

В. Б. Ларин, А. А. Тунник

О ПОВЫШЕНИИ КАЧЕСТВА ОТСЛЕЖИВАНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ ПРОГРАММНОЙ ТРАЕКТОРИИ

¹Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ, ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: model@inmech.kiev.ua;

²НАУ, проспект Комарова, 1, Киев, Украина; e-mail: aatunik@hotmail.com

Abstract. A problem on improving the quality of tracking the program trajectory by aircraft is considered. This improvement is reached by feeding into a control system of the program trajectory the signal with certain advance. It is essential that this approach needs any conditions on differentiability of the program signal. An efficiency of proposed algorithm is demonstrated on an example of tracking by aircraft the program trajectory that has not derivatives in some points.

Key words: aircraft, tracking the program trajectory, output feedback.

Введение.

При маневрировании [2] транспортных средств возникают задачи повышения точности их навигационных устройств [8, 9] и задачи повышения точности отслеживания ими программной траектории. В этой связи можно отметить, что задача повышения качества отслеживания летательным аппаратом (ЛА) программной траектории продолжает привлекать внимание исследователей (см., например, [5, 11], где есть дальнейшие ссылки).

Ниже рассмотрена задача синтеза следящей системы ЛА, решение которой базируется на подходах [6, 7]. Используя процедуру [7] проведена декомпозиция исходной задачи на задачу управления линейной скоростью ЛА и задачу управления ориентацией ЛА. Для повышения качества отслеживания программной траектории использован подход [6], базирующийся на подаче в следящую систему программной траектории с определенным опережением. Эффективность предлагаемого алгоритма демонстрируется на примере отслеживания ЛА программной траектории, аналогичной приведенной в [3, фиг. 11.6]. Отметим, что при данном подходе не накладываются те или иные условия на дифференцируемость программного сигнала.

§1. Уравнения движения.

Для описания движения аппарата принимаем уравнения, аналогичные [5, ур-ние (1)] и [11, ур-ние 2], а именно:

$$\dot{x} = V \cos \theta; \quad \dot{y} = V \sin \theta; \quad \dot{\theta} = V \psi. \quad (1.1)$$

Здесь x, y – координаты аппарата; θ – курсовой угол; V – скорость. Отметим, что согласно [10, ф-ла 10.43] переменная ψ связана с углом крена φ следующим образом:

$$\psi = \frac{g}{V^2} \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.2)$$

Для ограничения скорости изменения $\dot{\theta}$ далее предполагаем, что управляющее воздействие u связано с $d\psi/dt$ таким образом:

$$\dot{\psi} = uV \cos \theta. \quad (1.3)$$

Уравнения (1.1), (1.3) целесообразно использовать при анализе прямолинейного движения аппарата. При исследовании движения аппарата по окружности целесообразно использовать полярные координаты ($x = R \cos \gamma$, $y = R \sin \gamma$). В этих координатах уравнения (1.1) можно представить в виде:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} + \gamma - \theta; \quad \dot{R} = V \sin \varepsilon; \quad \dot{\gamma} = \frac{V}{R} \cos \varepsilon; \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\gamma} - V\psi. \quad (1.4)$$

Дополнив систему (1.4) уравнением $\dot{\psi} = \dot{\gamma}u$, аналогом соотношения (1.3), можно переписать ее в следующем виде:

$$\dot{R} = V \sin \varepsilon; \quad \dot{\gamma} = \frac{V}{R} \cos \varepsilon; \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\gamma} - V\psi; \quad \dot{\psi} = \dot{\gamma}u. \quad (1.5)$$

§2. Декомпозиция задачи.

Структура уравнений (1.1), (1.3), (1.5) позволяет в этом случае произвести декомпозицию исходной задачи на задачу управления углом θ и задачу управления скоростью V .

Рассмотрим задачу управления θ . Так, предположим, что $V > 0$ ($\dot{x} > 0$, $|\theta| < \pi/2$), $\dot{\gamma} > 0$. В этом случае в уравнениях (1.1), (1.3), (1.5) можно выбрать в качестве независимой переменной, соответственно, x или γ и, таким образом, понизить порядок системы. Тогда аналогами систем (1.1) (1.5) будут следующие уравнения:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta; \quad \theta' = \frac{d\theta}{dx} = \frac{\psi}{\cos \theta}; \quad \frac{d\psi}{dx} = u; \quad (2.1)$$

$$R' = \frac{dR}{d\gamma} = R \operatorname{tg} \varepsilon; \quad \varepsilon' = \frac{d\varepsilon}{d\gamma} = 1 - \frac{R\psi}{\cos \varepsilon}; \quad \frac{d\psi}{d\gamma} = u. \quad (2.2)$$

Отметим, что в уравнениях (2.1) штрих – дифференцирование по x , в (2.2) – дифференцирование по γ (это не относится к производным ψ , для которых сохраним обозначения $d\psi/dx$ и $d\psi/d\gamma$).

Рассмотрим случай $V > 0$.

Систему (2.1) целесообразно заменить одним дифференциальным уравнением третьего порядка

$$y''' = v \quad (2.3)$$

$$\left(v = \frac{u}{(\cos \theta)^3} + \frac{3 \sin \theta \psi^2}{(\cos \theta)^5} \right), \quad (2.4)$$

учитывая, что

$$y' = \operatorname{tg} \theta; \quad y'' = \frac{\psi}{(\cos \theta)^3}. \quad (2.5)$$

Приняв в качестве фазового вектора $w^T = [y \quad y' \quad y'']$, здесь и далее верхний индекс "T" обозначает транспонирование, перепишем (2.3) в виде

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Отметим, что параметры движения (θ, ψ) и управляющее воздействие u согласно (2.4), (2.5) выражаются через компоненты вектор w (y', y'') и v следующим образом:

$$\theta = \arctg y'; \quad \psi = y''(\cos \theta)^3; \quad u = v(\cos \theta)^3 - \frac{3 \sin \theta \psi^2}{(\cos \theta)^2}.$$

Очевидно, что аналогичный подход можно использовать и в случае движения по окружности (уравнения (2.2)). Так, выбрав в качестве фазового вектора вектор $w^T = [R \quad R' \quad R'']$ и приняв во внимание, что в этом случае

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \theta + \gamma; \quad R' = R \operatorname{tg} \varepsilon; \quad R'' = R \left(\operatorname{tg}^2 \varepsilon + \frac{1}{\cos^2 \varepsilon} \left(1 - \frac{R \psi}{\cos \varepsilon} \right) \right), \quad (2.7)$$

можно заменить (2.2) следующими уравнениями третьего порядка (аналог (2.3), (2.4)):

$$R''' = v; \quad (2.8)$$

$$v = \frac{-R}{ce^5} (se \, ce^2 (-6 + ce^2) - 3R^2 se \psi^2 + 9Rce \, se \, \psi + uR \, ce^2). \quad (2.9)$$

В (2.8), (2.9) приняты следующие обозначения: $se = \sin \varepsilon$; $ce = \cos \varepsilon$.

Согласно (2.7), (2.9) «физические» параметры движения и управляющее воздействие u выражаются через полученные значения R, R', R'' и v таким образом:

$$\varepsilon = \arctg \left(\frac{R'}{R} \right); \quad \theta = \frac{\pi}{2} + \gamma - \varepsilon; \quad \psi = \left(\frac{ce}{R^2} (R'' ce^2 - 2R + R \, ce^2) \right);$$

$$u = - \left(\frac{v}{R^2} ce^3 - \frac{6}{R} se + \frac{se \, ce^2}{R} + 9 \frac{se \, \psi}{ce} - 3 \frac{Rse \, \psi^2}{ce^2} \right). \quad (2.10)$$

§3. Стабилизация движения.

Рассмотрим задачу стабилизации, когда движение объекта описывается уравнением (2.1). Задача состоит в выборе u как функции y, θ, ψ таким образом, чтобы нулевое решение уравнения (2.1) было асимптотически устойчиво.

Согласно (2.3) (2.4), имеем равенство

$$y''' = \frac{u}{(\cos \theta)^3} + \frac{3 \sin \theta \psi^2}{(\cos \theta)^5}. \quad (3.1)$$

Управляющее воздействие u выберем таким образом, чтобы уравнение (3.1) имело вид

$$y''' = -ay'' - by' - dy, \quad (3.2)$$

где a, b, d – заданные константы. В этом случае имеем формулу

$$u = -\left(a\psi + b(\cos\theta)^2 \sin\theta + d(\cos\theta)^3 y\right) - \frac{3\sin\theta\psi^2}{(\cos\theta)^2}. \quad (3.3)$$

Таким образом, имеется нелинейный алгоритм стабилизации, гарантирующий устойчивость системы. Необходимо указать процедуру выбора констант, фигурирующих в этом алгоритме. Так, закон обратной связи, определяемый соотношением (3.3), гарантирует устойчивость системы при условии, что значения констант a, b, d обеспечивают асимптотическую устойчивость систем (3.2), т.е. $a, b, d > 0$ и $d < ab$. Естественно, следует выбрать эти константы, исходя из какой-либо оптимизационной процедуры. Ниже это будет показано применительно к уравнению (2.6).

Согласно (3.2), константы a, b, d определяются законом цепи обратной связи $u = kw$, который (матрица коэффициентов усиления k) может быть получен, например, в результате решения линейной квадратичной задачи (см., например, [4]), т.е. оптимизации системы в соответствии с квадратичным критерием качества

$$J = \int_0^{\infty} (w^T Q w + r v^2) dx, \quad (3.4)$$

или методом модального управления [1].

§4. Синтез следящей системы.

Обобщим алгоритм (3.2) стабилизации на случай отслеживания им заданной траектории. Рассмотрим эту задачу в случае, когда программное движение не сильно отличается от прямой. Итак, пусть $\bar{y}(x)$ – программное значение траектории аппарата. Закон стабилизации (3.2) перепишем в таком виде:

$$y''' = -ay'' - by' - d(y - \bar{y}(x)), \quad (4.1)$$

что даст возможность "отслеживать" заданную траекторию ($\bar{y}(x)$) координатой y аппарата. Однако, такой (сравнительно простой) алгоритм может не обеспечить достаточное качество слежения если $\bar{y}(x)$ – сравнительно быстро меняющаяся функция.

Рассмотрим вопрос повышения качества слежения. С этой целью запишем передаточную функцию между входом ($\bar{y}(x)$) и выходом ($y(x)$) системы, которая описывается уравнением (4.1). Эта передаточная функция $H(s)$ имеет вид

$$H(s) = \frac{d}{(s^3 + as^2 + bs + d)}. \quad (4.2)$$

При сравнительно низких частотах $\omega \ll 1$ ($s = i\omega$) модуль передаточной функции (4.2) будет близок к 1. В этой области частот основная погрешность воспроизведения выходом системы ($y(x)$) входного воздействия ($\bar{y}(x)$) будет обусловлена фазовым запаздыванием. Фазовое запаздывание ν , которое имеет система с передаточной функцией (4.2) на частоте ω , определяется следующим выражением:

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\omega^2 - b}{d - a\omega^2} \omega.$$

При малых ω имеем

$$\nu \cong -(b/d)\omega. \quad (4.3)$$

Это фазовое запаздывание можно компенсировать, вводя в алгоритм стабилизации (4.1) программное значение $\bar{y}(x)$ с некоторым опережением Δ , т.е.

$$y''' = -ay'' - by' - d(y(x) - \bar{y}(x + \Delta)). \quad (4.4)$$

Действительно, передаточная функция $H_1(s)$, соответствующая (4.4), имеет вид

$$H_1(s) = \frac{de^{\Delta s}}{s^3 + as^2 + bs + d} = H(s)e^{\Delta s}.$$

Фазовое запаздывание этой системы в области низких частот (аналог (4.3)) можно записать так:

$$\nu = -(b/d)\omega + \Delta\omega. \quad (4.5)$$

Выбрав Δ из условия, что $\nu = 0$, согласно (4.5), определим

$$\Delta = b/d. \quad (4.6)$$

Таким образом, в случае отслеживания заданной траектории, закон цепи обратной связи (2.3) может быть модифицирован следующим образом:

$$u = -\left(a\psi + b(\cos\theta)^2 \sin\theta + d(\cos\theta)^3 (y - \bar{y}(x + \Delta))\right) - \frac{3\sin\theta\psi^2}{(\cos\theta)^2}. \quad (4.7)$$

Аналогичные (2.3), (4.7) алгоритмы стабилизации могут быть построены и в случае, когда для описания движения используется полярная система координат (уравнения (2.2)).

Отметим возможность использования описанного алгоритма и в случаях, когда при движении вдоль программной траектории нарушается условие $\dot{x} > 0$. Так, в ряде случаев можно «разрезать» исходную программную траекторию на участки движения, по которым она будет удовлетворять условию $\dot{x} > 0$, при соответствующем преобразовании системы координат. В этом случае можно решить задачу слежения в новой системе координат (в которой $\dot{x} > 0$) и перепроектировать полученное решение в исходную систему координат (см. пример).

Пример.

Проиллюстрируем описанный выше алгоритм на примере отслеживания ЛА программной траектории, показанный на рис. 1 (две стороны и две диагонали квадрата, сторона которого равна 1000 м (аналог траектории, изображенной в [3, рис. 11.6]). Согласно программ, ЛА должны отслеживать программный сигнал, определяемый отрезками AB , BC , CD , DE , EF и FA . Используя декартову систему координат, уравнения движения ЛА принимаем в форме (2.6). При синтезе системы управления фигурирующие в (3.2) коэффициенты a , b , d находим путем минимизации функционала (3.4), в котором

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} \end{bmatrix}; \quad r = 1; \quad q_{11} = 10^{-8}; \quad q_{33} = 0,1.$$

Принятым Q и r соответствуют следующие значения коэффициентов a , b , d : $a = 0,341$; $b = 8,26 \cdot 10^{-3}$; $d = 10^{-4}$; согласно (4.6) – $\Delta = 82,6$ м.

Рассмотрим более подробно движение ЛА по траектории, определяемой точками A, B, C . Очевидно, что в исходной системе координат при движении ЛА вдоль отрез-

ка BC нарушается условие $\dot{x} > 0$. В этой связи рассмотрим задачу отслеживания этого участка программной траектории в системе координат, повернутой относительно исходной на угол $-\pi/8$. Эта часть программной траектории (в повернутой системе координат) показана на рис. 2 сплошной линией.

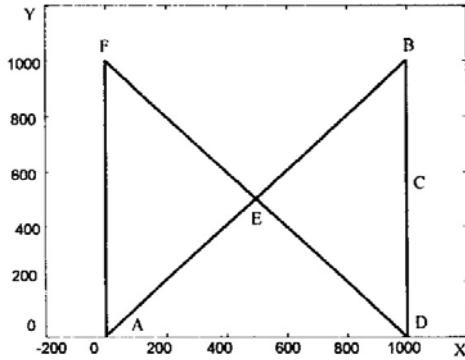


Рис. 1

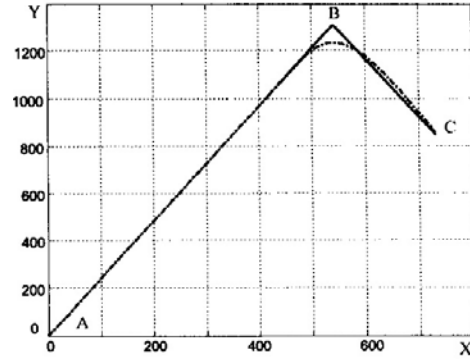


Рис. 2

Отметим, что в этой системе координат не нарушается условие $\dot{x} > 0$. На этом же рисунке штрих-пунктирной линией показана траектория ЛА (величина опережения Δ определяется (4.6)). Далее, на рис. 3 показана в этой же системе координат зависимость курсового угла θ , определяемого первым соотношением (2.5). На рис. 4 приведен график угла крена φ , который определен при скорости $V = 10$ м/с в соответствии с (1.2) (величина ψ определяется вторым соотношением (2.5)).

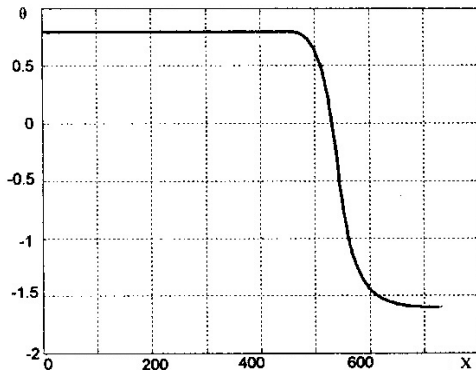


Рис. 3

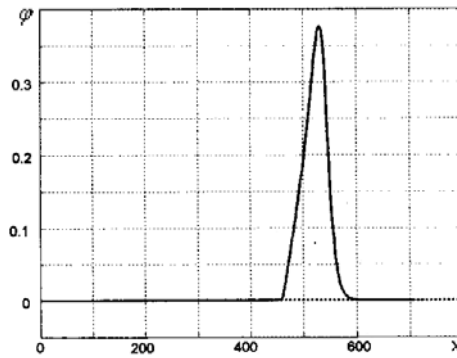


Рис. 4

На рис. 5 показаны, в исходной системе координат, участок ABC программной траектории (сплошная линия) и траектория ЛА (штрих-пунктирной линией). Используя аналогичные процедуры для участков CDE и EFA программной траектории (на этих участках угол поворота системы координат, который обеспечивает выполнение условия $\dot{x} > 0$, был принят равным $\pi/8 - \pi$) была получена траектория движения ЛА на этих участках. Вся траектория ЛА показана штрих-пунктирной линией на рис. 6 (сплошная линия соответствует программной траектории). Сравнивая рис. 6 и [3, фиг. 11.6], можно констатировать одинаковое качество отслеживания программной траектории как при использовании описанного алгоритма, так и алгоритма [3, алгоритм 6].

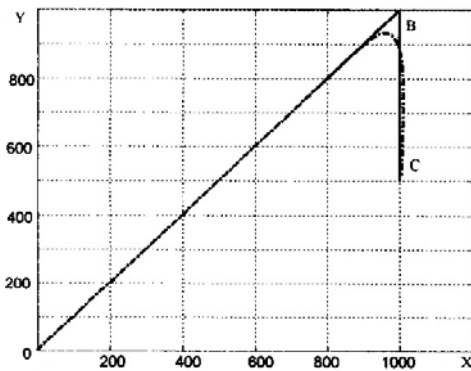


Рис. 5

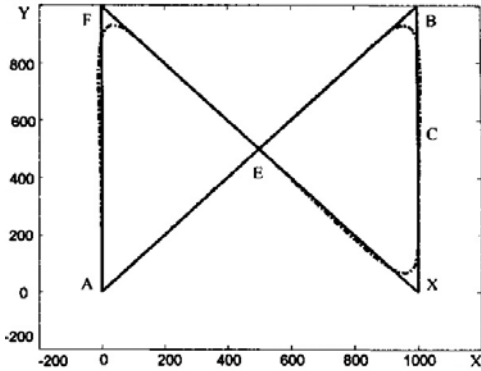


Рис. 6

Для демонстрации повышения качества слежения, обусловленного подачей, в соответствии с (4.4), программного сигнала с опережением Δ , определяемым (4.6), на рис. 7 приведено решение задачи при $\Delta = 0$, т.е., когда следящая система функционировала в соответствии с (4.1).

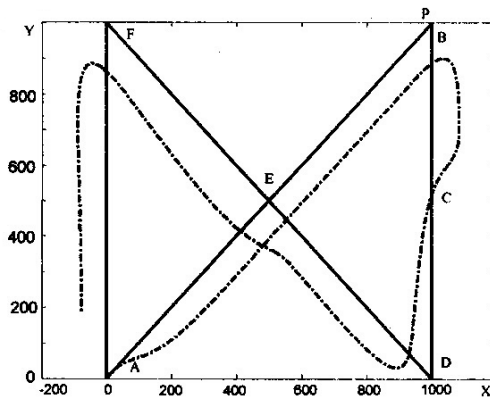


Рис. 7

Сравнение результатов, приведенных на этих рисунках, свидетельствует о том, что подача программного сигнала с опережением позволяет существенно повысить качество слежения.

Заключение.

Получено решение задачи о повышении качества отслеживания ЛА программной траектории путем подачи в следящую систему программной траектории с определенным опережением. Эффективность предлагаемого алгоритма демонстрируется на примере отслеживания ЛА программной траектории, аналогичной приведенной в [3, фиг. 11.6]. Существенно, что при данном подходе не накладываются те или иные условия на дифференцируемость программного сигнала.

РЕЗЮМЕ. Отримано розв'язок задачі про підвищення якості відстежування літальним апаратом програмної траєкторії шляхом подачі в стежачу систему програмної траєкторії з певним випередженням. Істотно, що при даному підході не накладаються ті або інші умови на похідні програмного сигналу. Ефективність пропонованого алгоритму демонструється на прикладі відстежування літальним апаратом програмної траєкторії, яка не має похідних в деяких точках.

1. *Кунцевич В.М., Лычак М.М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
2. *Antonuk E.Ya., Zabuga A.T.* Modeling the Maneuvering of a Vehicle // *Int. Appl. Mech.*, – 2012, – **48**, N 4. – P. 447 – 457.
3. *Beard R. W.* Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice. – Princeton: University Press, 2012. – 320 p.
4. *Bryson A.E.Jr., Ho Yu-Chi.* Applied optimal control. Optimization, estimation and control. – Waltham, Massachusetts: Braisdel Publishing Company, 1969.– 544 p.
5. *Gruszka A., Malisoff M., Mazenc F.* Bounded Tracking Controllers and Robustness Analysis for UAVs // *IEEE Trans. Automat. Contr.*, – 2013. – **58**, N 1. – P. 180 – 187.
6. *Larin V.B.* On Stabilization of Motions of System with Nonholonomic Constraints // *J. of Automat. and Inform. Sci.* – 2006. – **38**. – P. 8 – 12.
7. *Larin V.B.* Control Problems for Wheeled Robotic Vehicles // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 4. – P. 363 – 388.
8. *Larin V.B., Tunik A.A.* On Inertial Navigation System Error Correction // *Int. Appl. Mech.*, – 2012, – **48**, N 2. – P. 213 – 223.
9. *Larin V.B., Tunik A.A.* On Inertial-Navigation System without Angular-Rate Sensor // *Int. Appl. Mech.*, – 2013, – **49**, N 4. – P. 488 – 500.
10. *McLean D.* Automatic Flight Control Systems. – Englewood Cliffs: Prentice Hall. Inc., 1990. – 593 p.
11. *Zohar I., Ailon A.* Tracking Controllers for Aerial Vehicles Subject to Restricted Inputs and Wind Perturbations // *Int. J. of Control, Automation, and Systems* – 2013 – **11(3)**. – P. 433 – 441.

Поступила 27.12.2013

Утверждена в печать 26.05.2015
