmaa M.* Phenomenological modeling of viscous electrostrictive polymers // Int. J. Non-Linear Mech. – 2012. – **47**. – P. 156 – 165.
17. *Hrennikoff A.* Solution of problems of elasticity by the framework method // J. Appl. Mech. – 1941. – **8**. – P. A169 – A175.
18. *Kaloerov S.A., Mironenko A.B.* Analyzing the Viscoelastic State of a Plate with Elliptic or Linear Elastic Inclusions // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 2. – P. 198 – 208.
19. *Kaloerov S.A., Parshikova O.A.* Thermoviscoelastic State of Multiply Connected Anisotropic Plates // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 2. – P. 319 – 331.
20. *Kaminsky A.A.* Study of the Deformation of Anisotropic Viscoelastic Bodies // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 11. – P. 1434 – 1457.
21. *Tang T., Yu W.* Micromechanical modeling of the multiphysical behavior of smart materials using the variational asymptotic method // Smart Mater. Struct. – 2009. – **18**. – P. 1 – 14.
22. *Tian W.-Y., Gabbert U.* Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – **23**. – P. 599 – 614.

Поступила 12.03.2014

Утверждена в печать 26.05.2015