

В.Л. Богданов<sup>1</sup>, А.Н. Гузь<sup>2</sup>, В.М. Назаренко<sup>3</sup>

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ  
МАТЕРИАЛОВ ПРИ ДЕЙСТВИИ НАПРАВЛЕННЫХ  
ВДОЛЬ ТРЕЩИН УСИЛИЙ (ОБЗОР)

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,  
ул. Нестерова, 3, 03057 Киев, Украина;  
e-mail: <sup>1</sup>bogdanov@nas.gov.ua; <sup>2</sup>guz@carier.kiev.ua; <sup>3</sup>nazvm1@gmail.com*

**Abstract.** This review article analyzes the results of investigation of the spatial problems on fracture of cracked materials under action of loads directed along the cracks. Using the combined approach that is based on relations of the three-dimensional linearized mechanics of deformable solids, two non-classical brittle fracture mechanisms are considered: the fracture of materials with initial stresses acting along the cracks and the fracture under compression along the parallel cracks. The results of studying of non-axisymmetric and axisymmetric problems for the most typical crack geometrical placements in materials are generalized in terms of interaction of the cracks among themselves and their interaction with the boundary surfaces. This study relies on representation of stresses and displacements of the linearized theory through the harmonic potential functions. By using the integral Hankel transforms, the problems for interacting cracks are reduced to the Fredholm resolving integral equations of the second kind. This approach allows to investigate the problems in a unified general form for compressive and non-compressive homogeneous isotropic or transversally isotropic elastic bodies with an arbitrary structure of elastic potential as applied to the theories of finite and small initial strains. The model of material model is specified only at the stage of numerical calculation of the obtained in the general form resolvent equations. An analysis of new mechanical effects related to influence of the initial stresses and of the crack interactions on the asymptotic distribution of stresses and displacements near the crack tips is carried out. The «resonance-like» effects are found when the compressive initial stresses become close to the values that correspond to the local loss of material stability in the crack vicinity, which allows one, according to the combined approach mentioned, to determine the critical (limiting) load parameters under body compression along cracks. The conclusions are drawn on character of dependencies of the stress intensity factors and critical (limiting) parameters of compression on the geometrical parameters of problems and physical and mechanical characteristics of materials.

**Key words:** initial (residual) stresses, compression along cracks, local stability loss, Griffith-Irwin type fracture criteria, linearized solid mechanics, isolated cracks, interacted cracks, isotropic highly-elastic materials, transversally-isotropic elastic materials, analysis of main mechanical effects.

### 1. Введение.

Механика разрушения в последние десятилетия является одним из наиболее интенсивно развивающихся направлений механики деформируемого твердого тела. Это обусловлено, с одной стороны, сложностью процесса разрушения, что требует разработки все новых более уточненных моделей и подходов к его исследованию на макро-, мезо- и микроуровнях, а также формулировки адекватных этому явлению критериев разрушения, а с другой – большим значением получаемых в рамках механики разрушения результатов для оценки и прогнозирования прочности, долговечности и остаточного ресурса ответственных конструкций, сооружений, машин и механизмов.

Несмотря на указанное активное развитие классической механики разрушения, начавшееся с основополагающих работ А.А. Гриффитса, Е.О. Орована, Дж.Р. Ирвина [80, 129 – 131, 141], существует целый ряд теоретических и практических проблем, которые не могут быть адекватно описаны в рамках ее подходов. К ним, в частности, относятся вопросы исследования влияния на напряженно-деформированное состояние тел с трещинами начальных (или остаточных) напряжений, действующих вдоль поверхностей расположения трещин, а также определения критических значений сжимающих нагрузок, направленных параллельно трещинам. Анализ отмеченных проблем требует разработки новых подходов и критериев разрушения, адекватных изучаемым неклассическим механизмам разрушения. Следует при этом отметить, что хотя по предмету исследования задачи о разрушении предварительно напряженных тел в условиях действия начальных напряжений вдоль трещин и задачи о сжатии материалов вдоль трещин являются различными, но в постановке этих задач есть существенный общий момент, а именно, наличие компонент нагрузок, направленных параллельно трещинам, влияние которых, собственно, и не может быть учтено методами классической механики разрушения. Это обстоятельство, по-видимому, позволяет объединить указанные группы задач и рассматривать их как задачи механики разрушения материалов при действии направленных вдоль трещин усилий. Целесообразность такого объединения обосновывается также тем, что указанные группы задач являются родственными с точки зрения применяемого к их исследованию математического аппарата в рамках строгой трехмерной линеаризованной механики деформируемых тел (ТЛМДТ) [11, 12, 24, 97].

Настоящая обзорная статья посвящена обобщению и анализу полученных с привлечением предложенного в [68, 69, 63, 123] объединенного подхода в рамках ТЛМДТ результатов исследования отдельных классов пространственных осесимметричных и неосесимметричных задач для различных геометрических схем размещения трещин в материале.

Во введении представлена аннотированная информация о подходах и результатах, являющихся предметом рассмотрения настоящей статьи, включая классификацию проблем механики разрушения (классические и неклассические проблемы), краткое обсуждение результатов по двум неклассическим проблемам механики разрушения – механики разрушения материалов с начальными напряжениями, действующими вдоль расположенных в материале трещин, и механики разрушения тел при сжатии усилиями, направленными параллельно плоскостям расположения трещин, а также изложение в концептуальном виде объединенного подхода к исследованию двух указанных неклассических проблем в рамках ТЛМДТ.

Во втором разделе в сжатой форме выполнен анализ результатов, касающихся постановок задач в рамках трехмерной линеаризованной механики деформируемых тел, описания используемых в работе моделей деформируемых тел, методов решения отдельных задач о разрушении материалов при действии направленных вдоль трещин усилий, формулировки критериев разрушения материалов с начальными напряжениями, действующими вдоль трещин, и критериев разрушения тел при сжатии вдоль трещин.

В третьем разделе приводится информация о результатах, полученных в рамках предложенного авторами объединенного подхода к исследованию задач механики разрушения материалов при действии направленных вдоль трещин усилий применительно к конкретным классам пространственных задач. Представлены результаты исследования неосесимметричных и осесимметричных задач для наиболее характерных геометрических схем размещения трещин в материалах с точки зрения их взаимодействия между собой и с границами тел. Конкретные числовые результаты приведены для изотропных гиперупругих сжимаемых и несжимаемых материалов и некоторых типов композиционных материалов (в рамках континуального подхода). Проанализированы механические эффекты, обусловленные влиянием начальных напряжений, геометрических параметров задач и физико-механических характеристик материалов на коэффициенты интенсивности напряжений и критические параметры сжатия.

**1.1. О классификации проблем механики разрушения тел с трещинами.** К настоящему времени теория распространения трещин под действием усилий растяжения и сдвига является уже сформировавшейся отраслью механики разрушения, базирующейся на концепциях и подходах, основными из которых являются фундаментальная

теория хрупкого разрушения А. Гриффитса [80]; концепция квазихрупкого разрушения Е. Орована – Дж. Ирвина [129, 141], позволившая обобщить теорию А. Гриффитса на неупругие конструкционные материалы; энергетический критерий разрушения, основанный на понятиях скорости освобождения упругой энергии и удельной поверхностной энергии как постоянной материала [80, 130] или эквивалентный ему силовой критерий разрушения Дж. Ирвина [131]; концепция инвариантного (не зависящего от контура интегрирования) интеграла Дж. Эшелби, Г.П. Черепанова, Дж. Райса [53, 79, 144]; критерий критического раскрытия трещины М.Я. Леонова, В.В. Панасюка, А. Уэллса [42, 148]. В последующем был предложен ряд обобщений этих концепций и подходов на случаи сложных напряженных состояний и тел сложной формы, нестационарного и циклического нагружений, действия тепловых и электромагнитных полей, для вязкоупругих, композиционных и других моделей материалов (см., например, обзоры в [53, 59, 74, 78, 133, 134]). Следует отметить, что в настоящее время подавляющее число исследований по механике разрушения основывается на пяти указанных основных подходах, в связи с чем рассматриваемые при проведении указанных исследований проблемы можно условно определить как *классические проблемы механики разрушения*.

Вместе с тем, ряд проблем этой области остаются исследованными далеко не в полной мере. К ним относятся, в частности, изучение новых механизмов разрушения, которые не могут быть описаны в рамках пяти вышеуказанных концепций и подходов, формулировка соответствующих этим механизмам новых критериев разрушения, а также исследование отдельных классов задач для материалов и элементов конструкций применительно к изучаемым новым механизмам разрушения. Указанные проблемы можно условно определить как *неклассические проблемы механики разрушения*.

Отметим, что указанное разделение проблем механики разрушения на классические и неклассические впервые было предложено вторым автором настоящей статьи в предисловии к многолетней монографии [46] и, очевидно, является достаточно условным и не всегда однозначным. Вместе с тем предложенная классификация позволяет сравнительно четко оценивать направления исследований в области механики разрушения как с точки зрения степени их новизны, так и адекватности применяемых в их рамках моделей и подходов изучаемым новым механизмам разрушения. Так, с использованием вышеотмеченной классификации ранее в работах [29, 30, 70, 73, 92, 98, 108, 109, 112, 118, 133] были обобщены и проанализированы новые результаты исследований по ряду неклассических проблем разрушения.

К проблемам механики разрушения, которые нельзя исследовать в рамках классических с вышеуказанным значением подходов, относятся, в частности, вопросы разрушения с учетом внутренней микроструктуры композитных материалов (разрушение при сжатии вдоль армирующих элементов в композитах, когда начало разрушения определяется потерей устойчивости во внутренней структуре материала, разрушение в виде смятия торцов при сжатии композитов вследствие локальной потери устойчивости возле торца композита, разрушение в виде «размочаливания» при растяжении или сжатии композита с искривлениями во внутренней структуре); хрупкого разрушения материалов, содержащих трещины, с учетом действия начальных (остаточных) напряжений; хрупкого и пластического разрушения тел при сжатии вдоль трещин, расположенных в параллельных плоскостях, когда начало разрушения определяется локальной потерей устойчивости материала в окрестности трещины; разрушения тонкостенных тел с трещинами при растяжении в случае реализации предварительной потери устойчивости; механики движущихся трещин в материалах с начальными (остаточными) напряжениями; хрупкого разрушения материалов с трещинами при действии динамических нагрузок с учетом контактного взаимодействия берегов трещин; длительного разрушения вязкоупругих тел, при котором происходит докритический рост трещин.

Количество результатов, полученных при исследовании указанных неклассических проблем механики разрушения, значительно уступает числу результатов, полученных с применением классических подходов, причем достаточно характерным для таких исследований является применение сугубо приближенных расчетных схем и моделей. В частности, приближенные расчетные схемы и модели начиная с работы [49] достаточно широко применялись для анализа разрушения в микроструктуре композита (подробный анализ таких работ приведен в [30, п. 0.4 введения], а также для исследования разрушения однородных и композитных материалов при сжатии вдоль

трещин [112] (краткое описание соответствующих расчетных схем в виде примеров приведено в п. 1.3. настоящей статьи). Отметим, что применение приближенных расчетных схем и моделей вносит в получаемые результаты существенные количественные погрешности, а во многих случаях приводит и к качественным отличиям от экспериментальных данных [112]. Следовательно, при помощи приближенных расчетных схем и моделей весьма затруднительно выполнить надежный анализ неклассических проблем и механизмов механики разрушения.

Поэтому существенное значение в механике разрушения имеют результаты по исследованию указанных неклассических проблем и механизмов разрушения, полученные с использованием достаточно строгих постановок задач, математических моделей и методов исследования. Именно такие исследования были выполнены в работах [23, 24, 27, 28, 31, 32, 34, 36, 37, 46, 58, 90, 98, 99, 107, 114, 122] с привлечением наиболее строгих и точных постановок в рамках механики деформируемого твердого тела. Так, при исследовании неклассических проблем, когда начало разрушения обусловлено потерей устойчивости, применялись подходы трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел, изложенной, например, в монографиях [11, 12, 24, 97], или двумерной линеаризованной теории устойчивости тонкостенных элементов конструкций [32], а при исследовании напряженно-деформированного состояния применялись трехмерные уравнения статики деформируемых тел.

Ниже приводится краткий обзор работ по двум важным в теоретическом и практическом плане неклассическим проблемам механики разрушения, а именно, механики разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями и разрушения тел при сжатии вдоль трещин.

**1.2. Проблемы механики разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями, действующими вдоль трещин.** Начальные (или остаточные, технологические) напряжения возникают на практике вследствие неоднородности линейных или объемных деформаций в смежных областях материала. Такие напряжения практически всегда присутствуют в реальных конструкционных материалах и элементах конструкций вследствие технологических процессов их изготовления (что особенно характерно для композитных материалов [54, 55, 77] и полимеров), соединения (в частности, с применением сварочных технологий [43]), обработки поверхности [44, 76], эксплуатации и существенно влияют на процессы разрушения тел с трещинами. Такие проблемы являются также достаточно типичными и в биомеханике (при моделировании кровеносных сосудов и тканей живых организмов), геофизике, сейсмологии и других научных направлениях как фундаментального научного, так и прикладного характера.

Особый интерес представляют собой проблемы, в которых начальные (остаточные) напряжения в предварительно напряженных материалах действуют вдоль поверхностей расположения трещин (на рис. 1 и далее  $S_0^{11}$  – начальные или остаточные напряжения, действующие вдоль трещины;  $Q'_{22}$  – дополнительные (действующие или эксплуатационные) напряжения (здесь для примера приведены нормальные напряжения)). Неклассичность задач механики хрупкого разрушения предварительно напряженных материалов, когда начальные (остаточные) напряжения направлены параллельно поверхностям расположения трещин, обусловлена тем, что из решения соответствующих задач линейной теории упругости (см., например, [135]) получаем, что начальные напряжения  $S_0^{11}$ , направленные вдоль трещин, не входят в выражения для коэффициентов интенсивности напряжений и величин раскрытия трещин и, следовательно, не могут быть учтены в классических критериях разрушения Гриффитса – Ирвина, критического раскрытия трещины или их обобщений. Отметим при этом, что влияние начальных напряжений может быть косвенно учтено через величину удельной поверхностной энергии  $\gamma$ . Однако такой подход является труднореализуемым, поскольку в этом случае величина  $\gamma$  должна зависеть как от значений начальных напряжений, так и от класса задач, которые исследуются.

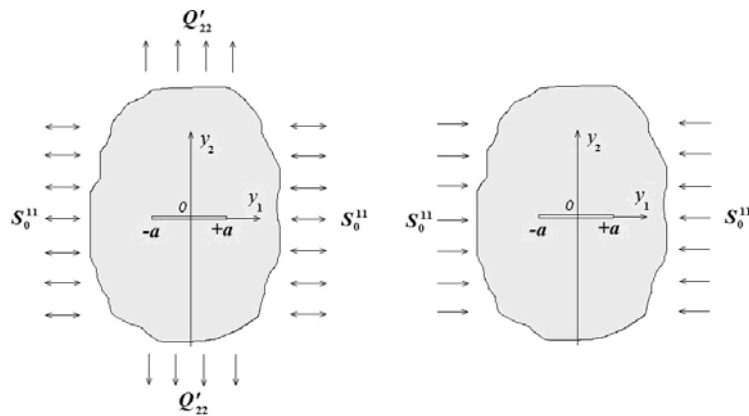


Рис. 1

Рис. 2

В работах второго автора настоящей статьи [13 – 15, 19, 22, 23, 28, 81, 89], опубликованных начиная с 1980 года, для исследования проблем механики разрушения материалов с начальными напряжениями был предложен и стал последовательно применяться подход в рамках трехмерной линеаризованной механики деформируемых тел, основные положения которой и состояние исследований с использованием ее соотношений изложены в монографиях [11, 24, 97] и обзорных статьях [99, 101, 110]. В указанных работах были развиты методы решения плоских, антиплоских и пространственных задач механики разрушения предварительно напряженных тел с трещинами, когда значения начальных напряжений существенно превосходят величины дополнительных полей напряжений и деформаций и в связи с этим исследования можно проводить с использованием линеаризованных соотношений. Отметим, что такая постановка задач вполне очевидна и логична, например, для композитных материалов с преимущественным армированием в одном направлении, когда трещины расположены вдоль армирующих материалов [54]. Для таких композитов разрушающие напряжения  $Q'_{22}$  (рис. 1) могут быть на порядок меньше начальных напряжений  $S_0^{11}$ , направленных вдоль армирующих элементов. Также были сформулированы критерии хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями [87, 88], которые являются аналогами классических критериев разрушения Гриффитса – Ирвина и переходят в них при стремлении начальных напряжений к нулю (более подробно о критериях разрушения предварительно напряженных материалов с трещинами см. в п. 2.5). Ключевым в обосновании этого подхода является тот факт, что использование линеаризованных соотношений для исследования указанного класса задач механики разрушения, в отличие от подходов классической механики разрушения, позволяет описать основное явление, связанное с влиянием компонент усилий, действующих вдоль поверхностей трещин, на параметры разрушения материалов.

Следует отметить, что указанный подход позволяет проводить исследования в единой общей форме для сжимаемых и несжимаемых изотропных и ортотропных (для плоских задач) или трансверсально-изотропных (для пространственных задач) упругих тел с произвольной структурой упругого потенциала применительно к теории конечных (больших) начальных деформаций, а также к первому и второму вариантам теории малых начальных деформаций. При этом конкретизация модели материала (например, использование упругого потенциала того или иного вида) проводится лишь на заключительной стадии исследования – при численном анализе полученных в общем виде характеристических уравнений, разрешающих интегральных уравнений и т.п. Необходимо также отметить, что указанный общий подход к исследованию задач механики хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями может быть обобщен и на неупругие модели материалов. При этом, однако, следует учесть, что в случае упругопластических материалов при приложении к телу дополнительных к начальным полей напряжений и деформаций соответствующие им возмущения на-

пряженно-деформированного состояния будут приводить к изменениям зон разгрузки, что существенно усложнит исследования.

С использованием указанного общего подхода получены решения отдельных классов статических плоских задач для изолированных трещин нормального отрыва (Mode I), поперечного (Mode II) и продольного (Mode III) сдвигов, а также для трещины расклинивания в виде неограниченной в одном направлении полосы конечной ширины [16 – 18, 23, 28, 81, 89]. Пространственные осесимметричные задачи для изолированных внутренних и внешних дискообразных трещин нормального отрыва, радиального сдвига и кручения в неограниченном материале с начальными напряжениями, а также общая пространственная задача для внутренней дискообразной трещины рассмотрены в [19 – 21, 23, 28, 40, 82]. В [28, 35] получены результаты исследования пространственных задач для неограниченных предварительно напряженных тел, содержащих эллиптические трещины нормального отрыва и сдвига.

В исследованных задачах обнаружены новые механические эффекты, связанные с влиянием начальных (остаточных) напряжений. Так, было показано, что в случае изолированных «свободных» трещин (т.е. трещин, на берегах которых заданы только напряжения) напряжения на линии трещины возле ее кончика не зависят от начальных напряжений и полностью совпадают с соответствующими значениями, полученными в рамках механики хрупкого разрушения материалов без начальных напряжений. Раскрытие же берегов трещин существенно зависит от начальных напряжений. В то же время в плоских задачах расклинивания и в общей пространственной задаче сдвига для «свободных» трещин коэффициенты интенсивности напряжений существенно зависят от начальных напряжений и не совпадают с соответствующими результатами механики хрупкого разрушения материалов без начальных напряжений. Также было обнаружено, что при приближении значений начальных напряжений к величинам, соответствующим поверхностной неустойчивости полуплоскости или полупространства, происходит резкое «резонансоподобное» изменение основных величин, когда напряжения и перемещения в окрестности вершины трещины стремятся к «бесконечности», а соответствующие значения разрушающих нагрузок в рамках линеаризованной теории стремятся к нулю (более подробно этот механический эффект анализируется в п. 1.4).

Следует отметить, что вышеуказанные результаты для плоских и пространственных статических задач применительно к одной трещине с исследованием закономерностей влияния начальных (остаточных) напряжений имеют законченный характер в рамках общей постановки (для различных моделей материалов) и обобщены в монографиях [23, 27 (гл. 6, §1), 28, 30 (т. 2, гл. 7)], в списках литературы к которым приведена подробная библиография соответствующих работ в периодических изданиях и в трудах конференций. Отметим также, что в работах [23, 25 – 28, 91] был исследован вопрос о порядке особенности в кончике трещины в рамках механики хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями, которые действуют вдоль трещин, и доказано, что порядок этой особенности совпадает с порядком аналогичной особенности в задачах механики хрупкого разрушения тел без начальных напряжений, т.е. имеет корневую особенность.

В последующем в указанной общей постановке был исследован ряд задач о разрушении материалов с начальными напряжениями, содержащих взаимодействующие трещины. Так, в [2, 4 – 6, 38, 48, 60 – 62, 70, 72, 139] были рассмотрены отдельные пространственные задачи для круговых трещин в полупространстве и в слое с начальными напряжениями, а также для систем параллельных трещин в неограниченных предварительно напряженных телах. При этом исследовано влияние начальных напряжений, а также взаимодействие трещин между собой и с границами тел на коэффициенты интенсивности напряжений в окрестностях контуров трещин. Так, было показано, что в отличие от задач для изолированных «свободных» трещин в задачах для взаимодействующих «свободных» трещин распределение и напряжений, и перемещений на линии трещины возле ее кончика существенно зависит от начальных напряжений. Достаточно подробно исследования для предварительно напряженных материалов со взаимодействующими трещинами проанализированы в статьях [114, 122], которые носят характер обзорных.

В работах [23, 28, 85, 93 – 96, 100] рассмотрены отдельные классы задач механики движущихся трещин в материалах с начальными (остаточными) напряжениями, направленными вдоль плоскостей расположения трещин. В [102 – 105] проведен анализ влияния начальных напряжений на параметры разрушения при движении трещины в границе раздела двух материалов с начальными (остаточными) напряжениями. При исследовании задач о движении трещин в предварительно напряженных материалах (в том числе и в границе раздела) были проанализированы возможности возникновения критических явлений. Так, было показано, что при стремлении скорости движения трещины к значению, соответствующему скорости поверхностной волны Рэлея в рассматриваемом материале с начальными напряжениями, возникают эффекты «резонансного» характера, состоящие в резком изменении значений напряжений и перемещений возле трещин и стремлении этих значений к «бесконечности». Здесь подробно на таких исследованиях останавливаться не будем, поскольку их детальный анализ выполнен в обзорной статье [110], а также представлен в главе 10 второго тома монографии [30].

Указанные выше статические и динамические задачи механики разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями, действующими вдоль трещин, получены в единой общей форме для всех моделей и постановок задач в соответствии с подходом, указанным в первой части настоящего пункта. Вместе с тем среди исследователей получил достаточную популярность и часто реализуется другой подход в рамках трехмерной линеаризованной механики деформируемого твердого тела, когда для каждой постановки задачи исследования с самого начала проводятся в рамках конкретной модели материала (например, для материала с упругим потенциалом конкретной структуры). В качестве примеров таких работ можно указать публикации [1, 51, 75, 127, 136, 137, 143, 145]. Отметим, что существенным недостатком такого подхода является то, что для получения родственных результатов в той же задаче, но для другой конкретной модели материала, необходимо проводить все исследование снова с самого начала. При этом достаточно часто возникает возможность повторения полученных и опубликованных результатов, в том числе результатов, которые уже были получены при применении единого подхода для различных моделей материалов. Примеры таких публикаций приведены и проанализированы в работах [106, 110, 116]. Заметим, что анализ такого рода публикаций не является предметом настоящей статьи.

**1.3. Проблемы механики разрушения материалов при сжатии вдоль плоскостей расположения трещин.** Актуальность исследования явления разрушения тел с трещинами при сжатии обусловлена потребностями в решении практических проблем и технических задач в ряде областей науки и техники. Так, в механике композитов (в особенности слоистых) и механике материалов с покрытием (теплоизоляционным, антикоррозионным и т.п.) распространены явления приповерхностного выпучивания (отслаивания) в окрестности расслоений при действии сжимающих напряжений различной природы. К силовой схеме сжатия вдоль трещиноподобных дефектов сводятся многие технические задачи, связанные с расчетом изделий с конструктивно задаваемыми дефектами. Такого рода проблемы являются достаточно типичными в геомеханике при моделировании действия тектонических сил в условиях гористого рельефа (модель трещиновато-слоистого массива), строительстве (при расчете разнообразных опор) и т.п.

Неклассичность задач механики разрушения при сжатии тел вдоль трещин связана с тем, что при равномерном сжатии строго вдоль плоскостей, в которых расположены трещины (рис. 2), в изотропном и ортотропном материалах (для ортотропных тел принимается, что трещины расположены в плоскостях, которые параллельны одной из плоскостей симметрии свойств материала) возникает однородное напряженно-деформированное состояние при произвольных упруго-вязко-пластических моделях, что обуславливает отсутствие в соответствующих решениях особенностей (сингулярностей) в вершинах трещин. Следовательно, при указанной схеме нагружения коэффициенты интенсивности напряжений и раскрытие берегов трещин равны нулю и поэтому здесь неприменимы подходы, основанные на классической теории Гриффитса – Ирвина, критерии критического раскрытия трещин или их обобщениях.

В рассматриваемой проблеме наиболее вероятным механизмом начала процесса разрушения, по аналогии с проблемой сжатия элементов конструкций вдоль осей симметрии, является локальная потеря устойчивости состояния равновесия материала, который окружает трещину [27, 30, 33, 112]. Реализация рассматриваемого механизма разрушения при сжатии вдоль трещин возможна по двум следующим схемам в зависимости от конфигурации образца и схемы расположения в нем трещин [112].

При *первой* схеме первоначальный этап разрушения (локальная потеря устойчивости состояния равновесия возле трещин) совпадает с общим разрушением образца, т.е. после потери устойчивости материал уже «не держит» и разрушается, так как окружающая его часть не оказывает достаточного «поддерживающего» воздействия на ту часть, которая потеряла устойчивость. Очевидно, что по первой схеме будет разрушаться, например, материал с трещинами, расположенными в параллельных плоскостях и образующими периодическую (вдоль оси, перпендикулярной направлению действия сжимающей нагрузки) систему трещин, проходящую через всю толщину образца. Это связано с тем, что при потере устойчивости состояния равновесия возле периодической системы параллельных соосных трещин возникает явление, аналогичное появлению пластического шарнира по всей толщине материала при изгибе балки.

При *второй* схеме локальная потеря устойчивости материала приводит не к его общему разрушению, а к переходу материала к смежной равновесной форме возле трещин и материал при дальнейшем увеличении внешней нагрузки еще не разрушается вследствие «поддерживающего» воздействия окружающей его части.

В первой ситуации исследование процесса разрушения заканчивается определением величины критической нагрузки, соответствующей локальной потере устойчивости материала возле трещин. Во второй ситуации исследование процесса разрушения необходимо продолжить, исходя из распределения напряжений и деформаций в состоянии смежной равновесной формы материала возле трещин. При этом в смежном равновесном состоянии конфигурация трещин изменяется и уже не все коэффициенты интенсивности напряжений будут равны нулю, поскольку сжатие уже происходит не только вдоль трещин, так как вследствие несимметрии появляются изгибные напряжения. Вследствие этого к механизму разрушения за счет потери устойчивости могут подключаться и другие механизмы разрушения, описываемые, например, критериями разрушения Гриффитса – Ирвина.

Отметим, что согласно классификации, введенной в работе [112], исследование локальной потери устойчивости состояния равновесия части материала, окружающего трещину, которая определяет начало (старт) разрушения, составляет предмет первой основной задачи механики разрушения тел при сжатии вдоль трещин. Предметом второй основной задачи механики разрушения тел при сжатии вдоль трещин является исследование послекритического деформирования материала с трещинами с учетом изменения конфигурации тела, возникшей за счет первоначальной потери устойчивости. С учетом указанной классификации следует подчеркнуть, что в настоящей статье анализируются работы, посвященные решению первой основной задачи механики разрушения при сжатии.

Таким образом, общим для обоих возможных механизмов разрушения при сжатии тел вдоль содержащихся в них трещин является первоначальный этап разрушения, заключающийся в локальной потере устойчивости состояния равновесия сжатой части материала возле трещин. Направления исследований указанного этапа разрушения при сжатии тел вдоль трещин и подходов к определению значений соответствующих критических нагрузок можно классифицировать следующим образом [112].

В рамках *первого направления* часть материала (на рис. 3 *а, б* – заштрихованные области) между параллельными трещинами или между трещиной и граничной поверхностью заменяется балкой (для плоской задачи) или пластиной либо оболочкой (в случае пространственной задачи). Такой подход, который широко применялся, начиная со статьи [140], получил в литературе название «балочное приближение». Выделенные указанным образом балки, пластины и оболочки исследуют в рамках различных прикладных теорий устойчивости тонкостенных систем (с привлечением гипотез плоских сечений, Кирхгоффа – Лява, Тимошенко и т.д.), задавая при этом разные типы граничных условий на торцах выделенных тонкостенных элементов (как правило, это жесткое защемление или шарнирное опирание, хотя в действительности реализуются условия как бы «упругой заделки»).



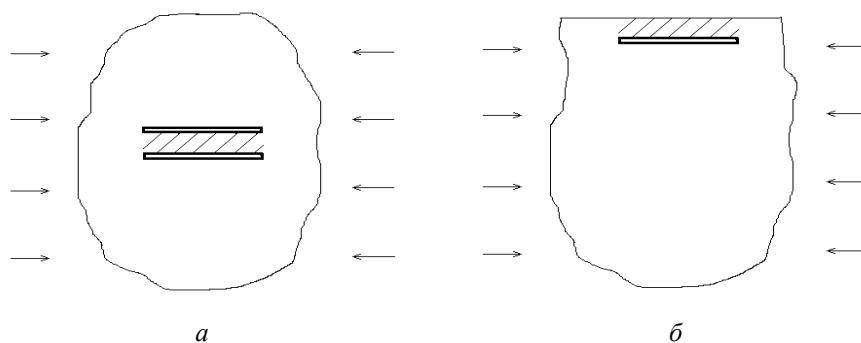


Рис. 3

Указанное «балочное приближение» достаточно широко развивалось в многочисленных публикациях, примерами которых могут служить работы [10, 45, 47, 73, 128, 147]. Следует при этом отметить, что, несмотря на возможную полезность для инженерных применений и относительную простоту реализации, «балочное приближение» имеет ряд принципиальных недостатков. В частности, такой подход применим далеко не ко всем геометрическим и силовым схемам задач. Так, в случае одной трещины в бесконечном материале невозможно обоснованно указать толщину вычлняемой балки; также прикладные теории устойчивости тонкостенных систем не могут быть использованы при значительных относительных расстояниях между трещинами. Наконец, «балочное приближение» вносит неустранимую погрешность в полученные с его применением результаты, поскольку существенное изменение энергии, которое имеет место в кончике трещины, определяется характером особенности в распределении напряжений вблизи этого кончика; при применении же прикладных теорий для описания деформирования выделенных балок, пластин или оболочек нельзя получить порядок указанной особенности, соответствующий точному (трехмерному) описанию. Отметим, что подробный анализ исследований с применением «балочного приближения» с указанием присущих этому подходу недостатков и вносимых им неустранимых погрешностей в исследуемые явления выполнен в обзорной статье [112].

Приведенные соображения свидетельствуют о необходимости привлечения к рассматриваемой проблеме более строгих подходов, которые адекватно описывают исследуемые явления. Именно такие строгие подходы используются в рамках *второго направления* исследований, когда к анализу разрушения материалов при сжатии с учетом локальной потери устойчивости материала в области трещины привлекаются соотношения и методы трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел [11, 12, 24, 97]. Так, в работе [83] для двумерных задач и в работе [84] для трехмерных задач вторым автором настоящей статьи был предложен критерий разрушения в виде величины критической нагрузки, соответствующей локальной потере устойчивости возле трещин и вычисленной из решения соответствующих задач на собственные значения в рамках трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел. При этом постановки задач, основные соотношения и полученные конкретные результаты представлены в единой общей форме для сжимаемых и несжимаемых изотропных и ортотропных (для плоских задач) или трансверсально-изотропных (для пространственных задач) упругих материалов с произвольной структурой упругого потенциала и упругопластических тел применительно к теории конечных (больших) докритических деформаций, а также к первому и второму вариантам теории малых докритических деформаций. Для упругопластических моделей материалов дополнительно принимается обобщенная концепция продолжающегося нагружения [24, 97], в силу чего не учитывается изменение зон разгрузки в процессе потери устойчивости. Указанный подход не имеет принципиальных погрешностей, характерных для «балочного приближения», и позволяет получать результаты с принятой в механике деформируемых тел точностью.

Основываясь на указанном общем подходе, в работах [23, 33, 83, 84, 86] были получены точные решения плоских и пространственных задач о сжатии однородных тел и композитов (в континуальной постановке) вдоль изолированных трещин и вдоль

произвольного числа компланарных трещин, расположенных в одной плоскости. Было показано, что при такой схеме нагружения величины критических нагрузок, при которых происходит потеря устойчивости состояния равновесия материала возле трещин, совпадают со значениями усилий сжатия, реализующими поверхностную неустойчивость полупространства без трещин.

В дальнейшем в рамках линеаризованного подхода также были исследованы плоские и пространственные задачи о сжатии упругих и упругопластических однородных тел вдоль содержащихся в них систем взаимодействующих параллельных трещин (см., например, работы [9, 67, 71, 119 – 121, 124, 138]) и показано, что взаимовлияние трещин между собой и со свободной поверхностью образца приводят к значительному снижению (на порядок и более) критических напряжений сжатия по сравнению со значениями, полученными в задачах о сжатии бесконечного материала вдоль изолированной трещины или системы компланарных трещин, расположенных в одной плоскости. Детальный анализ таких исследований приведен в обзорных статьях [36, 37, 109, 112, 114, 122], а также в монографиях [30, 33]. Следует отметить, что в последнее время были изучены предельные переходы при стремлении к нулю расстояния между параллельными соосными трещинами или между трещиной и границей полупространства (см., например, статью [113]), которые, в частности, позволили оценить границы применимости «балочного приближения».

Отметим также, что в рамках модели кусочно-однородных сред были получены результаты по механике хрупкого и пластического разрушения при сжатии тел вдоль плоских микро- и макротрещин, которые расположены в границе раздела разных материалов [30, 39, 115, 117, 125, 126, 149]. В работах [56, 57] обобщены результаты исследований в рамках ГЛТУДТ задач механики разрушения композитных материалов и соответствующих элементов конструкций при сжатии вдоль трещин применительно к вязкоупругому разрушению.

Вышеприведенными весьма краткими сведениями ограничимся при обсуждении работ, посвященных исследованию разрушения упругих, упругопластических и вязкоупругих материалов с трещинами при сжатии вдоль трещин. Подробный анализ результатов по разработке основ механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин, включая соответствующие концепции, подходы, обзор исследований конкретных задач по указанной проблематике и обсуждение выявленных новых механических эффектов выполнен в статье [112].

**1.4. Объединенный подход к исследованию проблем механики разрушения материалов под действием направленных вдоль трещин нагрузок.** Следует отметить, что ранее указанные две неклассические проблемы механики разрушения, а именно, разрушение тел с начальными (остаточными) напряжениями, которые действуют вдоль трещины, и разрушение материалов с параллельными трещинами при сжатии вдоль плоскостей расположения трещин, рассматривались отдельно. Это было обусловлено как логикой развития этих различных по предмету исследования групп неклассических проблем, так и достаточной сложностью применяемых при их решении математических методов.

В то же время, еще в первых работах по механике хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями [13, 14, 19, 22, 23] при исследовании плоских и пространственных задач для бесконечного предварительно напряженного материала с изолированной не взаимодействующей трещиной был указан новый механический эффект, связанный с влиянием начальных напряжений на распределение полей напряжений и деформаций в окрестностях контура трещины, и, соответственно, на значения разрушающих нагрузок. Так, было показано, что при стремлении начальных (остаточных) напряжений к значениям, соответствующим поверхностной неустойчивости полуплоскости (для плоских задач) или полупространства (для пространственных задач), вблизи кончика трещины возникают явления «резонансного» характера, состоящие в резком стремлении к «бесконечности» части напряжений и перемещений, определяемых из линеаризованных соотношений. Соответственно, в случае «свободной» трещины в телах с начальными напряжениями значения разрушающих нагрузок в рамках линеаризованной теории стремятся к нулю при приближении начальных (остаточных) сжимающих напряжений к значениям, соответствующим поверхностной неустойчивости полуплоскости или полупространства.

В качестве иллюстрации приведем результаты для сжимаемого изотропного тела с трещиной в виде кругового диска радиуса  $a$ , которая расположена в плоскости  $y_3 = 0$ , при условии, что вдоль осей  $Oy_1$  и  $Oy_2$  действуют одинаковые растягивающие (или сжимающие) начальные напряжения  $S_0^{11} = S_0^{22}$ , которые характеризуются коэффициентами удлинения (или укорочения) вдоль координатных осей  $\lambda_1 = \lambda_2$  (заметим,

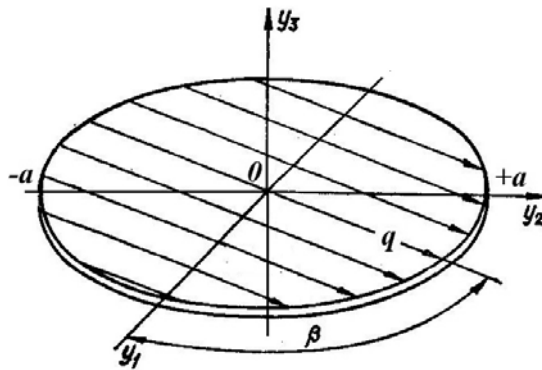


Рис. 4

что значения  $\lambda_1 > 1$  соответствуют начальному растяжению,  $\lambda_1 < 1$  – начальному сжатию; при  $\lambda_1 = 1$  начальные напряжения отсутствуют). Рассмотрим случай общей задачи о сдвиге, когда к нижней и верхней поверхностям трещины (рис. 4) приложены равномерные напряжения сдвига интенсивности  $q$  под углом  $\beta$  к оси  $Oy_1$ . В соответствии с точным решением [23, 28] в рассматриваемом случае отличными от нуля будут коэффициенты интенсивности  $K_{II}$  поперечного и  $K_{III}$  продольного сдвигов, которые определяются из выражений:  $K_{II} = K^{(II)} \cdot K_{II}^0$ ;  $K_{III} = K^{(III)} \cdot K_{III}^0$ , где  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  – коэффициенты интенсивности напряжений поперечного и продольного сдвигов в материале с начальными напряжениями  $S_0^{11} = S_0^{22}$  при заданной внешней сдвиговой нагрузке;  $K_{II}^0$ ,  $K_{III}^0$  – коэффициенты интенсивности напряжений поперечного и продольного сдвигов в материале без начальных напряжений при той же заданной внешней нагрузке;  $K^{(II)}$ ,  $K^{(III)}$  – безразмерные коэффициенты для поперечного и продольного сдвигов, которые характеризуют влияние начальных напряжений.

На рис. 5 для сжимаемого изотропного материала с упругим потенциалом гармонического типа [132] показана зависимость безразмерных коэффициентов  $K^{(II)}$  (кривые с номерами 1, 2, 3) и  $K^{(III)}$  (кривые с номерами 1', 2' и 3') от коэффициента удлинения (укорочения)  $\lambda_1$  (кривые 1 – 3 соответствуют значениям коэффициента Пуассона  $\nu = 0, 2; 0, 3; 0, 5$ ). Как видим из рисунка, кривые имеют вертикальные асимптоты, соответствующие поверхностной неустойчивости полупространства, которая для рассматриваемого материала определяется значением коэффициента укорочения  $\lambda_1 = (1 + \nu) / 2$ . Таким образом, при стремлении начальных напряжений к значениям, соответствующим поверхностной неустойчивости полупространства, возникают явления «резонансного» характера.

С другой стороны, как было отмечено в п. 1.3, при изучении задач о сжатии неограниченных материалов вдоль изолированной трещины, когда механизм разрушения связывается с

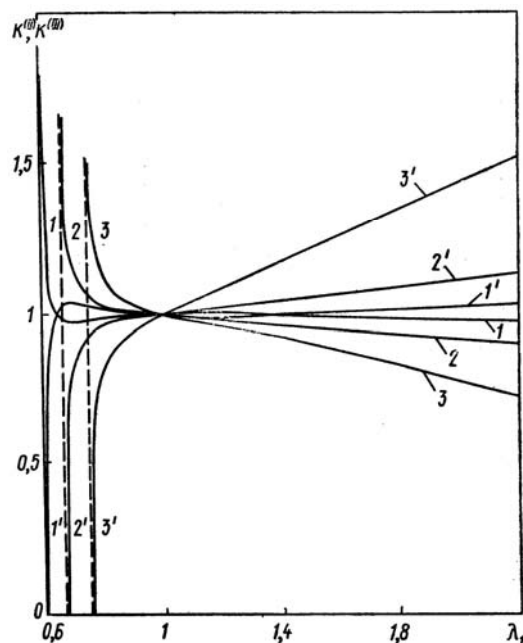


Рис. 5

локальной потерей устойчивости состояния равновесия возле трещины, был установлен механический эффект [23, 33], состоящий в том, что критические (предельные) нагрузки при сжатии вдоль трещины совпадают со значениями нагрузок, реализующих поверхностную неустойчивость полупространства. При этом потеря устойчивости материала в локальной области возле контура трещины носит характер поверхностной неустойчивости.

Вышеуказанные два эффекта механического характера свидетельствуют о том, что как в механике хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями, действующими вдоль трещин, так и в механике разрушения материалов при сжатии вдоль трещин явление поверхностной неустойчивости имеет фундаментальный характер. Указанную ситуацию можно объяснить, исходя из следующих соображений физического характера. При достижении начальными напряжениями, действующими вдоль трещины, значений, соответствующих поверхностной неустойчивости полупространства, вблизи кончика трещины возникает состояние нейтрального равновесия. В этой ситуации достаточно незначительного увеличения внешней нагрузки, чтобы нарушилось нейтральное равновесие и начался процесс разрушения, характеризующийся локальной потерей устойчивости материала возле трещины.

Учитывая отмеченную физическую интерпретацию, можно предположить, что и для других геометрических схем расположения трещин в предварительно напряженных материалах будут обнаруживаться аналогичные эффекты «резонансного» характера, когда при приближении начальных сжимающих напряжений к значениям, соответствующим локальной потере устойчивости материала в соответствующих задачах о сжатии тел вдоль параллельных трещин, напряжения и перемещения возле контуров трещин будут резко «резонансоподобно» изменяться. Это предположение было подтверждено, например, для случая полуограниченного тела с начальными напряжениями, содержащего приповерхностную трещину, в [139]. Так, на рис. 6 *a*, *б* для несжимаемого высокоэластичного материала с потенциалом Трелоара [146], содержащего приповерхностную трещину радиального сдвига, параллельную свободной поверхности материала, приведена зависимость отношений  $K_{II} / K_{II}^{\infty}$  и  $K_I / K_{II}^{\infty}$  (здесь  $K_I$ ,  $K_{II}$  – коэффициенты интенсивности напряжений для приповерхностной трещины в предварительно напряженном полупространстве;  $K_{II}^{\infty}$  – КИН для случая изолированной трещины в бесконечном материале, который не зависит от начальных напряжений) от параметра начальных напряжений  $\lambda_1$  для разных значений безразмерного расстояния между трещиной и свободной поверхностью материала, нормированного на радиус трещины. Как видим из рисунка, кривые имеют вертикальные асимптоты, отражающие стремление значений  $K_{II} / K_{II}^{\infty}$  и  $K_I / K_{II}^{\infty}$  к «бесконечности» при приближении начальных сжимающих напряжений к значениям, соответствующим локальной потере устойчивости данного материала при сжатии вдоль приповерхностной трещины (см., например, [36, 120]).

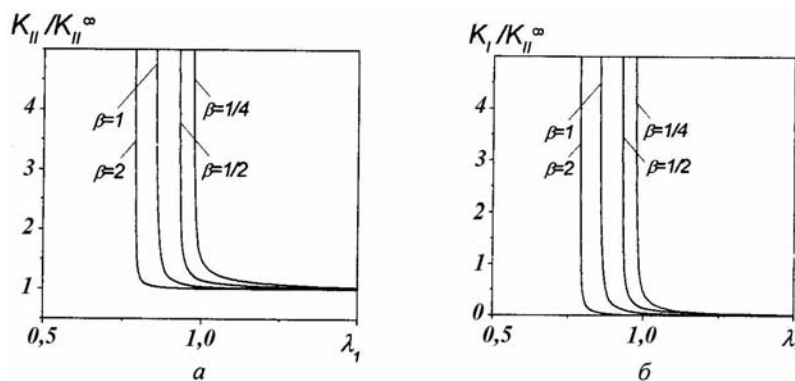


Рис. 6

Следует также отметить, что общим моментом при исследовании двух указанных выше неклассических проблем механики разрушения является использование родственных математических аппаратов в рамках трехмерной линеаризованной механики деформируемых твердых тел. При этом линеаризованные уравнения равновесия и уравнения состояния для обоих классов задач являются одинаковыми, общими в рамках соответствующих расчетных схем являются и рассматриваемые конфигурации тел и схемы расположения дефектов. В то же время существенное отличие в постановке и решении задач механики хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями, которые действуют вдоль трещин, и задач механики хрупкого и пластического разрушения материалов при сжатии вдоль системы трещин, расположенных в параллельных плоскостях, состоит в том, что в первом случае, как и в линейной механике хрупкого разрушения, приходим к исследованию краевых задач (с ненулевыми граничными условиями на берегах трещин), а во втором – к исследованию задач на собственные значения (с нулевыми граничными условиями на берегах трещин).

Учитывая вышеизложенное, представляется вполне целесообразным как с точки зрения существенного сокращения сложных математических расчетов, так и для более полного учета и правильной интерпретации всех механических эффектов, связанных с действием направленных вдоль трещин усилий, проводить объединенное рассмотрение задач механики разрушения тел с начальными напряжениями и задач о разрушении материалов с трещинами при сжатии вдоль трещин, в рамках трехмерной линеаризованной механики деформируемых твердых тел.

Исходя из вышеизложенного, в [68, 69, 63, 123] в рамках трехмерной линеаризованной механики деформируемого твердого тела был предложен объединенный подход к исследованию задач механики разрушения тел с начальными напряжениями и задач о разрушении материалов с трещинами при сжатии вдоль трещин. При таком интегрированном подходе разработан новый, более простой и эффективный для практического использования метод определения критических (предельных) параметров нагружения в задачах о сжатии тел вдоль расположенных в них трещин, когда для этого не требуется проводить отдельные исследования задач на собственные значения в рамках трехмерной линеаризованной теории устойчивости. Указанные параметры рассчитываются при решении соответствующих краевых задач механики разрушения предварительно напряженных материалов, когда при непрерывном изменении параметров нагружения определяются такие значения начальных сжимающих усилий, при достижении которых происходит резкое «резонансное» изменение амплитудных величин (напряжений и перемещений) возле кончиков трещин. Определенные таким образом значения параметров начального нагружения будут соответствовать собственным числам соответствующих задач на собственные значения при сжатии тел вдоль трещин. Очевидно также, что при исследовании задач о разрушении материалов с начальными напряжениями возникает естественное ограничение на значение сжимающих начальных напряжений, при котором они не могут превышать значений, вызывающих локальную потерю устойчивости материала в окрестности трещин.

Заметим, что подобный в математическом плане подход встречается и в некоторых других разделах механики. Так, хорошо известно, что при исследовании вынужденных колебаний линейных механических систем с заданной частотой внешней нагрузки происходит резонансное изменение амплитуды колебаний при стремлении частоты внешней нагрузки к частоте собственных (свободных) колебаний системы. На этом явлении основывается один из широко применяемых на практике подходов определения частот (мод) собственных колебаний линейных систем.

**1.5. О рассматриваемых классах задач механики разрушения материалов при действии усилий, направленных вдоль трещин.** Настоящая обзорная статья посвящена анализу результатов исследования по двум группам неклассических проблем механики разрушения – хрупкого разрушения материалов с начальными (остаточными) напряжениями, действующими параллельно плоскостям расположения трещин, и разрушения тел при сжатии вдоль параллельных трещин, вызванного локальной потерей устойчивости состояния равновесия материала возле трещин. При этом анализируются работы, выполненные с применением объединенного подхода к исследованию двух указанных групп неклассических проблем механики разрушения, концептуальные моменты которого указаны в п. 1.4. данной статьи.

В статье рассмотрены пространственные задачи, к исследованию которых применен подход в рамках ТЛМДТ [11, 24, 97], позволяющий проводить постановку задач и получение результатов в единой общей форме для сжимаемых и несжимаемых упругих тел с произвольными видами упругого потенциала применительно к теории конечных (больших) начальных деформаций, а также к первому и второму вариантам теории малых начальных деформаций. Результаты получены для однородных изотропных высокоэластических материалов и композитов с упругими компонентами, причем при исследовании композиционных материалов использована известная континуальная модель композита [30, 41, 52, 77] с приведенными (усредненными) характеристиками трансверсально-изотропного тела, плоскости изотропии которого параллельны плоскостям расположения трещин.

Отметим, что задачи механики разрушения однородных материалов и композитов с трещинами при действии направленных вдоль трещин усилий можно условно разделить на три класса в зависимости от геометрических схем расположения дефектов в теле.

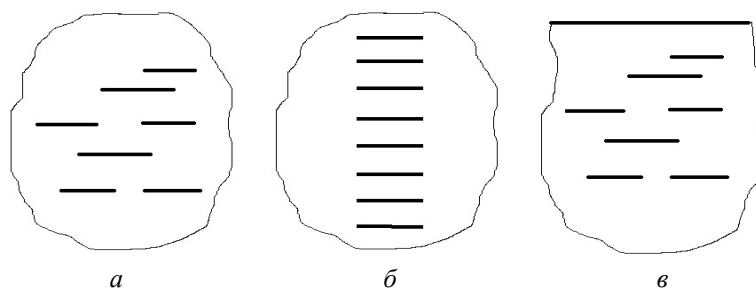


Рис. 7

В *первый класс* задач можно включить задачи, относящиеся к исследованию случая, когда трещины расположены в нескольких (конечное число) параллельных плоскостях и эти плоскости расположены вдали от граничной поверхности, таким образом, при исследовании можно не учитывать влияние свободной (либо подкрепленной) поверхности материала (рис. 7, *а*). Во второй класс можно отнести задачи, исследующие случай, когда трещины, расположенные в параллельных плоскостях, также образуют периодическую (вдоль оси, перпендикулярной направлению действия нагрузки) систему трещин и, таким образом, фактически проходят через всю толщину образца (рис. 7, *б*). Третий класс составляют задачи, относящиеся к исследованию ситуации, когда трещины, расположенные в параллельных плоскостях, находятся вблизи граничной поверхности материала; таким образом, при исследовании разрушения необходимо учитывать влияние свободной (или подкрепленной) поверхности (рис. 7, *в*). В этом случае мы приходим к задачам о приповерхностном разрушении материала.

Вследствие сложности и недостаточной разработки указанных неклассических проблем механики разрушения до настоящего времени получены и включены в обзор результаты исследования задач о разрушении предварительно напряженных материалов и сжатии тел вдоль трещин для таких характерных (эталонных) схем размещения трещин:

- а*) изолированная внутренняя невзаимодействующая трещина в неограниченном теле;
- б*) приповерхностная трещина, параллельная границе полупространства;
- в*) две внутренние параллельные соосные (т.е. с совпадающими проекциями, не смещенные друг относительно друга) трещины в неограниченном теле;
- г*) периодическая система параллельных соосных трещин в неограниченном теле.

При этом приводятся результаты для круговых в плане (дискообразных) трещин, поскольку эта конфигурация трещин является наиболее характерной для хрупких материалов [135].

Постановка и решение задач для таких геометрических схем размещения дефектов позволяют как бы в «чистом» виде выделить и исследовать основные закономерности взаимодействия (взаимовлияния) трещин между собой и с границами тел в условиях действия усилий, направленных вдоль плоскостей расположения трещин. Так, случай изолированной трещины является предельным для выделенных основных ча-

стных случаев геометрических схем размещения взаимодействующих трещин при стремлении расстояния между трещинами или между трещиной и поверхностью материала к бесконечности. Таким образом, полученные для изолированной трещины результаты могут рассматриваться как тестовые при больших расстояниях между трещинами. Задача для приповерхностной трещины, параллельной поверхности материала, позволяет оценить влияние на параметры разрушения взаимодействия трещины и границы тела. Случай двух параллельных соосных трещин и периодической системы соосных параллельных трещин позволяет оценить влияние на параметры разрушения взаимодействия трещин между собой и являются граничными случаями для задач о разрушении материалов с произвольным конечным числом соосных параллельных трещин. Следует при этом также отметить, что в математическом плане задача о теле, содержащем периодическую систему соосных параллельных трещин, сводится к задаче для слоя с одной трещиной, параллельной граням слоя, и поэтому методика ее решения может быть применена к исследованию задач о трещине в предварительно напряженном слое со свободными или подкрепленными гранями.

Для каждой из указанных выше геометрической схемы размещения трещин в материале приведены результаты исследований при разных силовых схемах на берегах трещин, соответствующих трещинам нормального отрыва (Mode I cracks), радиально-го сдвига (Mode II cracks) и кручения (Mode III cracks). Также приведены результаты расчетов значений критических параметров, соответствующих локальной потере устойчивости материала, окружающего трещины, при сжатии вдоль плоскостей расположения трещины, которые проведены в рамках объединенного подхода к исследованию проблем разрушения материалов с начальными напряжениями, действующими вдоль трещин, и разрушения тел с трещинами при сжатии вдоль трещин.

## **2. Общая постановка линеаризованных пространственных задач механики разрушения материалов при действии направленных вдоль трещин усилий.**

В настоящем разделе в краткой форме приведен анализ результатов, касающихся постановок задач в рамках ТЛМДТ, включая изложение линеаризованных уравнений равновесия и представление их решений через потенциальные функции; описание моделей исследуемых деформируемых тел; приведение методов решения отдельных задач о разрушении материалов при действии направленных вдоль трещин усилий; формулировку критериев разрушения материалов с начальными напряжениями, действующими вдоль трещин, и разрушения тел при сжатии вдоль трещин. При изложении основных результатов будем следовать в основном терминологии и обозначениям, которые применяются в монографиях [23, 28, 30].

**2.1. Основные соотношения трехмерной линеаризованной механики деформируемых твердых тел.** Как было указано во введении, исследование проблем механики разрушения материалов при действии усилий, направленных вдоль трещин, в рамках объединенного подхода базируется на применении соотношений ТЛМДТ. При этом становление основных положений ТЛМДТ исторически происходило в рамках трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел и в рамках теории распространения волн в материалах с начальными (остаточными) напряжениями, детальный исторический очерк развития которых приведен в обобщающих обзорных статьях [99, 101, 111]. Отметим при этом, что в наиболее общей форме соотношения ТЛМДТ получают путем строгой и последовательной линеаризации уравнений нелинейной теории упругости. Поэтому ниже в очень краткой форме приведем некоторые соотношения нелинейной теории упругости, укажем на общие принципы их линеаризации и изложим линеаризованные уравнения равновесия, граничные условия и выражения для тензора деформаций Грина.

Будем описывать деформированное состояние тела в лагранжевых координатах  $x_j \equiv x^j$  ( $j = \overline{1, 3}$ ), которые в естественном (недеформированном) состоянии совпадают с декартовыми с осями  $\bar{g}_j$ , поскольку при применении декартовых координат ковариантные  $\bar{g}_j$  и контравариантные  $\bar{g}^j$  базисные векторы совпадают.

Для метрического тензора получаем

$$g_{mn} \equiv g^{nm} \equiv g_m^n = \delta_m^n; \quad g = \det \|g_{rs}\| \equiv g^{-1} = \det \|g^{rs}\| = 1. \quad (2.1)$$

Каждой точке (частице) среды ставится в соответствие тройка параметров  $x^m$ , причем взаимно-однозначное соответствие сохраняется в любой момент времени  $\tau$ . Введем следующие обозначения:  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки до деформации (в естественном состоянии);  $\vec{r}^*$  – радиус-вектор той же точки после деформации;  $\vec{u}$  – вектор перемещения этой же точки; координаты  $x_n \equiv x^n$  будем считать «вмороженными» в тело; все величины в деформированном состоянии будем отмечать звездочкой. В этом случае можем записать следующие выражения:

$$\vec{r}^*(x_m, \tau) = \vec{r}(x_m) + \vec{u}(x_m, \tau); \quad \vec{r} = \bar{g}_n x_n, \quad \vec{u} = \bar{g}_n u_n. \quad (2.2)$$

Пусть  $\bar{g}_m^*$  и  $\bar{g}_m^m$  – ковариантные и контравариантные базисные векторы в деформированном состоянии;  $g_{nm}^*$ ,  $g_m^*$  и  $g_m^n = \delta_m^n$  – ковариантные, контравариантные и смешанные составляющие метрического тензора в деформированном состоянии. Из (2.2) в этом случае получаем следующие выражения

$$d\vec{r}^* = \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial x^m} dx^m = \bar{g}_m^* dx^m; \quad \bar{g}_m^* = \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial x^m} = \bar{g}_m + \bar{g}_n \frac{\partial u_n}{\partial x^m}.$$

Образует разность квадратов дуг бесконечно малого элемента в деформированном и недеформированном состояниях. После преобразований получаем

$$ds^{*2} - ds^2 = d\vec{r}^* \cdot d\vec{r}^* - d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (g_{nm}^* - g_{nm}) dx^n dx^m; \quad g_{nm}^* = \delta_{nm} + 2\varepsilon_{nm}. \quad (2.3)$$

В (2.3) через  $\varepsilon_{nm}$  обозначены компоненты тензора деформации Грина, которые определяются соотношениями

$$2\varepsilon_{nm} = \frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \quad (n, m, k = \overline{1, 3}). \quad (2.4)$$

Приведенные выше соотношения дают возможность определить изменения геометрических объектов при деформировании. Так, например, обозначая величины, относящиеся к деформированному состоянию, индексом «звездочка», имеем:

изменение длины линейного элемента (коэффициент удлинения), направленного вдоль координатной линии  $x_n$ ,

$$\lambda_{(n)} = \frac{ds_n^*}{ds_n} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{nn}}; \quad (2.5)$$

изменение угла ( $\tilde{\psi}_{nm} = \psi_{nm} - \psi_{nm}^*$ ,  $\psi_{nm}^*$  – угол после деформации) между координатными линиями  $x_n$  и  $x_m$

$$\sin \tilde{\psi}_{nm} = \frac{(\delta_{nm} + 2\varepsilon_{nm})\sqrt{1 - \delta_{nm}}}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon_{nn})(1 + 2\varepsilon_{mm})}} - \delta_{nm} \sqrt{1 - \frac{(\delta_{nm} + 2\varepsilon_{nm})^2}{(1 + 2\varepsilon_{nn})(1 + 2\varepsilon_{mm})}}; \quad (2.6)$$

изменение элемента площади поверхности  $x_n = \text{const}$

$$\frac{dS_n^*}{dS_n} = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{mm})(1 + 2\varepsilon_{kk}) - (\delta_{mk} + 2\varepsilon_{mk})^2}, \quad n \neq m \neq k \neq n; \quad (2.7)$$

изменение элемента объема, образованного координатными поверхностями,

$$\frac{dV^*}{dV} = \sqrt{\det \|\delta_{rs} + 2\varepsilon_{rs}\|}. \quad (2.8)$$



Из выражения (2.4) следует, что тензор деформации Грина является симметричным тензором второго ранга, алгебраические инварианты которого имеют следующий вид:

$$A_1 = \varepsilon_{nn}; \quad A_2 = \varepsilon_{nm}\varepsilon_{mn}; \quad A_3 = \varepsilon_{nm}\varepsilon_{mk}\varepsilon_{kn}. \quad (2.9)$$

Для тензора деформации Грина можно образовать и другие системы инвариантов, которые выражаются через алгебраические инварианты (2.9). Так, часто применяется следующая система инвариантов [12]:

$$I_1 = 3 + 2\varepsilon_{nn} = 3 + 2A_1; \quad I_2 = 3 + 4\varepsilon_{nn} + 2(\varepsilon_{nn}\varepsilon_{mm} - \varepsilon_{nm}\varepsilon_{mn}) = 3 + 4A_1 + 2(A_1^2 - A_2);$$

$$I_3 = \det\|\delta_{rs} + 2\varepsilon_{rs}\| = 1 + 2A_1 + 2(A_1^2 - A_2) + \frac{4}{3}(2A_3 - 3A_1A_2 + A_1^3). \quad (2.10)$$

Если упругое тело несжимаемое, то из последнего выражения (2.10) и из (2.8) следует, что  $I_3 = 1$ .

Рассмотрим главные значения тензора деформаций Грина, обозначив их через  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ . Кроме того, примем, что направления координатных линий  $x_n$  совпадают с главными направлениями тензора деформаций Грина. В этом случае коэффициенты удлинения (2.5) обозначим  $\lambda_n$  и введем относительные коэффициенты удлинения  $\delta_n$ . Тогда из (2.5) при принятых допущениях получаем

$$\lambda_n = \sqrt{1 + 2\varepsilon_n}, \quad \delta_n = \lambda_n - 1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_n} - 1, \quad 2\varepsilon_n = \lambda_n^2 - 1, \quad 2\varepsilon_n = (\delta_n + 1)^2 - 1. \quad (2.11)$$

В рассматриваемом случае можно ввести еще одну систему инвариантов следующим образом

$$s_1 = (\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1) + (\lambda_3 - 1) \equiv \delta_1 + \delta_2 + \delta_3;$$

$$s_2 = (\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2 + (\lambda_3 - 1)^2 \equiv \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2; \quad (2.12)$$

$$s_3 = (\lambda_1 - 1)^3 + (\lambda_2 - 1)^3 + (\lambda_3 - 1)^3 \equiv \delta_1^3 + \delta_2^3 + \delta_3^3.$$

Заметим также, что в рассматриваемом случае из (2.9) выводим следующие выражения:

$$A_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \quad A_2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2; \quad A_3 = \varepsilon_1^3 + \varepsilon_2^3 + \varepsilon_3^3. \quad (2.13)$$

Для характеристики напряженного состояния в теории конечных деформаций применяют разные тензоры напряжений, детальную информацию о которых можно получить, например, из [12, 97]. Так, рассматривая вектор напряжения  $\vec{t}^{(i)}$ , который приложен в деформированном состоянии к площадке  $x_i = \text{const}$  и измеряется на единицу площади этой площадки в недеформированном состоянии, вводят симметричный тензор напряжений  $\tilde{S}$  и несимметричный тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа  $\tilde{t}$  выражениями

$$\vec{t}^{(i)} = t^{ij}\vec{g}_j = S^{ij}\vec{g}_j^*. \quad (2.14)$$

Из второго выражения (2.3) и (2.14) получаем связь между составляющими тензоров  $\tilde{S}$  и  $\tilde{t}$  в виде:

$$t^{ij} = S^{in} \left( \delta_{nj} + \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right). \quad (2.15)$$

Из (2.1), (2.14) имеем равенство

$$\vec{t}^{(i)} = t^{ij}\vec{g}_j \equiv t_{ij}\vec{g}^j; \quad \vec{g}_j \equiv \vec{g}^j. \quad (2.16)$$

Тогда запишем уравнения равновесия (при отсутствии массовых сил), граничные условия в напряжениях на части поверхности  $S_1$  и граничные условия в перемещениях на части поверхности  $S_2$  [24] в виде составляющих относительно ковариантных базисных векторов в недеформированном состоянии  $\bar{g}_j$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} t_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ S^{in} \left( \delta_{jn} + \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right) \right] = 0; \quad N_i t_{ij} \Big|_{S_1} = N_i \left[ S^{in} \left( \delta_{jn} + \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right) \right] \Big|_{S_1} = Q_j \Big|_{S_1} = P_j; \\ Q_j \equiv N_i \left[ S^{in} \left( \delta_{jn} + \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right) \right]; \quad u_j \Big|_{S_2} = f_j, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где  $P_j$  – составляющие (относительно  $\bar{g}_j$ ) вектора внешнего нагружения, повязанные с поверхностью тела в деформированном состоянии, но измеряемые на единицу поверхности в недеформированном состоянии;  $N_i$  – составляющие орта нормали к поверхности тела в недеформированном состоянии;  $f_j$  – составляющие правых частей граничных условий в перемещениях.

Систему уравнений геометрически нелинейной теории (2.17) необходимо дополнить определяющими соотношениями, которые для отдельных моделей материалов будут приведены в п. 2.2.

Ниже кратко изложим основные принципы построения линеаризованных соотношений. Рассматриваются три состояния равновесия упругого тела. *Первое состояние* называется естественным (недеформированным) состоянием, в котором отсутствуют напряжения и деформации. *Второе состояние* является начальным напряженно-деформированным состоянием; все величины, относящиеся к этому состоянию, будем отмечать индексом «нуль». Второе (начальное или остаточное) напряженно-деформированное состояние еще называют невозмущенным состоянием. Отметим, что при исследовании задач механики разрушения материалов с начальными напряжениями второе (начальное) состояние вызывается действием начальных (остаточных) напряжений, направленных вдоль плоскостей расположения трещин. *Третье состояние* называется возмущенным напряженно-деформированным состоянием; причем все величины, относящиеся к третьему состоянию, представляются в виде суммы величин, относящихся ко второму состоянию, и возмущений соответствующих величин. При исследовании задач механики разрушения материалов с начальными напряжениями возмущения напряженно-деформированного состояния возникают из-за дополнительных нагрузок, приложенных к берегам трещин. Возмущения считаются малыми величинами по сравнению с соответствующими величинами второго (невозмущенного) состояния; величины возмущений не будем отмечать никаким индексом в отличие от величин второго (невозмущенного) состояния. С учетом вышеизложенного подхода по умолчанию предполагается, что второе и третье состояния описываются одними и теми же соотношениями нелинейной теории упругости. Таким образом, рассматриваются лишь такие начальные или остаточные напряженно-деформированные состояния, переход к которым из начального состояния может осуществляться лишь за счет упругого деформирования. Все же следует отметить, что «упругие» начальные или остаточные напряжения в рассматриваемой части сплошного тела могут быть вызваны «неупругим» деформированием весьма сложной физической природы в другой части сплошного тела.

В дальнейшем для получения основных соотношений ТЛМДТ с учетом вышеизложенных соображений применяется принцип линеаризации. Проиллюстрируем вышеизложенное простейшим примером. Пусть в рамках рассматриваемого варианта нелинейной теории упругости имеет место следующее соотношение:

$$y = f(x), \quad (2.18)$$

отсчет в котором ведется от естественного (недеформированного, первого) состояния. Рассмотрим соотношение (2.18) применительно ко второму (начальному, невозму-

щенному) и третьему (возмущенному) состояниям с учетом вышеизложенных обозначений, в результате можем записать

$$y_0 = f(x_0), \quad y_0 + y = f(x_0 + x), \quad (2.19)$$

где  $y$  и  $x$  – возмущения соответствующих величин. Учитывая малость возмущений ( $|x| \ll |x_0|$ ), проведем линеаризацию соотношения (2.19), в результате получим:

$$y_0 + y \approx f(x_0) + x \left( \frac{df}{dx} \right) \Big|_{x=x_0}. \quad (2.20)$$

Вычитая из линеаризованного соотношения (2.20) для третьего состояния соответствующее выражение (2.19) для второго (начального) состояния, получаем соотношение

$$y \approx x \left( \frac{df}{dx} \right) \Big|_{x=x_0}. \quad (2.21)$$

В дальнейшем рассмотрим линеаризованную теорию упругости для тел с начальными (остаточными) напряжениями, под основными соотношениями которой будем понимать соотношения типа (2.21), т.е. соотношения между возмущениями, причем в выражениях типа (2.21) приближенно будем принимать знак равенства.

Так, проводя последовательную линеаризацию нелинейных геометрических соотношений (более подробно см. [24, 97], из (2.2), (2.4), (2.5), (2.7), (2.8) получим линеаризованные выражения:

для ковариантных базисных векторов в деформированном состоянии

$$\bar{g}_m^* = \bar{g}_n \frac{\partial u_n}{\partial x_m}; \quad (2.22)$$

для тензора деформаций Грина:

$$2\varepsilon_{nm} = \left[ \left( \delta_{mj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_m} \right) \frac{\partial}{\partial x_n} + \left( \delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) \frac{\partial}{\partial x_m} \right] u_j, \quad g_{nm}^* = 2\varepsilon_{nm}; \quad (2.23)$$

для других геометрических объектов:

$$\lambda_{(n)} = (1 + 2\varepsilon_{nn}^0)^{-\frac{1}{2}} \left( \delta_{jn} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_n}; \quad (2.24)$$

$$\frac{dS_n^*}{dS_n} = \sqrt{\frac{g_0^*}{g_{*0}^{nn}}} \left( g_{*0}^{nm} g_{*0}^{mk} - g_{*0}^{nm} g_{*0}^{nk} \right) \left( \delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_m} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \quad n \neq m \neq k \neq n; \quad (2.25)$$

$$\frac{dV^*}{dV} = \sqrt{g_0^* g_{*0}^{nm}} \left( \delta_{jm} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_m} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_n}. \quad (2.26)$$

Из (2.9), (2.10) с учетом (2.23) получаем линеаризованные соотношения для определения инвариантов тензора деформаций Грина:

$$A_1 = \left( \delta_{jn} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_n}; \quad A_2 = 2\varepsilon_{nm}^0 \left( \delta_{jm} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_m} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_n}; \quad A_3 = 3\varepsilon_{im}^0 \varepsilon_{ni}^0 \left( \delta_{jm} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_{mn}} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_n}; \quad (2.27)$$

$$I_1 = 2 \left( \delta_{jn} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_n}; \quad I_2 = 4 \left( \delta_{nm} + \delta_{nm} \varepsilon_{ii}^0 - \varepsilon_{nm}^0 \right) \left( \delta_{jm} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_m} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_n}. \quad (2.28)$$

Условие несжимаемости принимает вид

$$g_{*0}^{nm} \varepsilon_{nm} \equiv g_{*0}^{nm} \left( \delta_{im} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_m} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_n} = 0. \quad (2.29)$$

В соответствии с (2.17) получаем такие линейризованные уравнения равновесия и граничные условия:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) S^{in} + S_0^{in} \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right] = 0, \quad (2.30)$$

где тензоры напряжений  $\tilde{t}$  и  $\tilde{S}$  связаны такими линейризованными соотношениями

$$t_{ij} = \left( \delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) S^{in} + S_0^{in} \frac{\partial u_j}{\partial x_n}; \quad (2.31)$$

граничные условия

$$N_i t_{ij} \Big|_{S_1} = \left\{ \left( \delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) S^{in} + S_0^{in} \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right\} \Big|_{S_1} = P_j; \quad u^i \Big|_{S_2} = f_j. \quad (2.32)$$

Отметим, что в граничных условиях (2.32)  $P_j$  – компоненты (относительно  $\tilde{g}_i$ ) возмущений правых частей граничных условий в напряжениях;  $f_j$  – возмущения правых частей граничных условий в перемещениях;  $N_i$  – составляющие орта нормали к поверхности тела в недеформированном состоянии.

Выше приведены основные линейризованные соотношения для теории конечных (больших) начальных деформаций. Указанные соотношения могут быть также переформулированы для двух вариантов теории малых начальных деформаций (более подробно см. [24, 97, 99]).

Так, в первом варианте теории малых начальных деформаций принимается, что удлинения и сдвиги являются малыми величинами и ими можно пренебречь по сравнению с единицей. В рамках этого варианта теории основные соотношения имеют вид уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) \sigma^{in} + \sigma_0^{in} \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right] = 0, \quad (2.33)$$

где соотношения между составляющими несимметричного тензора напряжений Пиолы – Кирхгоффа  $\tilde{t}$  и составляющими обычно применяемого симметричного тензора напряжений  $\tilde{\sigma}$  выражаются таким образом:

$$t_{ij} = \left( \delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) \sigma^{in} + \sigma_0^{in} \frac{\partial u_j}{\partial x_n}, \quad (2.34)$$

граничные условия имеют вид (2.32) при обозначениях (2.34), а условие несжимаемости принимает вид

$$g^{nm} \left( \delta_{im} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_m} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_n} = 0. \quad (2.35)$$

Во втором варианте теории малых начальных деформаций дополнительно к основному допущению первого варианта принимается, что начальное состояние может быть определено в рамках геометрически линейной теории. При этом условии, в ча-

стности, компоненты тензора деформации Грина для начального состояния принимают вид

$$2\varepsilon_{nm}^0 = \frac{\partial u_n^0}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m^0}{\partial x_n}. \quad (2.36)$$

В рамках этого варианта теории основные соотношения приобретают вид уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \sigma^{ij} + \sigma_0^{in} \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \right] = 0, \quad (2.37)$$

где соотношения между составляющими несимметричного тензора напряжений Пиолы – Кирхгоффа  $\tilde{t}$  и составляющими обычно применяемого симметричного тензора напряжений  $\tilde{\sigma}$  выражаются таким образом

$$t_{ij} = \sigma^{ij} + \sigma_0^{in} \frac{\partial u_j}{\partial x_n}, \quad (2.38)$$

граничные условия имеют вид (2.32) при обозначениях (2.37), а условие несжимаемости принимает вид:

$$g^{nj} \frac{\partial u_j}{\partial x_n} = 0. \quad (2.39)$$

**2.2. Об исследуемых моделях деформируемых тел.** Далее в краткой форме приводятся основные соотношения упругости в рамках нелинейной и линеаризованной теорий для упругих сжимаемых и несжимаемых тел, которые в дальнейшем будут использоваться в статье.

Для гиперупругих тел предполагается существование упругого потенциала как функции, характеризующей потенциальную энергию упругой деформации вида [24, 97, 99]

$$\delta \Phi = S^{ij} \delta \varepsilon_{ij}. \quad (2.40)$$

В общем виде для теории конечных (больших) деформаций из (2.40) получаем выражения для компонент тензора напряжений:

$$\text{для сжимаемых тел } S^{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ji}} \right) \Phi; \quad (2.41)$$

$$\text{для несжимаемых тел } S^{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ji}} \right) \Phi + p g^{ij}, \quad (2.42)$$

где скалярная функция  $p$  в (2.42) связана с гидростатическим давлением.

Далее будут использоваться как наиболее типичные и важные с теоретической и практической точек зрения модель изотропного высокоэластического материала с разными формами упругого потенциала и модель широко распространенных конструкционных материалов – композитов.

*Изотропные высокоэластичные материалы.* Для сжимаемых гиперупругих материалов удобно использовать упругие потенциалы, построенные на основе базовых алгебраических инвариантов (2.9), (2.27) тензора деформаций Грина (2.4), (2.23) в виде

$$\Phi = \sum_{i,j,k} c_{ijk} A_1^i A_2^j A_3^k; \quad c_{ijk} = \text{const}. \quad (2.43)$$

Ограничиваясь в выражении (2.43) конечным числом членов, можно получать упругие потенциалы различной структуры. В частности, ограничиваясь квадратным приближением, получаем упругий потенциал вида [23]

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda A_1^2 + \mu A_2, \quad (2.44)$$

который при переходе к классической линейной теории упругости переходит в потенциал линейной теории, а параметры  $\lambda$  и  $\mu$  при этом являются постоянными Ляме.

Если в выражении (2.43) ограничиться кубическим приближением, то будем иметь упругий потенциал типа Мурнагана [23]

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda A_1^2 + \mu A_2 + \frac{a}{3} A_1^3 + b A_1 A_2 + \frac{c}{3} A_3. \quad (2.45)$$

Используя систему инвариантов тензора деформаций Грина  $s_1, s_2, s_3$  в виде (2.12) и представляя упругий потенциал для *сжимаемых материалов* через эти инварианты в виде, аналогичном (2.43)

$$\Phi^s = \sum_{i,j,k} c_{ijk}^s s_1^i s_2^j s_3^k; \quad c_{ijk}^s = \text{const}, \quad (2.46)$$

а также ограничиваясь в ряде (2.46) конечным числом членов, можно получать упругие потенциалы конкретной структуры на основе указанных базовых инвариантов. Так, оставляя два члена в (2.46) и вводя новые обозначения для постоянных, получаем упругий потенциал гармонического типа [132]

$$\Phi^s = \frac{1}{2} \lambda s_1^2 + \mu s_2. \quad (2.47)$$

Аналогично строятся упругие потенциалы для несжимаемых гиперупругих материалов. Так, используя систему инвариантов (2.12) и ограничиваясь в ряде типа (2.46) одним членом ряда, получаем упругий потенциал для несжимаемого материала простейшей структуры – потенциал Бартенева – Хазановича – в виде [3]

$$\Phi^s = 2\mu s_1; \quad \mu = \text{const}. \quad (2.48)$$

Пользуясь системой инвариантов  $I_1, I_2, I_3$  (2.10), (2.28) и ограничиваясь конечным числом членов соответствующего ряда, можно получить потенциал Трелоара [146]

$$\Phi = c_{10} (I_1 - 3); \quad c_{10} = \text{const}. \quad (2.49)$$

Отметим, что упругий несжимаемый изотропный материал, который описывается потенциалом Трелоара, в литературе получил название материала «неогуковского» типа.

Более подробная информация о других типах упругих потенциалов приведена в [24, 97].

*Композитные материалы.* При исследовании композитных материалов в данной работе будем предполагать, что размеры трещин существенно превышают размеры структурных элементов композитов (т.е. рассматриваются макротрещины), а также будем рассматривать только процессы разрушения, при которых не проявляются свойства композита как кусочно-однородной среды (типа разрушения на границе раздела сред и т.п.). При таких предположениях, следуя [30, 41, 52, 77], будем применять континуальную модель композита с приведенными характеристиками анизотропного тела (в частности, трансверсально-изотропного тела, плоскости изотропии которого параллельны плоскостям расположения трещин  $x_3 = \text{const}$ ).

Упругий потенциал для анизотропного сжимаемого тела можно представить в следующем общем виде [30]:

$$\Phi = E^{ijnm} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{nm} + E^{ijnmpq} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{nm} \varepsilon_{pq} + \dots \quad (2.50)$$

Ограничиваясь в (2.50) квадратичной частью и применяя второй вариант теории малых деформаций (для которых  $S^{ij} \equiv \sigma_{ij}$ ), получаем следующие соотношения упругости:

$$\sigma_{ij} = A_{ijnm} \varepsilon_{nm}; \quad \varepsilon_{nm} = a_{nmij} \sigma_{ij}. \quad (2.51)$$

В частности, для трансверсально-изотропного тела с осью изотропии  $Ox_3$  получаем соотношения упругости в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= A_{11} \varepsilon_{11} + A_{12} \varepsilon_{22} + A_{13} \varepsilon_{33}; & \sigma_{12} &= (A_{11} - A_{12}) \varepsilon_{12}; & \sigma_{22} &= A_{12} \varepsilon_{11} + A_{11} \varepsilon_{22} + A_{13} \varepsilon_{33}; \\ \sigma_{13} &= 2A_{44} \varepsilon_{13}; & \sigma_{23} &= 2A_{44} \varepsilon_{23}; & \sigma_{33} &= A_{13} \varepsilon_{11} + A_{13} \varepsilon_{22} + A_{33} \varepsilon_{33}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

С использованием пяти независимых технических постоянных – модулей упругости  $E_j$ , модулей сдвига  $G_{ij}$  и коэффициентов Пуассона  $\nu_{ij}$  – соотношения упругости для трансверсально-изотропного тела (2.52) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_{33}; & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2G_{12}} \sigma_{12}; & \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_1} \sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_{33}; \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2G_{13}} \sigma_{13}; & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2G_{13}} \sigma_{23}; & \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_{11} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_{22} + \frac{1}{E_3} \sigma_{33}; \\ G_{12} &= \frac{E_1}{2(1 + \nu_{12})}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

В частности, трансверсально-изотропными средами с приведенными макрохарактеристиками моделируются такие композитные материалы, которые будут использоваться в дальнейшем в этой работе, как слоистый композит с изотропными слоями и волокнистый композит со стохастическим армированием в плоскости  $x_3 = \text{const}$  короткими эллипсоидальными волокнами [52]. Приведенные макрохарактеристики этих композитных материалов определяются упругими характеристиками компонентов и их объемной концентрацией в композите. Так, например, для слоистого композита с изотропными слоями макрохарактеристики определяются следующим образом [52]:

$$\begin{aligned} E_1^* &= \frac{4\Delta G_{12}^*}{2G_{12}^* \lambda_{33}^* + \Delta}; & E_3^* &= \frac{\Delta}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*}; & \nu_{31}^* &= \frac{\lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*}; & \nu_{12}^* &= \frac{E_1^*}{2G_{12}^*} - 1; \\ G_{13}^* &= \lambda_{44}^*; & G_{12}^* &= \lambda_{66}^*; & \Delta &= \lambda_{33}^* (\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) - 2\lambda_{13}^{*2}; \\ \lambda_{13}^* &= \langle \lambda \rangle - c_1 c_2 (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 + 2\mu_1 - \lambda_2 - 2\mu_2) z; \\ \frac{1}{2} (\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) &= \langle \lambda + \mu \rangle - c_1 c_2 (\lambda_1 - \lambda_2)^2 z; \\ \lambda_{33}^* &= \langle \lambda + 2\mu \rangle - c_1 c_2 (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\mu_1 - 2\mu_2) z; \\ \lambda_{44}^* &= \mu_1 \mu_2 \mu_4^{-1}; & \lambda_{66}^* &= \langle \mu \rangle; & z &= (\lambda_4 + 2\mu_4)^{-1}; & \lambda_4 &= c_1 \lambda_2 + c_2 \lambda_1; & \mu_4 &= c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1; \\ \langle \kappa \rangle &\equiv c_1 \kappa_1 + c_2 \kappa_2 \end{aligned} \quad (2.54)$$

(слои уложены в плоскости  $x_1 x_2$ ;  $\lambda_\nu, \mu_\nu$  – постоянные Ляме  $\nu$ -того слоя ( $\nu = 1, 2$ );  $c_\nu$  – объемная концентрация слоев с упругими свойствами  $\lambda_\nu, \mu_\nu$ ). В частности, для композитного материала из слоев алюмоборосиликатного стекла в композиции со слоями эпоксиномалеиновой смолы постоянные Ляме, фигурирующие в (2.54), имеют следующие значения [52]:

для стекла  $\lambda_1 = 1,94 \cdot 10^4$  МПа,  $\mu_1 = 2,92 \cdot 10^4$  МПа; для смолы  $\lambda_2 = 3,69 \cdot 10^3$  МПа,  $\mu_2 = 1,14 \cdot 10^3$  МПа.

Для углеродного волокна, стохастично армированного в плоскости изотропии  $x_3 = \text{const}$  короткими углеродными волокнами эллипсоидальной формы (с объемной концентрацией волокон, равной 0,7), приведенные макрохарактеристики являются такими [52]:

$$E_1 = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \quad E_3 = 3 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \quad G_{13} = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \quad \nu_{12} = 0,125; \quad \nu_{31} = 0,09.$$

С использованием общего подхода к линеаризации нелинейных соотношений получаются такие линеаризованные соотношения упругости [24, 97]:

$$\text{для сжимаемых тел} \quad t_{ij} = \omega_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}; \quad S^{in} = \lambda_{in\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}; \quad (2.55)$$

где составляющие тензоров  $\tilde{\lambda}$  и  $\tilde{\omega}$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda_{ij\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \left( \delta_{m\alpha} + \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_m} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{m\beta}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta m}^0} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{in}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ni}^0} \right) \Phi^0; \\ \omega_{ij\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \left( \delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) \left( \delta_{m\alpha} + \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_m} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{m\beta}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta m}^0} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{in}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ni}^0} \right) \Phi^0 + \delta_{\alpha j} S_0^{i\beta}; \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$S_0^{i\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{i\beta}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta i}^0} \right) \Phi^0; \quad \Phi^0 = \Phi(\varepsilon_{11}^0, \dots, \varepsilon_{33}^0);$$

$$\text{для несжимаемых тел} \quad t_{ij} = \kappa_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + q^{ij} p; \quad S^{in} = \mu_{in\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + g^{in} p, \quad (2.57)$$

где составляющие тензоров  $\tilde{\kappa}$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{q}$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \kappa_{ij\alpha\beta} &= \left( \delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) \left( \delta_{m\alpha} + \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_m} \right) \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{m\beta}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta m}^0} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{in}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ni}^0} \right) \Phi^0 - \right. \\ &\quad \left. - p^0 \left( g_{*0}^{i\beta} g_{*0}^{mn} + g_{*0}^{im} g_{*0}^{\beta n} \right) \right] + \delta_{\alpha j} S_0^{i\beta}; \\ \mu_{ij\alpha\beta} &= \left( \delta_{m\alpha} + \frac{\partial u_\alpha^0}{\partial x_m} \right) \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{m\beta}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta m}^0} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{in}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ni}^0} \right) \Phi^0 - p^0 \left( g_{*0}^{i\beta} g_{*0}^{mn} + g_{*0}^{im} g_{*0}^{\beta n} \right) \right]; \\ q^{ij} &= g_{*0}^{im} \left( \delta_{mj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_m} \right); \quad S_0^{i\beta} = p^0 g_{*0}^{i\beta} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{i\beta}^0} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta i}^0} \right) \Phi^0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

В соотношениях (2.55) – (2.58)  $q_{*0}^{ij}$  – контравариантные составляющие метрического тензора в начальном напряженном состоянии. Кроме того, между тензорами  $\tilde{\lambda}$  и  $\tilde{\omega}$ ,  $\tilde{\kappa}$  и  $\tilde{\mu}$  существует связь

$$\omega_{ij\alpha\beta} = \left( \delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) \lambda_{in\alpha\beta} + \delta_{\alpha j} S_0^{i\beta}; \quad \kappa_{ij\alpha\beta} = \left( \delta_{nj} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_n} \right) \mu_{in\alpha\beta} + \delta_{\alpha j} S_0^{i\beta}. \quad (2.59)$$

Для сжимаемого анизотропного (в частности, трансверсально-изотропного материала) для второго варианта теории малых начальных деформаций



$$\omega_{ij\alpha\beta} = \lambda_{ij\alpha\beta} + \delta_{\alpha j} S_0^{i\beta}; \quad \lambda_{ij\alpha\beta} = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} A_{i\beta} + (1 - \delta_{ij}) G_{ij} (\delta_{i\beta} \delta_{j\alpha} + \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta});$$

$$S_0^{i\beta} = \delta_{i\alpha} \sum_{k=1}^3 A_{ik} \varepsilon_{kk}^0 + 2(1 - \delta_{i\beta}) G_{i\beta} \varepsilon_{i\beta}^0. \quad (2.60)$$

**2.3. Общие решения линеаризованных уравнений при однородных начальных состояниях.** В настоящем пункте кратко излагаются основные соотношения трехмерной линеаризованной механики деформируемого твердого тела для сжимаемых и несжимаемых тел при однородных начальных напряженно-деформированных состояниях и приводится представление общих решений линеаризованных уравнений равновесия для таких состояний через потенциальные функции.

Исследование задач механики разрушения материалов с начальными напряжениями, действующими вдоль трещин, и механики разрушения материалов при сжатии вдоль параллельных трещин удобно проводить в координатах, введенных в начальном (втором) состоянии. Поэтому наряду с лагранжевыми координатами  $x_j \equiv x^j$ , которые в естественном (недеформированном) состоянии совпадают с декартовыми, будем использовать декартовы координаты  $y_j \equiv y^j$  ( $j = \overline{1,3}$ ), которые связаны с начальным (вторым) напряженно-деформированным состоянием. При этом связь между координатами  $x_j$  и  $y_j$  одной и той же материальной точки тела имеет следующий вид:

$$y_j = \lambda_j x_j; \quad \lambda_j = \text{const}; \quad j = \overline{1,3}, \quad (2.61)$$

где  $\lambda_j$  – коэффициенты удлинения (или укорочения) вдоль координатных осей  $Oy_j$  ( $Ox_j$ ), связанные с начальными напряжениями.

При действии на тело нагрузок, направленных строго вдоль плоскостей расположения трещин, в материале реализуется однородное начальное (второе) напряженно-деформированное состояние, которое характеризуется такими соотношениями для компонент вектора перемещений:

$$u_m^0 = \lambda_m^{-1} (\lambda_m - 1) y_m. \quad (2.62)$$

Введем также основные величины, отнесенные к геометрическим объектам в начальном (втором) состоянии, обозначая их при этом значком «штрих», а именно:  $Q'_{ij}$  – составляющие несимметричного тензора напряжений, отнесенные к единице площади координатных площадок в начальном состоянии;  $P'_j$  – составляющие вектора поверхностной нагрузки на площадке с ортом нормали  $\vec{N}$ . При этом получаем соотношения [24, 97]:

$$Q'_{ij} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} t_{ij}; \quad P'_j = \frac{\lambda_i N_i^{-1}}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} P_j. \quad (2.63)$$

При однородном начальном напряженно-деформированном состоянии, определяемом соотношениями (2.62), определяющие соотношения (2.55), (2.57) с учетом (2.63) принимают вид:

$$\text{для сжимаемых тел} \quad Q'_{ij} = \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta}; \quad (2.64)$$

$$\text{для несжимаемых тел} \quad Q'_{ij} = \kappa'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} + \delta_{ij} p'; \quad (2.65)$$

$$\left( \omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_j \lambda_\alpha \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} [\delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} A_{i\beta} + (1 - \delta_{ij})(\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}) \mu_{ij}] + \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} S_0^{\beta\beta}; \right.$$

$$\kappa'_{ij\alpha\beta} = \lambda_i \lambda_j \kappa_{ij\alpha\beta} = \lambda_i \lambda_j \lambda_\alpha \lambda_\beta \left[ \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} A_{i\beta} + (1 - \delta_{ij})(\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}) \mu_{ij} \right] + \lambda_i \lambda_j \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha} S_0^{\beta\beta} \Big),$$

а величины  $A_{i\beta}$ ,  $\mu_{ij}$ ,  $S_0^{\beta\beta}$  определяются выбором модели материала (в частности, видом упругого потенциала).

Линеаризированные уравнения равновесия (2.30) с учетом (2.31) в координатах  $y_j$  приобретают вид

$$\frac{\partial}{\partial y_j} Q'_{ij} = 0. \quad (2.66)$$

С учетом (2.64), (2.65) эти уравнения равновесия можно записать в перемещениях:

$$\text{для сжимаемых тел } L'_{m\alpha} u_\alpha = 0; \quad L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_\beta} \quad (m, \alpha, i, \beta = \overline{1, 3}); \quad (2.67)$$

$$\text{для несжимаемых тел} \quad N'_{m\alpha} u_\alpha = 0; \quad u_4 \equiv p', \quad (2.68)$$

$$\text{где } N'_{m\alpha} = \kappa'_{m\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_\beta} (1 - \delta_{m4})(1 - \delta_{\alpha 4}) + \delta_{\alpha 4} (1 - \delta_{m4}) \frac{\partial}{\partial y_m} + \delta_{m4} (1 - \delta_{\alpha 4}) \frac{\partial}{\partial y_\alpha};$$

$$(m, \alpha, i, \beta = \overline{1, 3}).$$

Как видим, при однородном начальном состоянии (2.62) линеаризованные уравнения равновесия в перемещениях (2.67), (2.68) представляют собой системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. В [24, 97] операторным методом построены представления общих решений этих уравнений в виде одной из следующих форм (или их линейной комбинации):

$$\text{сжимаемые тела } u_i^{(j)} = \left[ \frac{\partial (\det \|L'_{rs}\|)}{\partial (L'_{m\alpha})} \right] \Phi^{(j)}, \quad [\det \|L'_{rs}\|] \Phi^{(j)} = 0 \quad (j = \overline{1, 3}); \quad (2.69)$$

$$\text{несжимаемые тела } u_\alpha^{(m)} = \frac{\partial (\det \|N'_{rs}\|)}{\partial (N'_{m\alpha})} \Phi^{(m)}, \quad \det \|N'_{rs}\| \Phi^{(m)} = 0 \quad (m = \overline{1, 4}). \quad (2.70)$$

Дальнейшее упрощение представлений общих решений линеаризованных уравнений равновесия в случае пространственных задач возможно для одного частного случая однородного начального состояния, когда начальные напряжения вдоль осей  $Oy_1$  и  $Oy_2$  являются одинаковыми. Так, будем предполагать, что однородное начальное состояние (2.62) обеспечивает для изотропных тел и трансверсально-изотропных тел с осью изотропии  $Oy_3$  также выполнение условий

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3; \quad \varepsilon_{11}^0 = \varepsilon_{22}^0. \quad (2.71)$$

Рассмотрим произвольную цилиндрическую систему координат, ось которой направлена вдоль оси  $Oy_3$ , а в плоскости  $y_1 Oy_2$  – произвольную кривую (в начальном деформированном состоянии) с ортами нормали  $\vec{N}$  и касательной  $\vec{S}$ ;  $N_1$  и  $N_2$  – составляющие орта  $\vec{N}$  по осям  $Oy_1$  и  $Oy_2$ . При начальном напряженно-деформированном состоянии, задаваемом соотношениями (2.62), (2.71) представление составляющих вектора перемещений  $u_N$  и  $u_S$  вдоль нормали и касательной можно выразить через две потенциальные функции  $\Psi$  и  $\chi$  в виде [24, 97]

для сжимаемых тел

$$u_N = \frac{\partial}{\partial S} \Psi - \frac{\partial^2}{\partial N \partial y_3} \chi; \quad u_S = -\frac{\partial}{\partial N} \Psi - \frac{\partial^2}{\partial S \partial y_3} \chi;$$

$$u_3 = \frac{\omega'_{1111}}{\omega'_{1133} + \omega'_{1313}} \left( \Delta_1 + \frac{\omega'_{3113}}{\omega'_{1111}} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \chi; \quad (2.72)$$

для несжимаемых тел

$$u_N = \frac{\partial}{\partial S} \Psi - \frac{\partial^2}{\partial N \partial y_3} \chi; \quad u_S = -\frac{\partial}{\partial N} \Psi - \frac{\partial^2}{\partial S \partial y_3} \chi; \quad u_3 = \lambda_1 q_1 \lambda_3^{-1} q_3^{-1} \Delta_1 \chi;$$

$$p = \lambda_1^{-1} q_1^{-1} \left\{ \left[ \kappa'_{1111} - \lambda_1 q_1 \lambda_3^{-1} q_3^{-1} (\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313}) \right] \Delta_1 + \kappa'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right\} \frac{\partial}{\partial y_3} \kappa', \quad (2.73)$$

где  $\Delta_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$ , а  $\frac{\partial}{\partial N}$  и  $\frac{\partial}{\partial S}$  – соответственно, производные по нормали и касательной.

При этом потенциальные функции  $\Psi$  и  $\chi$  удовлетворяют уравнениям

$$\left( \Delta_1 + n_3 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \Psi = 0; \quad \left( \Delta_1 + n_1 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left( \Delta_1 + n_2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \chi = 0, \quad (2.74)$$

где  $n_j, j = \overline{1, 3}$  – корни алгебраических (характеристических) уравнений, соответствующих дифференциальным уравнениям (2.74) и имеющие вид:

$$\text{для сжимаемых тел} \quad n_{1,2} = c' \pm (c'^2 - \omega'_{3113} \omega'_{3333} \omega'_{1331} \omega'_{1111}^{-1})^{-1/2}, \quad n_3 = \omega'_{3113} \omega'_{3113}^{-1}; \quad (2.75)$$

$$2c' \omega'_{1111} \omega'_{1331} = \omega'_{1331} \omega'_{3113} + \omega'_{1111} \omega'_{3333} - (\omega'_{1133} + \omega'_{1313})^2;$$

$$\text{для несжимаемых тел} \quad n_{1,2} = c' \pm (c'^2 - q_{33}^2 q_{11}^{-2} \kappa'_{3113} \kappa'_{1331}^{-1})^{-1/2}, \quad n_3 = \kappa'_{3113} \kappa'_{3113}^{-1}; \quad (2.76)$$

$$2c' \kappa'_{1331} = \kappa'_{3333} + q_{11}^{-2} q_{33}^{-2} \kappa'_{1111} - 2q_{11}^{-1} q_{33} (\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313}).$$

Дальнейшее упрощение представлений общих решений связано с возможностью определения функции  $\chi$ , удовлетворяющей уравнению четвертого порядка (2.74), через две функции, удовлетворяющие уравнениям второго порядка [24, 97].

Так, в случае *неравных корней* характеристического уравнения ( $n_1 \neq n_2$ ), вводя новые функции  $\Psi = -\varphi_3$ ,  $\partial \chi / \partial y_3 = -(\varphi_1 + \varphi_2)$ , удовлетворяющие уравнениям  $(\Delta_1 + \partial^2 / (\partial z_3^2)) \times \varphi_j = 0$ ;  $z_j = n_j^{-1/2} y_3$  ( $j = \overline{1, 3}$ ), получаем такие выражения для определения перемещений:

$$u_N = \frac{\partial}{\partial N} (\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{\partial \varphi_3}{\partial S}; \quad u_S = \frac{\partial}{\partial S} (\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial N}; \quad u_3 = m_1 n_1^{-1/2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + m_2 n_2^{-1/2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2}.$$

Для несжимаемых тел получаем выражение для определения скалярной величины  $p'$ :

$$p = \lambda_1^{-1} q_1^{-1} \left\{ \left[ \kappa'_{1111} - \lambda_1 q_1 \lambda_3^{-1} q_3^{-1} (\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313}) \right] \Delta_1 + \kappa'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right\} (\varphi_1 + \varphi_2).$$

Для случая *равных корней* характеристического уравнения ( $n_1 = n_2$ ), вводя новые функции  $\Psi = -\varphi_3$ ;  $\chi = \chi_{(2)} + y_3 \chi_{(3)}$ ;  $\partial \chi_{(2)} / \partial y_3 = -\varphi_1$ ;  $\chi_{(3)} = -\varphi_2$ ;  $\varphi = -(\varphi_1 + \varphi_2)$ :

$F = -\partial\varphi_2/\partial z_1$ ;  $\Phi \equiv \partial\varphi/\partial z_1$ , получаем такие выражения для определения перемещений:

$$u_N = -\frac{\partial\varphi}{\partial N} - z_1 \frac{\partial F}{\partial N} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial S}; \quad u_S = -\frac{\partial\varphi}{\partial S} - z_1 \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial N};$$

$$u_3 = n_1^{-1/2} (m_1 - m_2 + 1)F - m_1 n_1^{-1/2} \frac{\partial\varphi}{\partial z_1} - m_1 n_1^{-1/2} z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1}$$

(функции  $\varphi$ ,  $F$ ,  $\Phi$ ,  $\varphi_3$  являются гармоническими).

В случае круговой цилиндрической системы координат  $r, \theta, y_3$  представления общих решений для *неравных корней* характеристического уравнения имеют вид:

$$u_r = \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi_3}{\partial\theta}; \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial r}; \quad u_3 = \frac{m_2}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1} + \frac{m_2}{\sqrt{n_2}} \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_2};$$

$$Q'_{33} = C_{44} \left[ d_1 l_1 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \varphi_1 + d_2 l_2 \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \varphi_2 \right]; \quad (2.77)$$

$$Q'_{3r} = C_{44} \left\{ d_1 n_1^{-1/2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z_1} \varphi_1 + d_2 n_2^{-1/2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z_2} \varphi_2 - n_3^{-1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial\theta \partial z_3} \varphi_3 \right\};$$

$$Q'_{3\theta} = C_{44} \left\{ d_1 n_1^{-1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial\theta \partial z_1} \varphi_1 + d_2 n_2^{-1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial\theta \partial z_2} \varphi_2 + n_3^{-1/2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z_3} \varphi_3 \right\}.$$

Параметры, входящие в (2.77), определяются соотношениями:

$$\text{для сжимаемых тел } C_{44} = \omega'_{1313}, \quad m_j = (\omega'_{1111} n_j - \omega'_{1113})(\omega'_{1133} + \omega'_{1313})^{-1}, \quad d_j = 1 + m_j, \quad (2.78)$$

$$l_j = (\omega'_{3333} m_j - \omega'_{1133} n_j) n_j^{-1} (1 + m_j)^{-1} \omega'_{1313}, \quad j = 1, 2;$$

$$\text{для несжимаемых тел } C_{44} = \kappa'_{1313}, \quad m_j = \lambda_1 q_1 \lambda_3^{-1} q_3^{-1} n_j, \quad d_j = 1 + m_j, \quad (2.79)$$

$$l_j = \kappa'_{1313} n_j^{-1} (1 + m_j)^{-1} \left[ \kappa'_{3333} m_j + n_j (\lambda_1^{-1} q_1^{-1} \lambda_3 q_3 \kappa'_{1111} - \kappa'_{1313} - 2\kappa'_{1133}) - \lambda_1^{-1} q_1^{-1} \lambda_3 q_3 \kappa'_{3113} \right];$$

$$j = 1, 2.$$

Представления общих решений для *равных корней* характеристического уравнения имеют вид:

$$u_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} - z_1 \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi_3}{\partial\theta}; \quad u_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - z_1 \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial r};$$

$$u_3 = (m_1 - m_2 + 1) n_1^{-1/2} F - m_1 n_1^{-1/2} \Phi - m_1 n_1^{-1/2} \frac{\partial F}{\partial z_1};$$

$$Q'_{33} = C_{44} \left\{ (d_1 l_1 - d_2 l_2) \frac{\partial F}{\partial z_1} - d_1 l_1 \frac{\partial\Phi}{\partial z_1} - d_1 l_1 z_1 \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} \right\}; \quad (2.80)$$

$$Q'_{3r} = C_{44} \left\{ n_1^{-1/2} \frac{\partial}{\partial r} [(d_1 - d_2)F - d_1\Phi] - n_1^{-1/2} d_1 z_1 \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z_1} - n_3^{-1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial\theta \partial z_3} \right\};$$

$$Q'_{3\theta} = C_{44} \left\{ n_1^{-1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} [(d_1 - d_2)F - d_1\Phi] - n_1^{-1/2} d_1 z_1 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial\theta \partial z_1} + n_3^{-1/2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial z_3} \right\}.$$

Параметры  $C_{44}$ ,  $m_1$ ,  $l_1$ ,  $d_j$ ,  $j=1,2$ , фигурирующие в (2.80), определяются для сжимаемых и несжимаемых тел, соответственно, из (2.78), (2.79), а параметры  $m_2$  и  $l_2$  имеют вид:

для сжимаемых тел

$$m_2 = (\omega'_{1133} - \omega'_{1313})(\omega'_{1133} + \omega'_{1313})^{-1};$$

$$l_2 = [\omega'_{3333}(m_1 + m_2 - 1) - \omega'_{1133}n_1]n_1^{-1}(1 + m_2)^{-1}\omega'_{1313}^{-1}; \quad (2.81)$$

для несжимаемых тел

$$m_2 = 1; \quad l_2 = (2n_1\kappa'_{1313})^{-1}[\kappa'_{3333}m_1 + n_1(\lambda_1^{-1}q_1^{-1}\lambda_3q_3\kappa'_{1111} - \kappa'_{1313} - 2\kappa'_{1133}) - 3\lambda_1^{-1}q_1^{-1}\lambda_3q_3\kappa'_{3113}]. \quad (2.82)$$

Ниже приведены значения параметров, фигурирующих в представлениях (2.77), (2.80), для некоторых типов материалов:

материал с потенциалом гармонического типа (2.47) (сжимаемое тело, случай равных корней)

$$\lambda_3 = 1 - 2\nu(1 - \nu)^{-1}; \quad n_1 = n_2 = \lambda_3^2/\lambda_1^2; \quad n_3 = 2\lambda_3^2(2\lambda_1 - \lambda_3)^{-1}(\lambda_1 + \lambda_3)^{-1}; \quad m_1 = \lambda_3/\lambda_1;$$

$$m_2 = \frac{\nu\lambda_1 + (3\nu - 1)\lambda_3}{\nu\lambda_1 + (1 - \nu)\lambda_3}; \quad l_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}; \quad (2.83)$$

$$l_2 = \frac{1 + \nu + (\nu - 2)\lambda_1}{2\nu\lambda_3}; \quad d_1 = 1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}; \quad d_2 = \frac{2\nu(\lambda_1 + \lambda_3)}{\nu\lambda_1 + (1 - \nu)\lambda_3}; \quad C_{44} = \frac{2\mu\lambda_3}{\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_3)};$$

( $\nu = \lambda/(2(\lambda + \mu))$  – коэффициент Пуассона);

материал с потенциалом Бартенева – Хазановича (2.48) (несжимаемое тело, случай равных корней)

$$\lambda_3 = \lambda_1^{-2}; \quad n_1 = n_2 = \lambda_1^{-3}; \quad n_3 = 2\lambda_1^{-6}(\lambda_1^{-3} + 1)^{-1}; \quad m_1 = \lambda_1^{-3}; \quad m_2 = 1;$$

$$l_1 = \lambda_1^3; \quad l_2 = (1 - \lambda_1^3)/2; \quad d_1 = \lambda_1^{-3} + 1; \quad d_2 = 1; \quad C_{44} = 2\mu\lambda_1^{-2}(1 + \lambda_1^3)^{-1}, \quad (2.84)$$

материал с потенциалом Трелоара (2.49) (несжимаемое тело, случай неравных корней)

$$\lambda_3 = \lambda_1^{-2}; \quad n_1 = \lambda_1^{-6}; \quad n_2 = 1; \quad n_3 = \lambda_1^{-6}; \quad m_1 = \lambda_1^{-6}; \quad m_2 = 1;$$

$$l_1 = \frac{2\lambda_1^6}{1 + \lambda_1^6}; \quad l_2 = \frac{1}{2}(1 + \lambda_1^6); \quad d_1 = 1 + \lambda_1^{-6}; \quad d_2 = 2; \quad C_{44} = 2c_{10}\lambda_1^{-4}; \quad (2.85)$$

композитные материалы, которые моделируются трансверсально-изотропным телом, (2.52) – (2.54)

$$n_{1,2} = \frac{1}{2}(\mu_{13} + \sigma_{11}^0)^{-1}(A_{11} + \sigma_{11}^0)^{-1}\{(A_{11}A_{33} + \sigma_{11}^0A_{33} + \sigma_{11}^0\mu_{13} - 2A_{13}\mu_{13} - A_{13}^2) \pm$$

$$\pm \sqrt{(A_{11}A_{33} + \sigma_{11}^0A_{33} + \sigma_{11}^0\mu_{13} - 2A_{13}\mu_{13} - A_{13}^2)^2 - 4(A_{11} + \sigma_{11}^0)(\mu_{13} + \sigma_{11}^0)\mu_{13}A_{33}}\};$$

$$n_3 = \mu_{13}(\mu_{12} + \sigma_{11}^0)^{-1}; \quad m_j = [(A_{11} + \sigma_{11}^0)n_j - \mu_{13}](A_{13} + \mu_{13})^{-1}; \quad d_j = 1 + m_j; \quad (2.86)$$

$$l_j = [n_j(A_{11}A_{33} + \sigma_{11}^0A_{33} - A_{13}^2 - A_{13}\mu_{13}) - A_{33}\mu_{13}][n_j(A_{11} + \sigma_{11}^0) + A_{13}]^{-1}n_j^{-1}\mu_{13}^{-1};$$

$$C_{44} = \mu_{13} (j = 1, 2)$$

$$\begin{aligned} (A_{11} = E_1(1 - \nu_{13}\nu_{31})A^{-1}; \quad A_{13} = E_1\nu_{31}(1 + \nu_{12})A^{-1}; \quad A_{33} = E_3(1 - \nu_{12}^2)A^{-1}; \quad \mu_{12} = G_{12}; \\ \mu_{13} = G_{13}; \quad A = 1 - \nu_{12}^2 - 2\nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{12}\nu_{13}\nu_{31}; \quad \sigma_{11}^0 = E_1(\lambda_1 - 1)(1 - \nu_{12})^{-1}G_{13}^{-1}). \end{aligned}$$

**2.4. Постановка пространственных линеаризованных задач механики разрушения материалов при действии усилий вдоль трещин и общие методы их решения.** Формулировка задач проводится в координатах начального напряженно-деформированного состояния  $y_j$ ,  $j = \overline{1,3}$ , которые связаны с декартовыми координатами недеформированного состояния соотношениями (2.61). Трещины, как и в классической механике разрушения [135], моделируются математическими разрезами нулевой толщины.

Рассматриваются два класса задач: об определении и исследовании напряженно-деформированного состояния предварительно напряженного упругого тела с трещинами, когда начальные напряжения  $S_0^{11} = S_0^{22}$  действуют параллельно плоскостям расположения трещин (рис. 8, а) и об определении критических параметров разрушения материала с параллельными трещинами в условиях сжатия усилиями, направленными вдоль трещин (рис. 8, б).

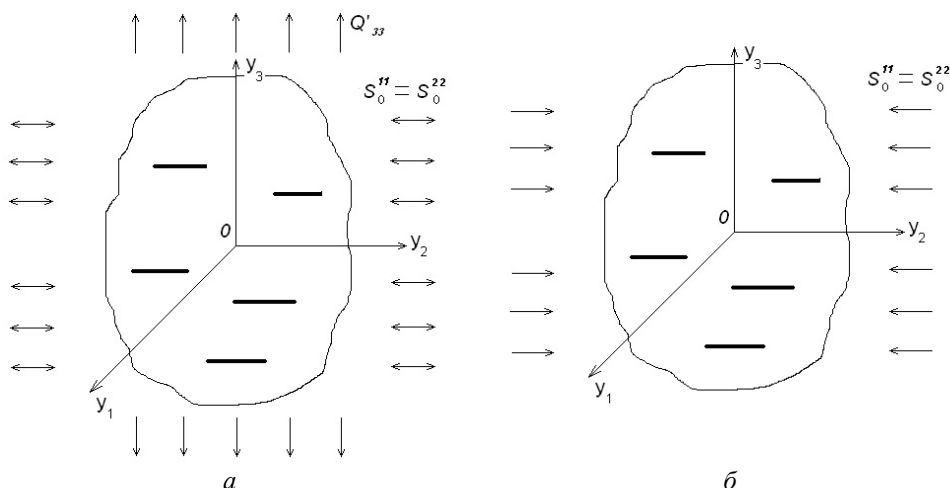


Рис. 8

Общая постановка задач сводится к следующему. Рассматриваются упругие изотропные материалы с произвольной формой упругого потенциала или композиционные материалы с упругими компонентами, содержащие систему трещин, расположенных в параллельных плоскостях  $y_3 = \text{const}$ . В случае композиционного материала предполагается, что размеры трещин существенно больше, чем размеры структурных элементов композита, и исследуются только процессы разрушения, при которых не проявляются свойства композита как кусочно-однородной среды. При таких предположениях можно применять континуальную модель композита с приведенными характеристиками трансверсально-изотропного тела, плоскости изотропии которого параллельны плоскостями расположения трещин (см. п. 2.2).

Начальные нормальные напряжения действуют вдоль плоскостей, в которых расположены трещины; на плоскостях, в которых расположены трещины, начальные напряжения отсутствуют. В этом случае в материале возникает однородное начальное напряженно-деформированное состояние, которое характеризуется соотношениями (2.62), (2.71). При приложении к телу дополнительных (по отношению к начальному напряженно-деформированному состоянию) усилий (на рис. 8, а для примера приведены

нормальные напряжения  $Q'_{33}$ ) возмущения напряженно-деформированного состояния, вызванные действием указанных дополнительных нагрузок, предполагаются значительно меньшими, чем соответствующие величины начального напряженно-деформированного состояния, что позволяет применять для решения поставленных задач соотношения ТЛМДТ.

Таким образом, в точной постановке необходимо решать линейризованные уравнения равновесия в перемещениях (2.67), (2.68). Граничные условия на берегах трещин в общем случае имеют вид

$$Q'_{3j} = P'_j; \quad y_k \in S_1, \quad (2.87)$$

где через  $S_1$  обозначены области тела, занимаемые трещинами. При этом для задач сжатия вдоль трещин в граничных условиях (2.87) следует положить  $P'_j \equiv 0$ . Эти условия необходимо дополнить граничными условиями в напряжениях и/или перемещениях на поверхности материала (для ограниченных тел) и условиями регулярности (затухания) полей напряжений и перемещений на бесконечности (для неограниченных тел). Общая, приведенная выше, постановка задачи уточняется в каждом конкретном случае согласно схеме силовой нагрузки и геометрического расположения трещин в материале.

Исследование поставленных пространственных линейризованных задач будут проводиться согласно следующей методике. Граничные условия задач, сформулированные первоначально в напряжениях и перемещениях, с помощью общих представлений решений линейризованных уравнений равновесия в виде (2.77), (2.80) переформулируются в граничные задачи для неизвестных потенциальных гармонических функций ( $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  – для неравных и  $\varphi, F, \Phi, \varphi_3$  – для равных корней характеристического уравнения). Далее неизвестные потенциальные гармонические функции для неосесимметричных задач представляются в виде рядов Фурье по окружной координате с коэффициентами в виде интегральных преобразований Ханкеля по радиальной координате соответствующего гармонике порядку, а в случае осесимметричных задач – в виде интегральных преобразований Ханкеля по радиальной координате нулевого порядка. При этом граничные условия, заданные на всей плоскости  $y_3 = \text{const}$ , позволяют сократить количество неизвестных функций, входящих в интегральные преобразования Ханкеля, на число указанных условий. Оставшиеся граничные условия приводят к системе парных интегральных уравнений относительно неизвестных функций, входящих в интегральные преобразования Ханкеля.

Следующий этап заключается в решении системы парных интегральных уравнений методом подстановки [50], согласно которому парные уравнения приводятся к интегральным уравнениям Шлемильха. Решения интегральных уравнений Шлемильха приводят к замкнутому решению задачи в терминах потенциальных функций (для изолированных трещин в неограниченном теле) или к разрешающим неоднородным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода (для взаимодействующих трещин). Вся указанная процедура реализуется отдельно для случаев равных и неравных корней характеристического уравнения.

Используя полученные решения для потенциальных гармонических функций, можно получить распределение напряжений и перемещений в материале и на основе анализа асимптотического распределения напряжений в окрестности контура трещины получить выражения для коэффициентов интенсивности напряжений и величин раскрытия трещин. При этом значения коэффициентов интенсивности напряжений, как и в классической механике разрушения без начальных напряжений [135], определяются как коэффициенты при сингулярностях в распределении компонент напряжений в окрестности контура трещины

$$K_I = \lim_{r_1 \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r_1} Q'_{33}; \quad K_{II} = \lim_{r_1 \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r_1} Q'_{3r}; \quad K_{III} = \lim_{r_1 \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r_1} Q'_{3\theta}, \quad (2.88)$$

где  $r_1$  – расстояние от кончика трещины.

Согласно описанному в п. 1.4. объединенному подходу к исследованию задач механики разрушения материалов с начальными напряжениями и задач о сжатии тел усилиями, направленными вдоль плоскостей трещин, критические параметры сжатия, соответствующие локальной потере устойчивости материала в окрестности трещины, определяются из численного решения вышеупомянутых неоднородных линейризованных задач механики разрушения тел с начальными напряжениями как значения начальных сжимающих напряжений, при приближении к которым происходит резкое «резонансоподобное» изменение основных параметров напряженно-деформированного состояния в окрестности трещины, в частности, значений коэффициентов интенсивности напряжений. При этом, соответственно, отпадает необходимость проводить дополнительные исследования задач на собственные значения в рамках трехмерной линейризованной теории устойчивости.

Общность приведенной выше постановки линейризованных задач применительно к различным моделям материалов определяется следующими моментами [24, 28]. Начальное напряженно-деформированное состояние является статически определенным однородным. Общие решения линейризованных уравнений равновесия (2.77), (2.80) при однородных начальных состояниях формально представляются в единой форме для различных моделей материалов (сжимаемых и несжимаемых высокоэластических материалов с произвольным видом упругого потенциала, композитных материалов). При этом входящие в представления общих решений коэффициенты определяются выбором модели материала, и необходимую конкретизацию применительно к выбранной модели материала следует проводить лишь на заключительной стадии исследования – при решении получаемых в общем виде разрешающих уравнений. Отметим, что исследования для высокоэластических тел будут проводиться в рамках теории конечных (больших) начальных деформаций, а исследования для композитов, в связи с их достаточной жесткостью, – в рамках второго варианта теории малых начальных деформаций, когда начальное напряженно-деформированное состояние определяется по геометрически линейной теории.

Таким образом, исследование линейризованных краевых задач механики разрушения материалов при наличии начальных (остаточных) напряжений, действующих параллельно плоскостям расположения трещин, и механики разрушения тел при сжатии усилиями, направленными вдоль трещин, для различных моделей материалов может проводиться в рамках единого общего подхода.

### 2.5. Критерии разрушения материалов при действии усилий вдоль трещин.

Ниже, основываясь на [23, 28, 34], приведем краткую информацию о критериях хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями, которые учитывают специфику влияния начальных (остаточных) напряжений, действующих вдоль трещин, на значения допустимых нагрузок и являются обобщениями энергетического критерия Гриффитса и силового критерия Ирвина, а также о критерии разрушения при сжатии тел усилиями, направленными параллельно плоскостям трещин.

*Критерии разрушения тел с начальными напряжениями, действующими вдоль трещин.* Для определения критических нагрузок для тел с начальными напряжениями в [23, 28, 87, 88] предложен энергетический критерий разрушения, который соответствует энергетическому критерию разрушения материалов без начальных напряжений Гриффитса [80] с применением формул Ирвина [130], и силовой критерий, который соответствует силовому критерию разрушения материалов без начальных напряжений Ирвина [131].

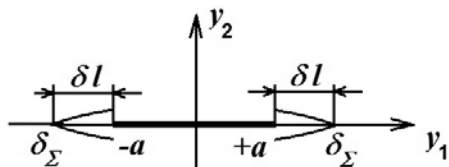


Рис. 9

Рассмотрим трещину, расположенную в плоскости  $y_1 O y_3$  ( $y_j, j = \overline{1,3}$  – декартовы координаты начального состояния, вызванного действием начальных напряжений), которая занимает область ( $|y_1| < a, y_2 = 0, -\infty < y_3 < +\infty$ ) (рис. 9). В соответствии с энергетическим критерием [80], разрушение начинается, когда выполняется условие

$$\delta U_0 + \delta A_{\delta\Sigma}^{(e)} = 0, \quad (2.89)$$



где  $\delta\Sigma = 2\delta l$  – изменение площади поверхности трещины, отнесенное к единице длины вдоль оси  $Oy_3$ ;  $U_0$  – внутренняя энергия, которая определяется поверхностной энергией;  $\delta A_{\delta\Sigma}^{(e)}$  – поток энергии в вершину трещины, связанный с уменьшением потенциальной энергии деформации при продвижении трещины на величину  $\delta l$  (величины  $U_0$  и  $\delta A_{\delta\Sigma}^{(e)}$  отнесены к единице длины вдоль оси  $Oy_3$ ).

При этом для изменения величины поверхностной энергии принимается следующее выражение:

$$\delta U_0 = \gamma d\Sigma = 2\delta l,$$

где  $\gamma$  – удельная плотность поверхностной энергии. Отметим, что в классической механике разрушения материалов без начальных напряжений обычно принимается [53, 80], что  $\gamma = \text{const}$ . В механике хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями следует, по-видимому, полагать, что в общем случае величина  $\gamma$  зависит от начальных напряжений.

Величина потока энергии в вершину трещины  $\delta A_{\delta\Sigma}^{(e)}$  определяется напряжениями, которые приложены вдоль воображаемого продолжения трещины. Например, в случае одноосного растяжения на бесконечности вдоль оси  $Oy_2$  будем иметь [23, 28]

$$\delta A_{\delta\Sigma}^{(e)} = - \int_0^{\delta l} (Q'_{22}u_2 + Q'_{21}u_1 + Q'_{23}u_3) dx,$$

где  $Q'_{ij}$ ,  $u_j$  определяются начальными и дополнительными нагрузками в результате решения линеаризованных задач. При этом на линии трещины

$$Q'_{22} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_1}} K_I; \quad Q'_{21} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_1}} K_{II}; \quad Q'_{23} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_1}} K_{III}, \quad (2.90)$$

где  $r_1$  – расстояние от кончика трещины;  $K_I, K_{II}, K_{III}$  – коэффициенты интенсивности напряжений, которые получаются из решения линеаризованных задач. Таким образом, критерий (2.89) связывается с величинами  $K_I, K_{II}, K_{III}$  и удельной плотностью поверхностной энергии  $\gamma$ . Ниже, с учетом (2.90) приведем вид критериального выражения (2.89) для некоторых типов материалов для рассматриваемой постановки задачи.

*Материал с потенциалом Бартенева – Хазановича* (несжимаемое тело, параметры определяются из (2.48), (2.84)). Для этого материала из (2.89), (2.90) получаем такой критерий разрушения [23, 28]:

$$(K_I^2 + \lambda_1^2 K_{II}^2) \frac{\lambda_1^2}{3\lambda_1^2 - 1} + K_{III}^2 \frac{1 + \lambda_1}{2\lambda_1} = 4\mu\gamma. \quad (2.91)$$

В случае отсутствия начальных напряжений ( $\lambda_1 = 1$ ) выражение (2.91) переходит в выражение:

$$K_I^2 + K_{II}^2 + 2K_{III}^2 = 8\mu\gamma, \quad (2.92)$$

которое полностью совпадает с классическим критерием разрушения Гриффитса – Ирвина для материалов без начальных напряжений [53], если положить  $\mu = E/3$  и учесть, что для несжимаемого тела  $\nu = 1/2$ .

*Материал с потенциалом Трелоара* (несжимаемое тело, параметры определяются из (2.49), (2.85)). Для этого материала имеем такое критериальное выражение [23, 28]:

$$(K_I^2 + \lambda_1^2 K_{II}^2) \frac{\lambda_1^2(\lambda_1^2 + 1)}{\lambda_1^6 + \lambda_1^4 + 3\lambda_1^2 - 1} + K_{III}^2 = 8c_{10}\gamma, \quad (2.93)$$

которое в случае отсутствия начальных напряжений переходит в критериальное выражение классической механики разрушения (2.92), если положить  $2c_{10} = \mu = E/3$ .

Для различных типов трещин силовые критерии разрушения материалов с начальными напряжениями в их простейшем варианте можно представить в виде [23, 28]:

$$K_I = K_{Ic}; \quad K_{II} = K_{IIc}; \quad K_{III} = K_{IIIc}, \quad (2.94)$$

где через  $K_{Ic}, K_{IIc}, K_{IIIc}$  обозначены коэффициенты вязкости разрушения (характеристики трещиностойкости) для материалов с начальными напряжениями, которые определяются из экспериментальных исследований и, в общем случае, должны зависеть от начальных напряжений.

*Критерий разрушения материалов при сжатии вдоль трещин.* В случае сжатия тел усилиями, направленными вдоль трещин, классические критерии разрушения Гриффитса – Ирвина являются неприменимыми (см. п. 1.3). В этом случае, согласно предложенному в [23, 33, 83, 84] критерию в рамках трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел, начало разрушения тела с трещинами связывается с локальной потерей устойчивости материала в окрестности контуров трещин.

Учитывая изложенное, применительно к рассматриваемому механизму разрушения в качестве теоретического предела прочности на сжатие принимаются напряжения (или укорочения вдоль координатных осей), соответствующие критическому значению сжимающей нагрузки и определяющие локальную потерю устойчивости состояния равновесия материала возле трещин [112].

### 3. Результаты исследования конкретных классов пространственных задач.

В настоящем разделе приводится информация о результатах, полученных изложенным в предыдущем разделе общим методом решения задач, применительно к конкретным классам пространственных задач механики разрушения материалов при действии направленных вдоль трещин усилий. Представлены результаты исследования неосесимметричных и осесимметричных пространственных задач для таких геометрических схем расположения трещин в материале: изолированная внутренняя невзаимодействующая трещина в неограниченном теле; внутренняя приповерхностная трещина, параллельная границе полупространства; две внутренние параллельные трещины в неограниченном теле; периодическая система внутренних параллельных соосных трещин в неограниченном теле.

На основании полученных решений выполнен анализ асимптотического распределения напряжений вблизи кончиков трещин и получены выражения коэффициентов интенсивности напряжений для отдельных моделей материалов – высокоэластических тел с упругими потенциалами Бартенева – Хазановича, Трелоара и гармонического типа, а также отдельных композитных материалов (слоистых композитов с изотропными слоями и композитов, армированных короткими волокнами эллипсоидальной формы). Основываясь на указанном в п. 1.4 объединенном подходе к исследованию задач механики разрушения при действии направленных вдоль трещин усилий, для отмеченных материалов определены значения критических параметров сжатия, при достижении которых происходит потеря устойчивости материала в областях, примыкающих к контурам трещин. Проанализированы механические эффекты, обусловленные влиянием начальных напряжений, геометрических параметров задач (радиусов трещин и расстояния между ними или между трещиной и поверхностью материала) и физико-механических характеристик материалов на коэффициенты интенсивности напряжений и критические параметры сжатия.

#### 3.1. Изолированная дискообразная трещина в неограниченном материале.

В настоящем пункте приводятся результаты исследования пространственных задач для бесконечного тела, содержащего одну плоскую круговую в плане трещину радиуса  $a$ . В теле действуют одинаковые начальные (остаточные) напряжения  $S_0^{11} = S_0^{22}$  вдоль осей  $Oy_1$  и  $Oy_2$  (рис. 10), реализующие однородное начальное напряженно-деформированное состояние вида ((2.62), (2.71) (здесь и в последующих пунктах исследования проводятся в лагранжевых координатах  $y_j$ ,  $j = \overline{1,3}$  начального напряженно-деформированного состояния и получаемых из них круговых цилиндрических координатах  $r, \theta, y_3$  или  $r, \theta, z_j$ , где  $z_j = n_j^{-1/2} y_3$ ,  $j = \overline{1,3}$ ).

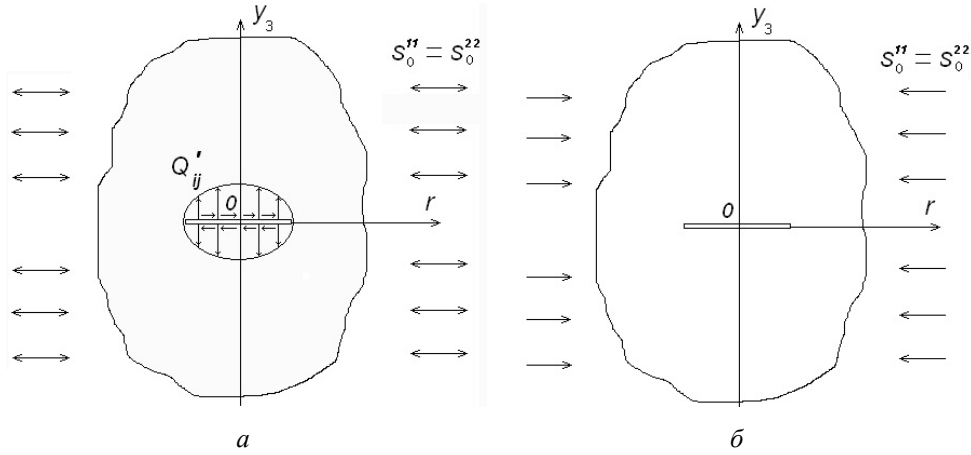


Рис. 10

Будем отдельно рассматривать неосесимметричные и осесимметричные задачи для трещин нормального отрыва (Mode I cracks) и сдвига (Mode II, Mode III cracks). В качестве примера более подробно изложена методика исследования неосесимметричной задачи для трещины нормального отрыва; исследования для других постановок задач проводятся аналогично.

*3.1.1. Неосесимметричная задача для трещины нормального отрыва.* Трещиной нормального отрыва, как и в механике разрушения материалов без начальных напряжений [53, 135], будем считать трещину, к берегам которой симметрично относительно плоскости  $y_3 = 0$  приложена нормальная нагрузка интенсивности  $\sigma(r, \theta)$ . В силу симметрии силовой и геометрической схем задачи для верхнего полупространства  $y_3 \geq 0$  на его границе  $y_3 = 0$  получают следующие граничные условия:

$$Q'_{33}(r, \theta, 0) = -\sigma(r, \theta); \quad Q'_{3r}(r, \theta, 0) = Q'_{3\theta}(r, \theta, 0) = 0 \quad (0 \leq r \leq a); \quad (3.1)$$

$$u_3(r, \theta, 0) = 0; \quad Q'_{3r}(r, \theta, 0) = Q'_{3\theta}(r, \theta, 0) = 0 \quad (a < r < \infty),$$

(здесь и далее  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ).

Заметим, что в случае задачи о сжатии неограниченного тела вдоль внутренней круговой трещины (рис. 10, б) граничные условия на берегах трещины (первая строка в (3.1)) имеют вид:

$$Q'_{33}(r, \theta, 0) = 0; \quad Q'_{3r}(r, \theta, 0) = Q'_{3\theta}(r, \theta, 0) = 0 \quad (0 \leq r \leq a).$$

Дальнейшее исследование выполняется раздельно для случаев равных и неравных корней характеристического уравнения (см. п. 2.3) в общем виде для сжимаемых и несжимаемых тел. Используя представление общих решений линеаризованных уравнений равновесия через гармонические потенциальные функции в виде (2.77), (2.80), граничные условия (3.1) переформулируются в терминах потенциальных функций. При этом учитывается, что согласно (3.1) компоненты тензора напряжений  $Q'_{3r}$ ,  $Q'_{3\theta}$  равны нулю во всей плоскости  $y_3 = 0$  ( $z_j = 0$ ,  $j = \overline{1, 3}$ ). Имеем:

для неравных корней

$$C_{44} \left( d_1 l_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} + d_2 l_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_2^2} \right) = -\sigma(r, \theta) \quad (r \leq a);$$

$$C_{44} \left( d_1 n_1^{-1/2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z_1} + d_2 n_2^{-1/2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z_2} - n_3^{-1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial z_3} \right) = 0 \quad (0 \leq r < \infty); \quad (3.2)$$

$$C_{44} \left( d_1 n_1^{-1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta \partial z_1} + d_2 n_2^{-1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta \partial z_2} + n_3^{-1/2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial z_3} \right) = 0 \quad (0 \leq r < \infty);$$

$$m_1 n_1^{-1/2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + m_2 n_2^{-1/2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2} = 0 \quad (r > a);$$

для равных корней

$$C_{44} \left[ (d_1 l_1 - d_2 l_2) \frac{\partial F}{\partial z_1} - d_1 l_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} \right] = -\sigma(r, \theta) \quad (r \leq a);$$

$$C_{44} \left\{ n_1^{-1/2} \frac{\partial}{\partial r} [(d_1 - d_2) F - d_1 \Phi] - n_3^{-1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \theta \partial z_3} \right\} = 0 \quad (0 \leq r < \infty); \quad (3.3)$$

$$C_{44} \left\{ n_1^{-1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [(d_1 - d_2) F - d_1 \Phi] + n_3^{-1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial z_3} \right\} = 0 \quad (0 \leq r < \infty);$$

$$(m_1 - m_2 + 1) n_1^{-1/2} F - m_1 n_1^{-1/2} \Phi = 0, \quad (r > a).$$

Дальнейшие выкладки будут приводиться только для случая неравных корней характеристического уравнения; в случае равных корней выкладки производятся аналогично.

Нормальная нагрузка на берегах трещины  $\sigma(r, \theta)$  представляется в виде ряда Фурье по окружной координате  $\theta$ :

$$\sigma(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_1^{(n)}(r) \cos n \theta; \quad \sigma_1^{(0)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sigma(r, \theta) d\theta; \quad \sigma_1^{(n)}(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sigma(r, \theta) \cos n \theta d\theta. \quad (3.4)$$

Отметим, что выражения (3.4) соответствуют случаю, когда функция  $\sigma(r, \theta)$  является четной по координате  $\theta$ . В случае, когда эта функция является нечетной по окружной координате, представление (3.4) следует заменить представлением

$$\sigma(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_2^{(n)}(r) \sin n \theta; \quad \sigma_2^{(n)}(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sigma(r, \theta) \sin n \theta d\theta; \quad (3.5)$$

в этом случае все последующие выкладки будут полностью аналогичными. В общем случае следует использовать суперпозицию представлений (3.4), (3.5).

Гармонические потенциальные функции  $\varphi_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , фигурирующие в (3.2), также представляются в виде рядов Фурье по координате  $\theta$  с коэффициентами в виде интегральных разложений Ханкеля по радиальной координате  $r$  порядка, соответствующего порядку гармонике по окружной координате:

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, \theta, z_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos n \theta \int_0^{\infty} A_n(\lambda) e^{-\lambda z_1} J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda}; \\ \varphi_2(r, \theta, z_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos n \theta \int_0^{\infty} B_n(\lambda) e^{-\lambda z_2} J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda}; \\ \varphi_3(r, \theta, z_3) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin n \theta \int_0^{\infty} C_n(\lambda) e^{-\lambda z_3} J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Следует отметить, что в представлении (3.6) учтено условие затухания возмущений напряжений и перемещений при удалении от трещины.

Подставив (3.6) во второе и третье уравнения в (3.2), заданные на всей плоскости  $y_3 = 0$ , получаем

$$A_n = -\frac{d_2 n_2^{-1/2}}{d_1 n_1^{-1/2}} B_n; \quad C_n = 0. \quad (3.7)$$

Из первого и четвертого уравнений в (3.2) с учетом (3.7) получаем соотношения

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \left[ D^{(1)} \int_0^{\infty} B_n(\lambda) J_n(\lambda r) \lambda d\lambda - \sigma_1^{(n)}(r) \right] = 0 \quad r \leq a;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta D^{(2)} \int_0^{\infty} B_n(\lambda) J_n(\lambda r) \lambda d\lambda = 0 \quad r > a \quad (3.8)$$

$$\left( D^{(1)} = C_{44} k d_2 \sqrt{n_1}; \quad D^{(2)} = d_2 n_2^{-1/2} (m_1 d_1^{-1} - m_2 d_2^{-1}); \right.$$

$$\left. k = k_1 - k_2; \quad k_1 = l_1 n_2^{-1/2}; \quad k_2 = l_2 n_1^{-1/2} \right). \quad (3.9)$$

Приравнявая нулю выражения при гармониках  $\cos n\theta$ , заключаем, что соотношения (3.8) распадаются на отдельные парные интегральные уравнения, соответствующие каждой  $n$ -й гармонике по переменной  $\theta$ :

$$D^{(1)} \int_0^{\infty} B_n(\lambda) J_n(\lambda r) \lambda d\lambda = \sigma_1^{(n)}(r), \quad r \leq a, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$D^{(2)} \int_0^{\infty} B_n(\lambda) J_n(\lambda r) \lambda d\lambda = 0, \quad r > a, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Систему парных интегральных уравнений (3.10) целесообразно решать методом подстановки [50], представляя неизвестные функции  $B_n(\lambda)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) в виде

$$B_n(\lambda) = \sqrt{\pi \lambda / 2} \int_0^a \sqrt{t} \omega_n(t) J_{n+1/2}(\lambda t) dt, \quad (3.11)$$

где  $\omega_n(t)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) – новые неизвестные функции, непрерывные вместе со своими первыми производными на отрезке  $[0, a]$ .

С учетом значения разрывного интеграла Вебера-Шафхейтлина

$$\int_0^{\infty} \sqrt{\lambda} J_n(\lambda r) J_{n+1/2}(\lambda t) d\lambda = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < r; \\ \frac{\sqrt{2} r^n}{\sqrt{\pi t^{n+1/2} \sqrt{t^2 - r^2}}}, & 0 \leq r < t \end{cases} \quad (3.12)$$

второе уравнение в (3.10) (справедливое для области  $r > a$ ) удовлетворяется тождественно.

Далее, подставляя выражение (3.11) в первое уравнение (3.10) и используя соотношения

$$\lambda J_n(\lambda r) = r^{-n-1} \frac{d}{dr} [r^{n+1} J_{n+1}(\lambda r)];$$

$$\int_0^{\infty} \sqrt{\lambda} J_{n+1}(\lambda r) J_{n+1/2}(\lambda t) d\lambda = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < t \\ \frac{\sqrt{2} t^{n+1/2}}{\sqrt{\pi} r^{n+1} \sqrt{r^2 - t^2}}, & 0 \leq t < r \end{cases}, \quad (3.13)$$

получаем уравнение

$$\frac{d}{dr} \int_0^r \frac{t^{n+1}}{\sqrt{r^2 - t^2}} \omega_n(t) dt = r^{n+1} \frac{\sigma_1^{(n)}(r)}{D^{(1)}}.$$

Интегрируя последнее уравнение по  $r$  от 0 до  $r$ , а также делая подстановку  $t = r \sin \theta$ , приходим к интегральному уравнению Шлемильха

$$\int_0^{\pi/2} r^{n+1} (\sin \theta)^{n+1} \omega_n(r \sin \theta) d\theta = \frac{1}{D^{(1)}} \int_0^r \rho^{n+1} \sigma_1^{(n)}(\rho) d\rho,$$

которое имеет решение [50]:

$$\omega_n(x) = \frac{2x}{\pi D^{(1)}} \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{n+1} \sigma_1^{(n)}(x \sin \theta) d\theta. \quad (3.14)$$

Подставив (3.14) в (3.11) с учетом (3.7), получаем такие выражения для функций  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ , фигурирующих в представлениях (3.6):

$$A_n(\lambda) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\lambda}}{C_{44} k d_1 \sqrt{n_2}} \int_0^a J_{n+1/2}(\lambda t) \frac{dt}{t^{n-1/2}} \int_0^t \frac{x^{n+1} \sigma_1^{(n)}(x) dx}{\sqrt{t^2 - x^2}};$$

$$B_n(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\lambda}}{C_{44} k d_2 \sqrt{n_1}} \int_0^a J_{n+1/2}(\lambda t) \frac{dt}{t^{n-1/2}} \int_0^t \frac{x^{n+1} \sigma_1^{(n)}(x) dx}{\sqrt{t^2 - x^2}}; \quad C_n(\lambda) = 0. \quad (3.15)$$

Используя выражения (3.15), из (3.6) можно определить значения потенциальных гармонических функций  $\varphi_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , и далее, из представлений (2.77) получить распределение компонент напряжений и перемещений в материале. Так, в плоскости  $y_3 = 0$  получаем

$$Q'_{33}(r, \theta, 0) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^a \left\{ \int_0^t \frac{x^{n+1}}{\sqrt{t^2 - x^2}} \sigma_1^{(n)}(x) dx \right\} t^{-n+1/2} J_{n+1/2}(\lambda t) dt \left\{ \lambda^{3/2} J_n(\lambda r) d\lambda \right\};$$

$$Q'_{3r}(r, \theta, 0) = 0; \quad Q'_{3\theta}(r, \theta, 0) = 0; \quad (3.16)$$

$$u_3(r, \theta, 0) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n_1^{-1/2} n_2^{-1/2} (m_1 - m_2)}{C_{44} d_1 d_2 k} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^a \left\{ \int_0^t \frac{x^{n+1}}{\sqrt{t^2 - x^2}} \sigma_1^{(n)}(x) dx \right\} t^{-n+1/2} J_{n+1/2}(\lambda t) dt \left\{ \lambda^{1/2} J_n(\lambda r) d\lambda \right\};$$

$$u_r(r, \theta, 0) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d_1 n_1^{-1/2} - d_2 n_2^{-1/2}}{C_{44} d_1 d_2 k} \frac{\partial}{\partial r} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^a \left\{ \int_0^t \frac{x^{n+1}}{\sqrt{t^2 - x^2}} \sigma_1^{(n)}(x) dx \right\} t^{-n+1/2} J_{n+1/2}(\lambda t) dt \left\{ \lambda^{1/2} J_n(\lambda r) d\lambda \right\};$$

$$u_\theta(r, \theta, 0) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d_1 n_1^{\frac{1}{2}} - d_2 n_2^{\frac{1}{2}}}{C_{44} d_1 d_2 k} \sum_{n=0}^{\infty} \sin n\theta \frac{n}{r} \int_0^a \int_0^t \frac{x^{n+1}}{\sqrt{t^2 - x^2}} \sigma_1^{(n)}(x) dx \left[ t^{-n+\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{n+\frac{1}{2}}}(\lambda t) dt \right] \lambda^{\frac{1}{2}} J_n(\lambda r) d\lambda.$$

Проведя аналогичные выкладки для случая равных корней, получим такие значения компонент тензора напряжений и вектора перемещений в плоскости  $y_3 = 0$ :

$$Q'_{33}(r, \theta, 0) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^a \int_0^t \frac{x^{n+1}}{\sqrt{t^2 - x^2}} \sigma_1^{(n)}(x) dx \left[ t^{-n+\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{n+\frac{1}{2}}}(\lambda t) dt \right] \lambda^{3/2} J_n(\lambda r) d\lambda;$$

$$Q'_{3r}(r, \theta, 0) = 0; \quad Q'_{3\theta}(r, \theta, 0) = 0; \quad (3.17)$$

$$u_3(r, \theta, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n_1^{\frac{1}{2}} (2m_1 - m_2 + 1)}{C_{44} d_1 d_2 (l_1 - l_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^a \int_0^t \frac{x^{n+1}}{\sqrt{t^2 - x^2}} \sigma_1^{(n)}(x) dx \left[ t^{-n+\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{n+\frac{1}{2}}}(\lambda t) dt \right] \lambda^{\frac{1}{2}} J_n(\lambda r) d\lambda;$$

$$u_r(r, \theta, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m_1 - m_2}{C_{44} d_1 d_2 (l_1 - l_2)} \frac{\partial}{\partial r} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^a \int_0^t \frac{x^{n+1}}{\sqrt{t^2 - x^2}} \sigma_1^{(n)}(x) dx \left[ t^{-n+\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{n+\frac{1}{2}}}(\lambda t) dt \right] \lambda^{\frac{1}{2}} J_n(\lambda r) d\lambda;$$

$$u_\theta(r, \theta, 0) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m_1 - m_2}{C_{44} d_1 d_2 (l_1 - l_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \sin n\theta \frac{n}{r} \int_0^a \int_0^t \frac{x^{n+1}}{\sqrt{t^2 - x^2}} \sigma_1^{(n)}(x) dx \left[ t^{-n+\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{n+\frac{1}{2}}}(\lambda t) dt \right] \lambda^{\frac{1}{2}} J_n(\lambda r) d\lambda.$$

Как видим из выражений (3.16), (3.17), значения компонент тензора напряжений в плоскости расположения трещины для случаев неравных и равных корней характеристического уравнения совпадают и не зависят от начальных напряжений. В тоже время компоненты вектора перемещений для случаев неравных и равных корней отличны и зависят от начальных напряжений, поскольку параметры материала  $C_{44}$ ,  $k$ ,  $d_i$ ,  $l_i$ ,  $n_i$  ( $i = 1, 2$ ) зависят от коэффициента начального удлинения (укорочения)  $\lambda_1$ .

Сравнивая выражения для компонент вектора перемещений в (3.16), (3.17) с соответствующими выражениями работы [135, с. 10 – 11] для линейно-упругого тела без начальных напряжений, можем представить указанные компоненты при  $y_3 = 0$  в виде:

$$u_3(r, \theta, 0) = K^{(3)} u_3^{(0)}(r, \theta, 0); \quad u_r(r, \theta, 0) = K^{(r)} u_r^{(0)}(r, \theta, 0); \quad u_\theta(r, \theta, 0) = K^{(\theta)} u_\theta^{(0)}(r, \theta, 0), \quad (3.18)$$

где  $u_3(r, \theta, 0)$ ,  $u_r(r, \theta, 0)$ ,  $u_\theta(r, \theta, 0)$  – компоненты вектора перемещений в упругом теле с начальными напряжениями;  $u_3^{(0)}(r, \theta, 0)$ ,  $u_r^{(0)}(r, \theta, 0)$ ,  $u_\theta^{(0)}(r, \theta, 0)$  – соответствующие компоненты вектора перемещений в линейно-упругом теле без начальных напряжений;  $K^{(3)}$ ,  $K^{(r)}$ ,  $K^{(\theta)}$  – коэффициенты, характеризующие влияние начальных напряжений. При этом имеем:

для неравных корней

$$K^{(3)} = 2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{d_1 - d_2}{C_{44} d_1 d_2 (l_1 \sqrt{n_1} - l_2 \sqrt{n_2})}; \quad K^{(r)} = K^{(\theta)} = 2(\lambda + \mu) \frac{d_1 \sqrt{n_2} - d_2 \sqrt{n_1}}{C_{44} d_1 d_2 (l_1 \sqrt{n_1} - l_2 \sqrt{n_2})}; \quad (3.19)$$

для равных корней

$$K^{(3)} = 2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{2d_1 - d_2}{C_{44}d_1d_2\sqrt{n_1}(l_1 - l_2)}; \quad K^{(r)} = K^{(\theta)} = 2(\lambda + \mu) \frac{d_1 - d_2}{C_{44}d_1d_2(l_1 - l_2)}. \quad (3.20)$$

Рассмотрим асимптотическое распределение напряжений и перемещений вблизи края трещины в плоскости ее расположения  $y_3 = 0$ . Введем следующие обозначения:

$$r = a + r_1; \quad r_1 > 0; \quad r_1 \ll a; \quad r = a - r_2; \quad r_2 > 0; \quad r_2 \ll a. \quad (3.21)$$

Из первого соотношения (3.16), используя формулу  $\lambda J_{n+1/2}(\lambda t) = -t^{n-1/2} \times \frac{d}{dt} [t^{-n+1/2} J_{n-1/2}(\lambda t)]$ , разрывный интеграл (3.13) и произведя интегрирование по частям, с учетом первого соотношения (3.21) получаем выражение:

$$Q'_{33}(r, \theta, 0) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{r_1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{a^{n+1/2}} \int_0^a \frac{x^{n+1} \sigma_1^{(n)}(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + O(r_1^0), \quad (3.22)$$

где под  $O(r_1^0)$  обозначены слагаемые, которые не имеют особенностей при  $r_1 \rightarrow 0$ .

Тогда из формул для коэффициентов интенсивности напряжений (2.88) с учетом (3.22), а также второго и третьего соотношений в (3.16) получаем

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{a^{n+1/2}} \int_0^a \frac{x^{n+1} \sigma_1^{(n)}(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx; \quad K_{II} = 0; \quad K_{III} = 0, \quad (3.23)$$

где коэффициенты Фурье  $\sigma_1^{(n)}(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) определяются через нормальную нагрузку, приложенную к берегам трещины, из второго и третьего соотношения в (3.4). Из первого, второго и третьего соотношений в (3.17) видим, что КИН для случая равных корней также выражаются соотношениями (3.23).

Таким образом, для неосесимметричной задачи о круговой трещине нормального отрыва в неограниченном предварительно напряженном теле значения коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности края трещины не зависят от начальных напряжений и полностью совпадают (с учетом обозначений) со значениями, полученными при решении неосесимметричной задачи о круговой трещине нормального отрыва в линейно-упругом теле без начальных напряжений (см. формулу (1.44) в [135]).

Отметим, что в случае, когда нагрузка на берегах трещины  $\sigma(r, \theta)$  является нечетной функцией по координате  $\theta$ , следует использовать ее представление в виде ряда Фурье (3.5). В этом случае, произведя аналогичные выкладки, получим такие выражение для КИН:

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{a^{n+1/2}} \int_0^a \frac{x^{n+1} \sigma_2^{(n)}(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx; \quad K_{II} = 0; \quad K_{III} = 0. \quad (3.24)$$

В общем случае произвольной нормальной нагрузки на берегах трещины  $\sigma(r, \theta)$  значения КИН представляются в виде

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi}a} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\cos n\theta}{a^n} \int_0^a \frac{x^{n+1} \sigma_1^{(n)}(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + \frac{\sin n\theta}{a^n} \int_0^a \frac{x^{n+1} \sigma_2^{(n)}(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \right]; \quad K_{II} = 0; \quad K_{III} = 0. \quad (3.25)$$

Далее определим раскрытие берегов трещины вблизи ее края при  $y_3 = 0$ . С учетом (3.18), (3.19) имеем для случая неравных корней

$$\delta = 2u_3(r_2, \theta, 0) = 2K^{(3)}u_3^{(0)} = 2\sqrt{\frac{r_2}{2\pi}} K_I \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} K^{(3)} = 2\sqrt{\frac{r_2}{2\pi}} K_I K, \quad (3.26)$$



$$\left( K = \frac{d_1 - d_2}{C_{44} d_1 d_2 (l_1 \sqrt{n_1} - l_2 \sqrt{n_2})} = \frac{m_1 - m_2}{C_{44} (1 + m_1)(1 + m_2)(l_1 \sqrt{n_1} - l_2 \sqrt{n_2})} \right). \quad (3.27)$$

Аналогично, из (3.18), (3.20) для случая равных корней имеем значение раскрытия берегов трещины вблизи ее края при  $y_3 = 0$  в виде (3.26), где коэффициент  $K$ , характеризующий влияние начальных напряжений определяется выражением

$$K = \frac{2d_1 - d_2}{C_{44} d_1 d_2 \sqrt{n_1} (l_1 - l_2)} = \frac{1 + 2m_1 - m_2}{C_{44} (1 + m_1)(1 + m_2) \sqrt{n_1} (l_1 - l_2)}. \quad (3.28)$$

Таким образом, как следует из (3.26) – (3.28), раскрытие берегов трещины нормального отрыва в материале с начальными напряжениями, в отличие от коэффициентов интенсивности напряжений, существенно зависит от начальных напряжений. Проанализируем эту зависимость на примере высокоэластических материалов с конкретными видами упругих потенциалов.

*Материал с потенциалом Трелоара* (несжимаемое тело, случай неравных корней) [146]. Параметры, входящие в (3.27) для этого потенциала определяются из (2.85). Подставляя эти параметры в (3.27), получим

$$K = \frac{\lambda_1^4 (\lambda_1^3 + 1)}{2c_{10} (\lambda_1^9 + \lambda_1^6 + 3\lambda_1^3 - 1)}. \quad (3.29)$$

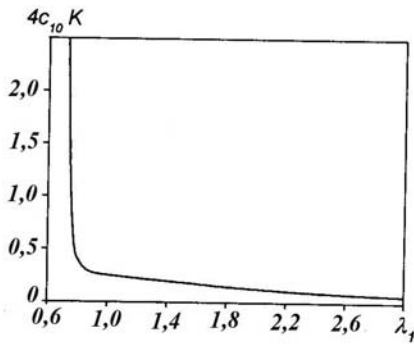


Рис. 11

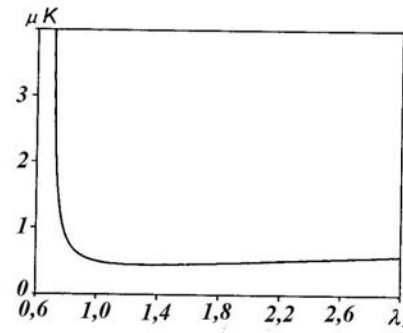


Рис. 12

На рис. 11 приведен график зависимости величины  $4c_{10}K$  от  $\lambda_1$  для этого потенциала. Как видно из рисунка, кривая имеет вертикальную асимптоту, соответствующую стремлению к «бесконечности» значения  $K$  (и, соответственно, резкому «резонансоподобному» увеличению раскрытия берегов трещины  $\delta = 2u_3(r_2, \pi, 0)$ ) при достижении параметром начального укорочения значения  $\lambda_1^* = 0,666$ , при котором выражение, заключенное в скобки в знаменателе (3.29), обращается в ноль, т.е. когда выполняется условие

$$\lambda_1^9 + \lambda_1^6 + 3\lambda_1^3 - 1 = 0. \quad (3.30)$$

В соответствии с подходом, описанным в п. 1.4, указанное явление «резонансного» характера определяет критическое значение параметра  $\lambda_1$ , соответствующее локальной потере устойчивости (по симметричной форме) при сжатии неограниченного упругого тела с потенциалом Трелоара усилиями, направленными вдоль изолированной дискообразной трещины. Действительно, критическое значение  $\lambda_1^* = 0,666$  соответствует значению, полученному в [33] при решении пространственной неосесимметричной задачи механики разрушения о сжатии вдоль внутренней круговой трещины для материала с потенциалом Трелоара. Отметим также, что значение  $\lambda_1^* = 0,666$  соответствует поверхностной неустойчивости тела с потенциалом Трелоара [23, 24].

Материал с потенциалом Бартенева – Хазановича (несжимаемое тело, случай равных корней) [3]. Параметры, входящие в (3.28) для этого потенциала определяются из (2.84). Подставляя эти параметры в (3.28), получим

$$K = \frac{\lambda_1^{7/2}}{\mu(3\lambda_1^3 - 1)}. \quad (3.31)$$

График зависимости  $\mu K$  от  $\lambda_1$  для этого материала приведен на рис. 12. Из (3.31) следует, что  $K$  обращается в бесконечность, когда параметр начального укорочения достигает критического значения

$$\lambda_1^* = \sqrt[3]{1/3} \approx 0,693, \quad (3.32)$$

соответствующего локальной потери устойчивости материала с потенциалом Бартенева – Хазановича при сжатии тела вдоль внутренней круговой трещины [33] и поверхностной неустойчивости указанного материала.

3.1.2. *Общая неосесимметричная задача для трещины сдвига.* К трещине радиуса  $a$ , размещенной в плоскости  $y_3 = 0$ , приложены касательные усилия антисимметрично относительно плоскости расположения трещины (рис. 4). С учетом симметрии задачи, для верхнего полупространства  $y_3 \geq 0$  на его границе  $y_3 = 0$  получают следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} Q'_{33}(r, \theta, 0) = 0; \quad Q'_{3r}(r, \theta, 0) = q_1(r, \theta); \quad Q'_{3\theta}(r, \theta, 0) = q_2(r, \theta) \quad (0 \leq r \leq a); \\ u_r(r, \theta, 0) = u_\theta(r, \theta, 0) = 0; \quad Q'_{33}(r, \theta, 0) = 0 \quad (a < r < \infty), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Предполагаем, что правые части в граничных условиях (3.33) можно представить в виде рядов Фурье

$$q_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{(n)}(r) \cos n\theta; \quad q_2(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b^{(n)}(r) \sin n\theta. \quad (3.34)$$

С использованием процедуры, аналогичной примененной в предыдущем подпункте, для данной задачи получаются такие выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестностях кончиков трещины [28]:

$$\begin{aligned} K_I = 0; \quad K_{II} = -\frac{2}{\sqrt{\pi a}} \frac{1}{a} \int_0^a a^{(0)}(r) \frac{r^2 dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \mu_1 \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_1(a) - \Phi_2(a)] \cos n\theta; \\ K_{III} = -\frac{2}{\sqrt{\pi a}} \mu_1 \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} [(1 - \nu_1) \Phi_1(a) + \Phi_2(a)] \sin n\theta. \end{aligned} \quad (3.35)$$

В (3.35) функции  $\Phi_1(a)$ ,  $\Phi_2(a)$  определяются из выражений:

$$\Phi_1(t) = -\frac{t^{-n+3/2}}{(2-\nu_1)\mu_1\sqrt{2\pi}} \int_0^t [a^{(n)}(x) - b^{(n)}(x)] \frac{x^n dx}{\sqrt{t^2 - x^2}}; \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(t) = \frac{\nu_1}{2} \Phi_1(t) + \\ + \frac{t^{-n-3/2}}{2\mu_1\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{(1+2n)\nu_1}{2-\nu_1} \int_0^t x^n [a^{(n)}(x) - b^{(n)}(x)] \sqrt{t^2 - x^2} dx + \int_0^t [a^{(n)}(x) + b^{(n)}(x)] \frac{x^n dx}{\sqrt{t^2 - x^2}} \right\}. \end{aligned}$$

Параметры  $\mu_1$ ,  $\nu_1$ , входящие в (3.35), (3.36), зависят от начальных напряжений и определяются из выражений:

для неравных корней

$$2\mu_1 = C_{44} \frac{l_2\sqrt{n_2} - l_1\sqrt{n_1}}{l_1 l_2 \sqrt{n_1 n_2}}; \quad \nu_1 = 1 - \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_3}} \frac{l_2(1+m_2) - l_1(1+m_1)}{(l_2\sqrt{n_2} - l_1\sqrt{n_1})(1+m_1)(1+m_2)};$$

$$\text{для равных корней } 2\mu_1 = C_{44} \frac{l_2 - l_1}{l_1 l_2 \sqrt{n_1}}, \quad \nu_1 = 1 - \sqrt{\frac{n_1}{n_3}} \frac{l_2(1+m_2) - l_1(1+m_1)}{(l_2 - l_1)(1+m_1)(1+m_2)}.$$

Таким образом, в пространственной неосесимметричной задаче о трещине сдвига коэффициенты интенсивности напряжений поперечного  $K_{II}$  и продольного  $K_{III}$  сдвигов зависят от начальных напряжений. В этом проявляется отличие неосесимметричной задачи о трещине сдвига от неосесимметричной задачи о трещине нормального отрыва, для которой КИН не зависят от начальных напряжений.

Характер указанной зависимости КИН от начальных напряжений для сжимаемого изотропного материала с упругим потенциалом гармонического типа (сжимаемое тело, случай равных корней) [132] продемонстрирован в п. 1.4 на рис. 5; там же приведены соответствующие комментарии, в том числе, о наблюдаемых явлениях «резонансного» характера при стремлении начальных напряжений к значениям, соответствующим локальной потере устойчивости (по изгибной форме) при сжатии неограниченного тела с круговой трещиной.

3.1.3. Осесимметричная задача о трещине нормального отрыва. Граничные условия данной задачи имеют вид:

$$Q'_{33}(r, 0) = -\sigma(r); \quad Q'_{3r}(r, 0) = 0 \quad (0 \leq r \leq a); \quad (3.37)$$

$$u_3(r, 0) = 0; \quad Q'_{3r}(r, 0) = 0 \quad (a < r < \infty).$$

Решение данной задачи можно получить как частный случай решения неосесимметричной задачи о трещине нормального отрыва (подпункт 3.1.1) при  $n = 0$ . Так, из (3.25) с учетом второго соотношения в (3.4) получаем выражения для коэффициентов интенсивности напряжений

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{x\sigma(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx; \quad K_{II} = 0; \quad K_{III} = 0, \quad (3.38)$$

которые при принятых обозначениях полностью совпадают с соответствующими коэффициентами интенсивности напряжений в теле без начальных напряжений [135]. Из (3.38) следует, что как и в неосесимметричной задаче о трещине нормального отрыва в предварительно напряженном теле, в данной осесимметричной задаче распределение напряжений в материале в плоскости трещины  $y_3 = 0$  вблизи ее края не зависит от начальных напряжений и полностью совпадает с соответствующим распределением в линейно-упругом теле без начальных напряжений.

Компоненты вектора перемещений при  $y_3 = 0$  представляются в виде

$$u_3(r, 0) = K^{(3)} u_3^{(0)}(r, 0); \quad u_r(r, 0) = K^{(r)} u_r^{(0)}(r, 0), \quad (3.39)$$

где  $u_3^{(0)}(r, 0)$ ,  $u_r^{(0)}(r, 0)$  – соответствующие компоненты вектора перемещений в линейно-упругом теле без начальных напряжений, а коэффициенты  $K^{(3)}$  и  $K^{(r)}$ , характеризующие влияние начальных напряжений, определяются соотношениями (3.19) для неравных корней и (3.20) для равных корней. Раскрытие берегов трещины вблизи ее края при  $y_3 = 0$ ,  $r_2 = a - r$  имеет вид

$$\delta = 2\sqrt{\frac{r_2}{2\pi}} K_I K, \quad (3.40)$$

где КИН  $K_I$  определяется из (3.38), а значения коэффициента  $K$  имеет вид (3.27) – для случая неравных корней и (3.28) для случая равных корней.

Выводы о влиянии начальных напряжений на распределение перемещений у края трещины и о явлениях «резонансного» характера при стремлении начальных напряжений к значениям, соответствующим локальной потере устойчивости материала при сжатии вдоль трещины, в данной осесимметричной задаче полностью совпадают с таковыми для неосесимметричной задачи о трещине нормального отрыва (подпункт 3.1.1).

*3.1.4. Осесимметричная задача о трещине радиального сдвига.* Под трещиной радиального сдвига, как и в механике хрупкого разрушения материалов без начальных напряжений [53, 135], понимается трещина, к берегам которой антисимметрично относительно плоскости ее расположения приложена радиальная касательная нагрузка. В силу указанной симметрии для верхнего полупространства  $y_3 \geq 0$  на его границе  $y_3 = 0$  получают следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} Q'_{33}(r, 0) = 0; \quad Q'_{3r}(r, 0) = -\tau(r) \quad (0 \leq r \leq a); \\ u_3(r, 0) = 0; \quad Q'_{3r}(r, 0) = 0 \quad (a < r < \infty). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Решение этой задачи подробно изложено, например, в [23, 28]. Так, коэффициенты интенсивности напряжений для данной задачи имеют вид

$$K_I = 0; \quad K_{II} = \frac{2}{\sqrt{\pi a^{3/2}}} \int_0^a \frac{x^2 \tau(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx; \quad K_{III} = 0 \quad (3.42)$$

и при принятых обозначениях полностью совпадают с соответствующими коэффициентами интенсивности напряжений в теле без начальных напряжений [135]. Как следует из (3.42), распределение напряжений в предварительно напряженном материале в плоскости расположения трещины радиального сдвига вблизи ее края не зависит от начальных напряжений и полностью совпадает с соответствующим распределением в линейно-упругом теле без начальных напряжений.

Компоненты вектора перемещений при  $y_3 = 0$  представляются в виде

$$u_3(r, 0) = K^{(3)} u_3^{(0)}(r, 0); \quad u_r(r, 0) = K^{(r)} u_r^{(0)}(r, 0), \quad (3.43)$$

где  $u_3^{(0)}(r, 0)$ ,  $u_r^{(0)}(r, 0)$  – соответствующие компоненты вектора перемещений в линейно-упругом теле без начальных напряжений, а коэффициенты  $K^{(3)}$  и  $K^{(r)}$ , характеризующие влияние начальных напряжений, определяются соотношениями:

*для неравных корней*

$$K^{(3)} = 2(\lambda + \mu) \frac{m_1 \sqrt{n_2} l_2 d_2 - m_2 \sqrt{n_1} l_1 d_1}{C_{44} d_1 d_2 (l_1 \sqrt{n_1} - l_2 \sqrt{n_2})}; \quad K^{(r)} = 2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\sqrt{n_1 n_2} (d_1 l_1 - d_2 l_2)}{C_{44} d_1 d_2 (l_1 \sqrt{n_1} - l_2 \sqrt{n_2})}; \quad (3.44)$$

*для равных корней*

$$K^{(3)} = 2(\lambda + \mu) \frac{m_1 l_2 d_2 - (m_1 - 1) l_1 d_1}{C_{44} d_1 d_2 \sqrt{n_1} (l_1 - l_2)}; \quad K^{(r)} = 2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{(d_1 l_1 - d_2 l_2) \sqrt{n_1}}{C_{44} d_1 d_2 (l_1 - l_2)}. \quad (3.45)$$

*Материал с потенциалом Трелоара.* Для этого материала имеем:

$$K^{(3)} = \frac{\lambda + \mu}{c_{10}} \frac{\lambda_1^4 (1 - \lambda_1^3)}{\lambda_1^9 + \lambda_1^6 + 3\lambda_1^3 - 1}; \quad K^{(r)} = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{c_{10}(\lambda + 2\mu)} \frac{\lambda_1^4 (1 + \lambda_1^3)}{\lambda_1^9 + \lambda_1^6 + 3\lambda_1^3 - 1}. \quad (3.46)$$

Из (3.46) следует, что величины  $K^{(3)}$ ,  $K^{(r)}$  обращаются в бесконечность и, соответственно, перемещения «резонансоподобно» увеличиваются, когда параметр начального укорочения достигает критического значения  $\lambda_1^* = 0,666$ , при котором вы-

полняется условие (3.30). Как было указано в подпункте 3.1.1, это значение параметра  $\lambda_1$  соответствует локальной потере устойчивости материала в области, охватывающей внутреннюю круговую трещину, при сжатии вдоль трещины.

*Материал с потенциалом Бартенева – Хазановича.* Для этого материала имеем

$$K^{(3)} = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\lambda_1^2 (1 - \lambda_1^3)}{3\lambda_1^3 - 1}; \quad K^{(r)} = 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\lambda_1^{13/2}}{3\lambda_1^3 - 1}. \quad (3.47)$$

Из (3.47) следует, что величины  $K^{(3)}$ ,  $K^{(r)}$  обращаются в бесконечность и, соответственно, перемещения «резонансоподобно» увеличиваются, когда параметр начального укорочения достигает критического значения (3.32), соответствующего локальной потере устойчивости материала с потенциалом Бартенева – Хазановича при сжатии тела вдоль внутренней круговой и поверхностной неустойчивости указанного материала.

Таким образом, выводы о влиянии начальных напряжений на распределение перемещений у края трещины и о явлениях «резонансного» характера при стремлении начальных напряжений к значениям, соответствующим локальной потере устойчивости материала при сжатии вдоль трещины, в данной задаче о трещине радиального сдвига полностью совпадают с таковыми для задачи о трещине нормального отрыва.

*3.1.5. Задача о кручении.* К поверхности трещины приложена антисимметрично относительно плоскости ее расположения касательная окружная нагрузка, вследствие чего для верхнего полупространства  $y_3 \geq 0$  на его границе  $y_3 = 0$  получают следующие граничные условия:

$$Q'_{3\theta}(r, 0) = -\tau_\theta(r) \quad (0 \leq r \leq a); \quad u_\theta(r, 0) = 0 \quad (a < r < \infty). \quad (3.48)$$

Решение этой задачи получено в [23, 28]. Так, коэффициенты интенсивности напряжений для данной задачи имеют вид:

$$K_I = 0; \quad K_{II} = 0; \quad K_{III} = \frac{2}{\sqrt{\pi} a^{3/2}} \int_0^a \frac{x^2 \tau_\theta(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (3.49)$$

и при принятых обозначениях полностью совпадают с соответствующими коэффициентами интенсивности напряжений в теле без начальных напряжений [135]. Как следует из (3.49), распределение напряжений в предварительно напряженном материале в плоскости расположения трещины при кручении не зависит от начальных напряжений и полностью совпадает с соответствующим распределением в линейно-упругом теле без начальных напряжений.

Перемещение при  $y_3 = 0$  представляется в виде

$$u_\theta(r, 0) = K^{(\theta)} u_\theta^{(0)}(r, 0); \quad K^{(\theta)} = \mu \frac{\sqrt{n_3}}{C_{44}}. \quad (3.50)$$

Учитывая (2.78), (2.79), можно показать [23, 28], что значение  $K^{(\theta)}$ , определяемое из (3.50), не может обратиться в бесконечность в рассматриваемых пределах изменения начальных напряжений (до появления внутренней неустойчивости материала). Таким образом, для трещины в пространственной задаче кручения эффекты «резонансного» характера отсутствуют и, следовательно, отсутствуют формы потери устойчивости при сжатии вдоль трещины, соответствующие трещине кручения.

*3.1.6. Выводы.* На основании приведенных в этом разделе результатов исследования задач для изолированных трещин в неограниченном материале с начальными (остаточными) напряжениями можно сделать следующие основные выводы:

для всех рассмотренных постановок задач в случае «свободных» трещин (т. е. трещин, на берегах которых заданы только напряжения), кроме общей неосесимметричной задачи о трещине сдвига, установлено, что коэффициенты интенсивности напряжений не зависят от начальных напряжений и полностью совпадают с выражениями для КИН, получаемыми в рамках классической механики хрупкого разрушения материалов без начальных напряжений. В то же время влияние начальных напряже-

ний на распределение напряженно-деформированного состояния возле трещин проявляется в существенной зависимости от них величин раскрытия трещин;

при рассмотрении общей неосесимметричной задачи о дискообразной трещине сдвига установлено, что коэффициенты интенсивности напряжений поперечного  $K_{II}$  и продольного  $K_{III}$  сдвигов даже в случае «свободной» трещины зависят от начальных напряжений;

при стремлении начальных сжимающих напряжений к величинам, соответствующим поверхностной неустойчивости полупространства, для трещин нормального отрыва и радиального сдвига вблизи кончика трещины проявляются эффекты «резонансного» характера, заключающиеся в резком изменении части напряжений и перемещений. Для трещины в задаче кручения указанные эффекты «резонансного» характера отсутствуют.

**3.2. Приповерхностная круговая трещина в полупространстве.** Рассматривается упругое тело, занимающее полупространство  $y_3 \geq -h$  с начальными напряжениями  $S_0^{11} = S_0^{22}$ , действующими вдоль приповерхностной трещины радиуса  $a$ , расположенной в плоскости  $y_3 = 0$  с центром на оси  $Oy_3$ :  $\{0 \leq r < a, 0 \leq \theta < 2\pi, y_3 = 0\}$  (рис. 13).

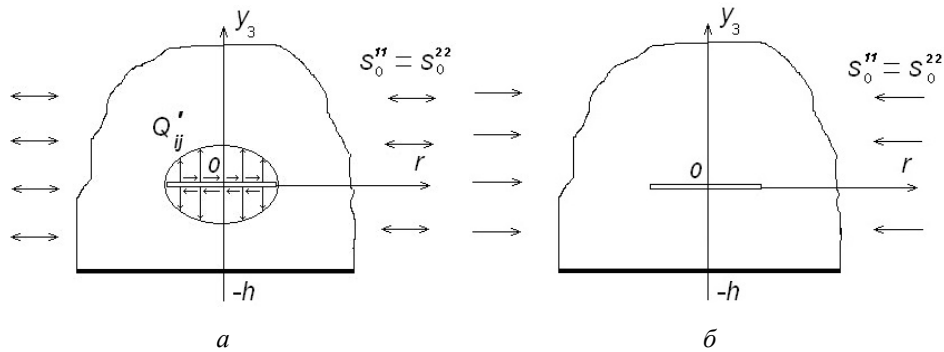


Рис. 13

Результаты приводятся отдельно для общей неосесимметричной задачи и осесимметричных задач в случаях трещин нормального отрыва (Mode I cracks) и сдвига (Mode II, Mode III cracks). Решения указанных задач приведены в [2, 5, 38, 60 – 63, 66, 123, 139]

**3.2.1. Общая неосесимметричная задача** [63]. На берегах трещины заданы дополнительные (по отношению к начальным напряжениям) поля нормальных растягивающих и сдвиговых усилий, а граница полупространства свободна от усилий (рис. 13, а). Граничные условия задачи имеют вид

$$Q'_{33} = -\sigma(r, \theta); \quad Q'_{3r} = -\tau(r, \theta); \quad Q'_{3\theta} = -\tau_\theta(r, \theta) \quad (0 \leq r < a, y_3 = \pm 0); \quad (3.51)$$

$$Q'_{33} = 0; \quad Q'_{3r} = 0; \quad Q'_{3\theta} = 0 \quad (0 \leq r < \infty, y_3 = -h)$$

(здесь и в дальнейшем  $0 \leq \theta < 2\pi$ ).

Отметим, что в случае задачи о сжатии полупространства вдоль приповерхностной трещины (рис. 13 б) граничные условия на берегах трещины (первая строка в (3.51)) имеют вид

$$Q'_{33} = 0; \quad Q'_{3r} = 0; \quad Q'_{3\theta} = 0 \quad (0 \leq r < a, y_3 = \pm 0).$$

Дальнейшие выкладки будут приводиться только для случая равных корней характеристического уравнения; в случае неравных корней выкладки производятся аналогично. Правые части в граничных условиях (3.51) представляются в виде рядов Фурье по окружной координате  $\theta$

$$\sigma(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^{(n)}(r) \cos n\theta; \quad \tau(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{(n)}(r) \cos n\theta; \quad \tau_{\theta}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{\theta}^{(n)}(r) \sin n\theta. \quad (3.52)$$

Используя представления общих решений линеаризованных уравнений равновесия через гармоничные потенциальные функции в виде (2.80), а также представляя указанные потенциальные функции в ряды Фурье по окружной координате с коэффициентами в виде интегральных разложений Ханкеля по радиальной координате, сводим поставленную задачу отдельно для каждой гармоники по координате  $\theta$  к шести парным интегральным уравнениям (более подробно см. в [63])

$$\int_0^{\infty} \left\{ n_1^{-1/2} d_1 \left[ \mu_1 A_n^{(1)} + (k + \mu_1 \operatorname{cth} \mu_1) A_n^{(2)} \right] - n_3^{-1/2} C_n^{(1)} \right\} J_{n+1}(\lambda r) \lambda d\lambda = -\frac{1}{C_{44}} \left[ \tau^{(n)}(r) + \tau_{\theta}^{(n)}(r) \right],$$

$$r < a;$$

$$\int_0^{\infty} \left\{ n_1^{-1/2} d_1 \left[ \mu_1 A_n^{(1)} + (k + \mu_1 \operatorname{cth} \mu_1) A_n^{(2)} \right] + n_3^{-1/2} C_n^{(1)} \right\} J_{n-1}(\lambda r) \lambda d\lambda = \frac{1}{C_{44}} \left[ \tau^{(n)}(r) - \tau_{\theta}^{(n)}(r) \right],$$

$$r < a;$$

$$\int_0^{\infty} \left[ (k - \mu_1 \operatorname{cth} \mu_1) A_n^{(1)} - \mu_1 A_n^{(2)} \right] J_n(\lambda r) \lambda d\lambda = -\frac{\sigma^{(n)}(r)}{C_{44} d_1 l_1}, \quad r < a; \quad (3.53)$$

$$\int_0^{\infty} X_1 J_{n+1}(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > a; \quad \int_0^{\infty} X_2 J_{n-1}(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > a; \quad \int_0^{\infty} X_3 J_n(\lambda r) d\lambda = 0,$$

$$r > a$$

$$\left( X_1 = (1 - (d_2 l_2)/(d_1 l_1))(1 + \operatorname{cth} \mu_1) \left[ (\mu_1/k) A_n^{(1)} + (1 + \mu_1/k) A_n^{(2)} \right] - C_n^{(1)} (1 + \operatorname{cth} \mu_3); \right.$$

$$X_2 = (1 - (d_2 l_2)/(d_1 l_1))(1 + \operatorname{cth} \mu_1) \left[ \mu_1/k A_n^{(1)} + (1 + \mu_1/k) A_n^{(2)} \right] + C_n^{(1)} (1 + \operatorname{cth} \mu_3); \quad (3.54)$$

$$X_3 = 2(1 - (d_2 l_2)/(d_1 l_1)) \left[ (1 - \mu_1/k) A_n^{(1)} - \mu_1/k A_n^{(2)} \right] (1 + \operatorname{cth} \mu_1); \quad \mu_1 = \lambda n_1^{-1/2} h;$$

$$k = ((l_1 - l_2) d_2)/(d_1 l_1).$$

В дальнейшем предполагается, что  $n \geq 1$ , поскольку осесимметричный случай  $n = 0$  является особым (для него количество парных уравнений сокращается до четырех) и этот случай рассматривается в последующих подпунктах.

Используя метод подстановки [50], систему парных уравнений (3.53) сводим к разрешающей системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\frac{1}{2}(sk + q) f_1(\xi) + \frac{1}{2}(sk - q) f_2(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_1(\eta) K_{11}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_2(\eta) K_{12}(\xi, \eta) d\eta +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_3(\eta) K_{13}(\xi, \eta) d\eta = \frac{4}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} v'_1(\xi \sin \theta) d\theta; \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1;$$

$$\frac{1}{2}(sk - q) f_1(\xi) + \frac{1}{2}(sk + q) f_2(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_1(\eta) K_{21}(\xi, \mu) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_2(\eta) K_{22}(\xi, \eta) d\eta +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_3(\eta) K_{23}(\xi, \eta) d\eta = \frac{4}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} v'_2(\xi \sin \theta) d\theta, \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1; \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \operatorname{sk} f_3(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_1(\eta) K_{31}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_2(\eta) K_{32}(\xi, \eta) d\eta + \\
& + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_3(\eta) K_{33}(\xi, \eta) d\eta = -\frac{4}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} u'(\xi \sin \theta) d\theta, \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \\
\left( v_1(\xi) = \frac{1}{C_{44}} \xi^{2n} \int_0^\xi \rho^{-n} [\tau^{(n)}(a\rho) + \tau_\theta^{(n)}(a\rho)] d\rho; \quad v_2(\xi) = \frac{1}{C_{44}} \int_0^\xi \rho^n [\tau^{(n)}(a\rho) - \tau_\theta^{(n)}(a\rho)]; \right. \\
& \left. u(\xi) = \frac{n_1^{-1/2}}{C_{44} l_1} \xi^n \sigma^{(n)}(a\xi); \quad s = n_1^{-1/2} d_1 (1 - (d_2 l_2)/(d_1 l_1))^{-1}; \quad q = n_3^{-1/2} \right). \tag{3.56}
\end{aligned}$$

Ядра интегральных уравнений (3.55) имеют вид

$$\begin{aligned}
& K_{12}(\xi, \eta) = \\
& = \operatorname{sk} n b_1 \frac{\xi^{n-1}}{\eta^{n+1}} S_n(z_{11}) + \frac{s}{2k} n b_1^3 \frac{\xi^{n-2}}{\eta^{n+2} (z_{11}^2 - 1)} \left\{ \left[ \left( \frac{8}{z_{11}^2 - 1} + n(n-1) + 6 \right) \frac{b_1^2}{\xi \eta} - 6z_{11} \right] S_n(z_{11}) + \right. \\
& \quad \left. + (n-1) \left[ 3(z_{11}^2 - 1) - \frac{4b_1^2 z_{11}}{\xi \eta} \right] P_n(z_{11}) \right\} - \\
& \quad - \operatorname{sn} b_1 \frac{\xi^{n-2}}{\eta^{n+2}} \left[ \left( \xi \eta - \frac{2b_1^2 z_{11}}{z_{11}^2 - 1} \right) S_n(z_{11}) + b_1^2 (n-1) P_n(z_{11}) \right] - q n b_3 \frac{\xi^{n-1}}{\eta^{n+1}} S_n(z_{13}) + \\
& \quad + \sqrt{\pi} \xi^{2n} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} \left\{ \operatorname{sk} R_n(b_1, \eta) + \frac{s}{k} B(b_1, \eta) (n+1) [2(n+2) B(b_1, \eta) - 3] R_n(b_1, \eta) + \right. \\
& \quad \left. + s [1 - 2(n+1) B(b_1, \eta)] R_n(b_1, \eta) - q R_n(b_3, \eta) \right\} \text{ и т.д.}
\end{aligned}$$

$$(b_j = 2n_j^{-1/2} \beta \quad (j = 1, 3); \quad \beta = h/a; \quad z_{11} = (b_1^2 + \eta^2 + \xi^2)/2\xi\eta; \quad z_{21} = (b_1^2 + 1 + \xi^2)/2\xi);$$

$$B(b, t) = b^2/(b^2 + t^2); \quad R_n(b, t) = b/2(b^2 + t^2)^{n+1}; \quad S_n(z) = (z^2 - 1)/4[Q_n(z) - zQ_{n-1}(z)];$$

$$P_n(z) = ((z^2 - 1)^{-1}/4)Q_{n-1}(z); \quad Q_n(z) \text{ функции Лежандра второго рода}.$$

Из решения системы интегральных уравнений (3.55) можно получить выражения для потенциальных функций, входящих в представления (2.80), и, следовательно, получить распределение напряжений и перемещений в материале. Анализируя асимптотическое распределение напряжений в плоскости расположения трещины  $y_3 = 0$ , с учетом выражений (2.88), получаем такие значения коэффициентов интенсивности напряжений рассматриваемой неосесимметричной задачи:

$$\begin{aligned}
K_I &= -\frac{1}{4} C_{44} l_1 \sqrt{n_1} \operatorname{sk} \sqrt{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \int_0^1 f_3(\eta) d\eta; \quad K_{II} = \frac{1}{4} C_{44} \operatorname{sk} \sqrt{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta [f_1(1) + f_2(1)]; \\
K_{III} &= \frac{1}{4} C_{44} q \sqrt{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta [f_1(1) - f_2(1)], \tag{3.57}
\end{aligned}$$

где функции  $f_1(\xi)$ ,  $f_2(\xi)$ ,  $f_3(\xi)$  определяются из решения системы (3.55).



Из (3.57) следует, что взаимное влияние трещины и свободной поверхности материала приводит к качественным изменениям в асимптотическом распределении напряжений возле кончика трещины по сравнению со случаем изолированной трещины в неограниченном материале. А именно, это приводит к ненулевым значениям коэффициентов интенсивности напряжений  $K_{II}$  и  $K_{III}$  при нагружении приповерхностной трещины только нормальными растягивающими усилиями (т.е., когда  $\sigma(r, \theta) \neq 0$ ,  $\tau(r, \theta) = 0$ ,  $\tau_\theta(r, \theta) = 0$ ) (для изолированной трещины нормального отрыва в неограниченном теле имели (см. п.3.1.1)  $K_I \neq 0$ ,  $K_{II} = 0$ ,  $K_{III} = 0$ ) и ненулевых значений  $K_I$  в случае, когда на берегах трещины действуют только касательные усилия ( $\sigma(r, \theta) = 0$ ,  $\tau(r, \theta) \neq 0$ ,  $\tau_\theta(r, \theta) \neq 0$ ) (для такой силовой схемы в случае изолированной трещины в неограниченном теле имели (см. п. 3.1.2)  $K_I = 0$ ,  $K_{II} \neq 0$ ,  $K_{III} \neq 0$ ).

Кроме того, из (3.57) следует, что все три коэффициента интенсивности напряжений зависят от начальных напряжений, поскольку параметры  $C_{44}$ ,  $s$ ,  $q$ ,  $k$ ,  $k_i$ ,  $l_i$ ,  $n_i$ ,  $i = 1, 2$ , входящие в выражения (3.57) и в интегральные уравнения Фредгольма (3.55), зависят от параметра начального удлинения (или укорочения)  $\lambda_1$ , обусловленного действием начальных напряжений  $S_0^{11} = S_0^{22}$ .

Рассмотрим предельный случай расположения трещины, когда расстояние между ней и границей полупространства стремится к бесконечности  $h \rightarrow \infty$  ( $\beta \rightarrow \infty$ ). Из анализа выражений для ядер интегральных уравнений Фредгольма (3.55) следует, что  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} K_{ij}(\xi, \eta) = 0$ .

Ограничимся случаем, когда трещина нагружена нормальными усилиями  $\lambda_1 = 1$  ( $\tau(r, \theta) = 0$ ,  $\tau_\theta(r, \theta) = 0$ ). Тогда из (3.55) имеем

$$f_1^\infty(\xi) = f_2^\infty(\xi) = 0; \quad \frac{1}{2} sk f_3^\infty(\xi) = -\frac{4}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} u'(\xi \sin \theta) d\theta; \quad f_j^\infty(\xi) \equiv \lim_{\beta \rightarrow \infty} f_j(\xi).$$

Вводя замену переменных  $\eta = \xi \sin \theta$ , получаем

$$\begin{aligned} f_3^\infty(\xi) &= -\frac{8}{\pi} \frac{1}{sk} \xi \int_0^{\pi/2} u'(\xi \sin \theta) d\theta = \\ &= -\frac{8}{\pi} \frac{n_1^{-1/2}}{C_{44} l_1} \xi \int_0^\xi \frac{d}{d\eta} [\eta^n a_n(a\eta)] \frac{d\eta}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} = -\frac{8}{\pi} \frac{1}{sk} \frac{n_1^{-1/2}}{C_{44} l_1} \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{\eta^{n+1} a_n(a\eta)}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} d\eta. \end{aligned}$$

Тогда из (3.57) получаем

$$\begin{aligned} K_I^\infty &\equiv \lim_{\beta \rightarrow \infty} K_I = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^1 \frac{\eta^{n+1} \sigma(a\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{a^n} \int_0^a \frac{t^{n+1} \sigma(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt; \\ K_{II}^\infty &= 0; \quad K_{III}^\infty = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при бесконечном удалении трещины от свободной поверхности материала в пределе получаем значения КИН, которые полностью совпадают со значениями, полученными в неосесимметричной задаче о разрушении неограниченного тела с начальными напряжениями, ослабленного изолированной дискообразной трещиной (п. 3.1.1, формулы (3.23)).

Ниже приведены результаты численного расчета для некоторых высокоэластических материалов [63]. Результаты даны для случая загрузки берегов трещины нормальной растягивающей нагрузкой вида

$$\sigma(r, \theta) = \sigma_1 \cos \theta. \quad (3.58)$$

Материал с потенциалом гармонического типа. На рис. 14, 15 и 16 приведены, соответственно, зависимости отношений коэффициентов интенсивности напряжений  $K_I/K_I^\infty$ ,  $K_{II}/K_I^\infty$  и  $K_{III}/K_I^\infty$  от параметра  $\lambda_1$  для разных значений относительного расстояния между трещиной и границей полупространства  $\beta = h/a$  для значения коэффициента Пуассона  $\nu = 0,3$ . При этом  $K_I^\infty$  – КИН, получаемый в неосесимметричной задаче о трещине нормального отрыва в бесконечном теле и определяемый из выражения (3.23) с учетом (3.58), а именно:

$$K_I^\infty = \frac{1}{2} \sqrt{\pi a} \sigma_1 \cos \theta.$$

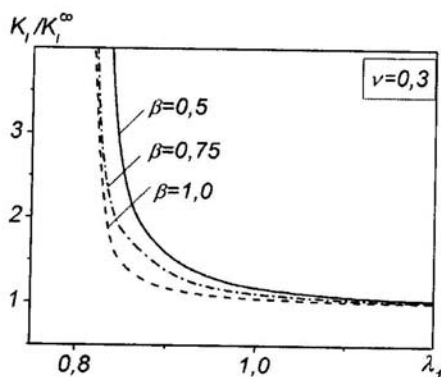


Рис. 14

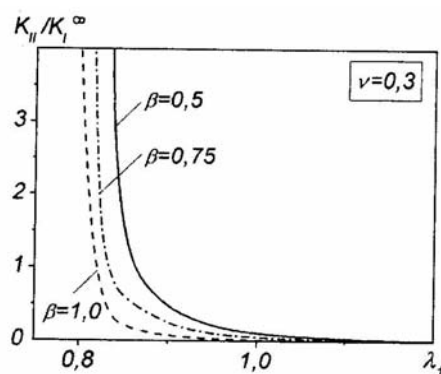


Рис. 15

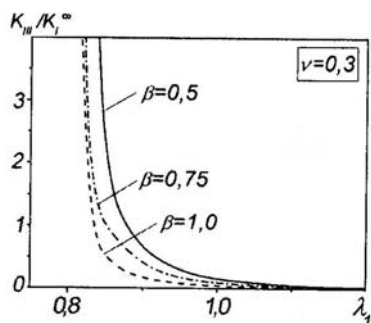


Рис. 16

Как следует из рисунков, коэффициенты интенсивности напряжений существенно зависят от начальных напряжений, причем влияние сжимающих начальных напряжений выше, чем растягивающих. Кривые имеют вертикальные асимптоты, соответствующее эффекту «резонансного» характера, имеющему место при достижении начальными сжимающими напряжениями значений, при которых происходит локальная потеря устойчивости материала в окрестности приповерхностной трещины (по симметричной относительно плоскости расположения трещины форме).

На рис. 17 для этого же материала приведена зависимость соотношения  $K_I/K_I^\infty$  от безразмерного расстояния между трещиной и границей полупространства  $\beta = h/a$

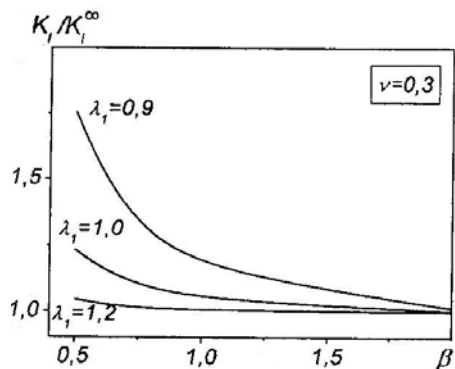


Рис. 17

при  $\nu = 0,3$ . Зависимости приведены для значений  $\lambda_1 = 0,9$  (начальное сжатие),  $\lambda_1 = 1,2$  (начальное растяжение) и  $\lambda_1 = 1,0$  (начальные напряжения отсутствуют). Видим, что взаимодействие трещины и свободной границы тела существенно возрастает при уменьшении расстояния между ними. Так, например, для  $\lambda_1 = 0,9$  значение  $K_I/K_I^\infty$  при  $\beta = 0,5$  превышает соответствующее значение  $K_I/K_I^\infty$  при  $\beta = 2,0$  в 1,7 раза. С другой стороны, при возрастании расстояния между трещиной и границей полупростран-

ства указанное взаимное влияние быстро ослабевает, а соответствующие значения КИН стремятся к значениям, получаемым для изолированной трещины в бесконечном теле. С точностью, приемлемой для практических расчетов, взаимовлиянием между трещиной и свободной поверхностью можно пренебрегать при расстоянии между ними, превышающем 2 радиуса трещины.

Рис. 18 иллюстрирует зависимость  $K_I / K_I^\infty$  от параметра начальных напряжений  $\lambda_1$  для разных значений коэффициента Пуассона  $\nu$  при  $\beta = 0,5$ . Как видно из рисунка, сжимаемость материала с потенциалом гармонического типа, характеризуемая коэффициентом Пуассона, заметно влияет на значения КИН. Например, при  $\lambda_1 = 0,95$ ,  $\beta = 0,5$  значение  $K_I / K_I^\infty$  для  $\nu = 0,5$  превышает значение  $K_I / K_I^\infty$  для  $\nu = 0,1$  на 12%, а при  $\lambda_1 = 0,9$ ,  $\beta = 0,5$  указанные величины отличаются в 2,2 раза.

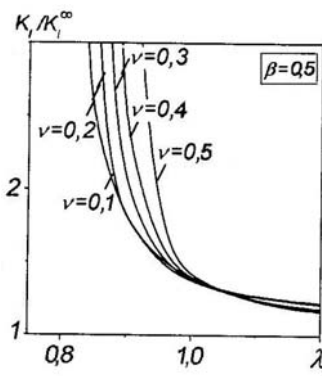


Рис. 18

Материал с потенциалом Бартенева – Хазановича. На рис. 19 для этого материала приведена зависимость  $K_I / K_I^0$  ( $K_I^0$  – коэффициент интенсивности напряжений для трещины нормального отрыва при отсутствии начальных напряжений), а на рис. 20, а, б, соответственно, зависимости  $K_I / K_I^\infty$  и  $K_{III} / K_I^\infty$  от параметра  $\lambda_1$  для разных значений относительного расстояния между трещиной и свободной границей  $\beta = h/a$ . Как видно из рисунков, для этого потенциала коэффициенты интенсивности напряжений также существенно зависят от начальных напряжений и геометрических параметров задачи (расстояния между трещиной и границей и радиуса трещины). Приведенные на рис. 19, 20 кривые имеют вертикальные асимптоты, которые соответствуют резкому возрастанию КИН при достижении начальными сжимающими напряжениями значений, соответствующих потере устойчивости материала в локальной области возле трещины при сжатии вдоль трещины.

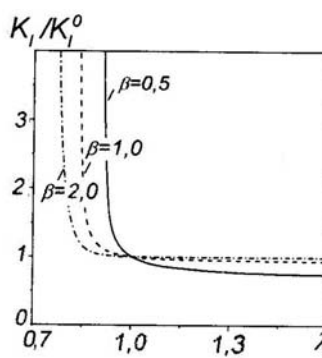
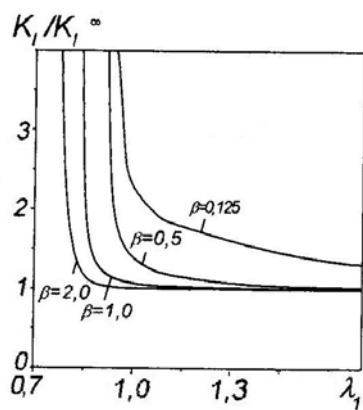
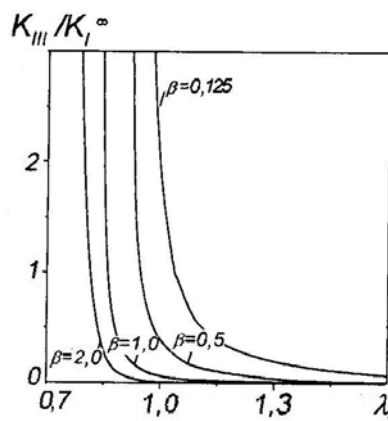


Рис. 19



а



б

Рис. 20

3.2.2. *Оссимметричная задача о трещине нормального отрыва* [2, 5, 61, 123]. На берегах трещины симметрично относительно плоскости ее расположения  $y_3 = 0$  приложены нормальные напряжения интенсивности  $\sigma(r)$ . Значения коэффициентов интенсивности напряжений, получаемых в этой задаче, для случая равных корней имеют вид

$$K_I = -C_{44}d_1I_1 \frac{k}{2} \sqrt{\pi a} f(1); \quad K_{II} = -C_{44}n_1^{-1/2}d_1 \frac{k}{2} \sqrt{\pi a} \int_0^1 g(\xi) d\xi; \quad K_{III} = 0, \quad (3.59)$$

где функции  $f$  и  $g$  определяются из решения системы интегральных уравнений Фредгольма:

$$f(\xi) + \frac{4}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) K_{11}(\xi, \eta) d\eta - \frac{4}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) K_{12}(\xi, \eta) d\eta = -\frac{4}{\pi k} \int_0^{\pi/2} s(\xi \sin \theta) d\theta; \quad (3.60)$$

$$g(\xi) + \frac{4}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) K_{21}(\xi, \eta) d\eta - \frac{4}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) K_{22}(\xi, \eta) d\eta = 0; \quad s(\xi) = \frac{\xi \sigma(a\xi)}{C_{44}d_1I_1}.$$

Ядра интегральных уравнений (3.60) имеют вид

$$K_{11}(\xi, \eta) = -\left[ \frac{k}{2} I_1(2\beta_1, \eta) + \beta_1 I_2(2\beta_1, \eta) + \frac{\beta_1^2}{k} I_3(2\beta_1, \eta) \right];$$

$$K_{12}(\xi, \eta) = \frac{\beta_1^2}{k} \left[ \eta^{-1} I_2(2\beta_1, \eta) - I_2(2\beta_1, 1) \right]; \quad K_{21}(\xi, \eta) = -\frac{\beta_1^2}{k} \xi I_4(2\beta_1, \eta); \quad (3.61)$$

$$K_{22}(\xi, \eta) = \xi \left\{ \frac{k}{2} \left[ \eta^{-1} I_1(2\beta_1, \eta) - I_1(2\beta_1, 1) \right] - \beta_1 \left[ \eta^{-1} I_2(2\beta_1, \eta) - I_2(2\beta_1, 1) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta_1^2}{k} \left[ \eta^{-1} I_3(2\beta_1, \eta) - I_3(2\beta_1, 1) \right] \right\},$$

где

$$I_1(\beta, \eta) = \beta \left[ 2\xi \eta (\zeta^2 - 1) \right]^{-1}; \quad I_2(\beta, \eta) = I_1(\beta, \eta) \left[ 4\xi I_1(\beta, \eta) - \beta^{-1} \right];$$

$$I_3(\beta, \eta) = 4I_1^2(\beta, \eta) \left[ 2(3\zeta^2 + 1)I_1(\beta, \eta) - 3\xi\beta^{-1} \right];$$

$$I_4(\beta, \eta) = 12I_1^2(\beta, \eta) \left[ 16\xi(\zeta^2 + 1)I_1^2(\beta, \eta) - \frac{4}{\beta}(3\zeta^2 + 1)I_1(\beta, \eta) + \xi/\beta^2 \right];$$

$$\zeta = (\beta^2 + \xi^2 + \eta^2)(2\xi\eta)^{-1}; \quad \beta_1 = n_1^{-1/2}\beta.$$

Из (3.60) видим, что взаимодействие трещины со свободной поверхностью материала приводит к ненулевому значению  $K_{II}$  в задаче о трещине нормального отрыва (для неограниченного тела с начальными напряжениями, содержащего изолированную трещину нормального отрыва, как следует из (3.38),  $K_{II} = 0$ ). Следует отметить, что аналогичный механический эффект был установлен и в соответствующей задаче механики разрушения материалов без начальных напряжений [135]. Кроме того, оба КИН  $K_I$  и  $K_{II}$  зависят от начальных напряжений и от расстояния между трещиной и границей полупространства, поскольку значения функций  $f(\xi)$  и  $g(\xi)$ , получаемые из уравнений (3.60), зависят от этих параметров.

Характер указанных зависимостей продемонстрируем на примере численных расчетов для конкретных материалов. Результаты приводятся для случая равномерного нормального нагружения на берегах трещины  $\sigma(r) = \sigma = \text{const}$ .

*Материал с потенциалом Трелоара.* На рис. 21, а, б приведены, соответственно, зависимости отношений  $K_I / K_I^\infty$  и  $K_{II} / K_I^\infty$  ( $K_I^\infty$  – КИН для трещины нормального отрыва в бесконечном теле, который не зависит от начальных напряжений) от параметра  $\lambda_1$  для разных значений безразмерного расстояния между трещиной и границей тела  $\beta = h/a$ . Из рисунков видно, что КИН  $K_I$  и  $K_{II}$  существенно зависят от начальных напряжений. Приведенные кривые в области сжимающих начальных напряжений ( $\lambda_1 < 1$ ) имеют вертикальные асимптоты, соответствующие эффекту «резонансного» характера, имеющему место при достижении начальными сжимающими напряжениями (и, соответственно, параметром начального сжатия  $\lambda_1 < 1$ ) критических значений, при которых происходит локальная потеря устойчивости при сжатии (по симметричной относительно плоскости расположения трещины форме). Это явление позволяет в соответствии с объединенным подходом определять указанные критические параметры сжатия.

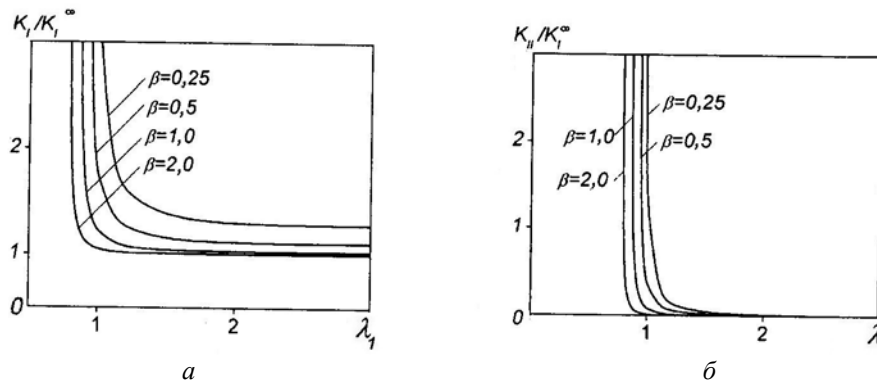


Рис. 21

Таблица 1

$\beta = h/a$	0,1	0,25	0,5	0,75	1,0	2,0	5,0	10,0
$\lambda_1 = 0,9$	–	–	–	3,0238	1,7378	1,1332	1,0115	1,0015
	–	–	–	1,5481	0,4526	0,0485	0,0018	0,0001
$\lambda_1 = 1,0$	8,4045	3,0817	1,7374	1,3770	1,2223	1,0482	1,0040	1,0005
	5,1692	1,2098	0,3609	0,1592	0,0816	0,0109	0,0004	0,0000
$\lambda_1 = 1,2$	2,2809	1,5696	1,2459	1,1288	1,0744	1,0146	1,0011	1,0001
	0,2219	0,1186	0,0523	0,0248	0,0125	0,0015	0,0001	0,0000

В табл. 1 приведены значения  $K_I / K_I^\infty$  (верхние числа в ячейках) и  $K_{II} / K_I^\infty$  (нижние числа в ячейках) для разных значений безразмерного расстояния между трещиной и границей полупространства, нормированного на радиус трещины, и для значений параметра  $\lambda_1 = 0,9$  (начальные сжимающие напряжения),  $\lambda_1 = 1,0$  (начальные напряжения отсутствуют) и  $\lambda_1 = 1,2$  (начальные растягивающие напряжения). Как видим, взаимовлияние трещины и свободной границы приводит к увеличению значений КИН по сравнению со значениями, получаемыми для трещины нормального отрыва в неограниченном теле. В то же время, при возрастании указанного расстояния взаимное влияние трещины и границы тела достаточно быстро ослабевает, а значения

КИН стремятся к значениям, полученным в задаче для тела с изолированной трещиной. Отметим, что указанные зависимости аналогичны полученным при исследовании задачи о приповерхностной трещине, параллельной свободной поверхности полуграниченного материала без начальных напряжений (см. стр. 225, 226 в [135]).

*Слоистый двухкомпонентный композит с изотропными шарами.* Как было указано в п. 2.2, при континуальном подходе такой композит моделируется трансверсально-изотропной средой с приведенными макрохарактеристиками. Зависимости соотношения КИН  $K_I / K_I^\infty$  от отношения приведенных модулей упругости слоев  $E^{(1)} / E^{(2)}$  с одинаковыми коэффициентами Пуассона  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,3$  и при коэффициенте объемной концентрации компонента с модулем упругости  $E^{(1)}$   $c_1 = 0,3$  приведены на рис. 22, а. Линии 1, 2 и 3 (а также 1', 2' и 3') построены, соответственно, для значений  $\lambda_1 = 0,99$  (сжимающие начальные напряжения),  $\lambda_1 = 1,0$  (отсутствие начальных напряжений) и  $\lambda_1 = 1,05$  (растягивающие начальные напряжения). При этом сплошные линии соответствуют значению  $\beta = 0,25$ , а штриховые –  $\beta = 0,5$ . Значения  $K_I / K_I^\infty$  монотонно уменьшаются при возрастании отношения  $E^{(1)} / E^{(2)}$ , причем это уменьшение является весьма существенным. Так, например, изменение отношения модулей упругости слоев от 1 до 30 (при  $\lambda_1 = 1,05$  и  $\beta = 0,25$ ) приводит к уменьшению отношения  $K_I / K_I^\infty$  на 34 %. Кроме того, из рисунка следует, что меньшему значению расстояния между трещиной и границей соответствует большее значение  $K_I / K_I^\infty$ .

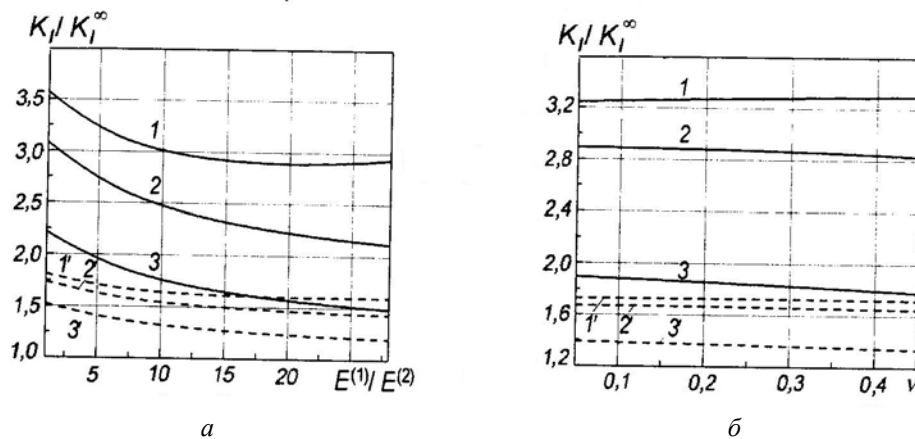


Рис. 22

Для композита с одинаковыми коэффициентами Пуассона материалов слоев  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = \nu$  зависимости  $K_I / K_I^\infty$  от  $\nu$  приведены на рис. 22 б (при  $E^{(1)} / E^{(2)} = 3$  и  $c_1 = 0,3$ ). Сплошные линии 1, 2 и 3 соответствуют  $\beta = 0,25$ , а штриховые линии 1', 2' и 3' –  $\beta = 0,5$ . При этом линии 1 и 1' соответствуют значениям  $\lambda_1 = 0,99$ , линии 2 и 2' –  $\lambda_1 = 1,0$ , линии 3 и 3' –  $\lambda_1 = 1,1$ .

3.2.3. *Осесимметричная задача о трещине радиального сдвига* [60 – 62, 122, 123, 139]. На берегах трещины антисимметрично относительно плоскости ее расположения  $y_3 = 0$  приложены касательные радиальные напряжения интенсивности  $\tau(r)$ . Коэффициенты интенсивности напряжений в этом случае представляются выражениями (3.59), а функции  $f$  и  $g$  определяются из решения системы интегральных уравнений вида

$$f(\xi) + \frac{4}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) K_{11}(\xi, \eta) d\eta - \frac{4}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) K_{12}(\xi, \eta) d\eta = 0; \quad (3.62)$$

$$g(\xi) + \frac{4}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) K_{21}(\xi, \eta) d\eta - \frac{4}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) K_{22}(\xi, \eta) d\eta = -\frac{4}{\pi k} \xi \int_0^{\pi/2} q'(\xi \sin \theta) d\theta,$$

где  $q(\xi) = (\xi \tau(a\xi)) / (C_{44} n_1^{-1/2} d_1)$ , а ядра имеют вид (3.61).

В этой задаче эффект взаимодействия трещины и свободной поверхности материала также приводит к новому механическому эффекту – ненулевому значению коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$  (в задаче об изолированной трещине радиального сдвига в предварительно напряженном неограниченном теле имели ((3.42))  $K_I = 0$ ).

Ниже приведены результаты расчетов для некоторых типов материалов в случае действия на берегах трещины равномерной сдвиговой нагрузки  $\tau(r) = \tau = \text{const}$ . Отметим, что в п. 1.4 для данной задачи приведены (рис. 6) и проанализированы зависимости коэффициентов интенсивности напряжений от параметров начальных напряжений для материала с потенциалом Трелоара. На рис. 23 для этого же материала показана зависимость отношения  $K_{II} / K_{II}^\infty$  (где  $K_{II}^\infty$  КИН, соответствующий изолированной трещине радиального сдвига в предварительно напряженном неограниченном теле и определяемый из (3.42)) от нормированного расстояния между трещиной и границей полупространства  $\beta$  для разных значений  $\lambda_1$ . Как видим, влияние свободной поверхности материала обуславливает возрастание значений КИН по сравнению со случаем трещины радиального сдвига в бесконечном материале как в случае наличия в материале начальных сжимающих ( $\lambda_1 = 0,9$ ) и растягивающих ( $\lambda_1 = 1,1$ ) напряжений, так и в случае отсутствия начальных напряжений ( $\lambda_1 = 1,0$ ).

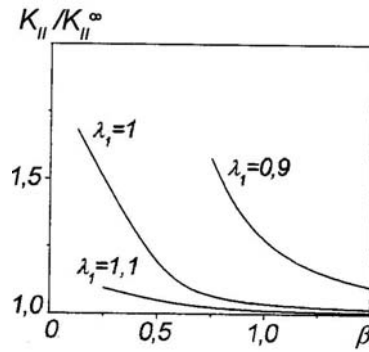


Рис. 23

Материал с потенциалом Бартенева – Хазановича. На рис. 24 для этого потенциала приведена зависимость отношения  $K_{II} / K_{II}^\infty$  от параметра  $\lambda_1$  для разных значений  $\beta$ , подтверждающая существенное влияние начальных напряжений на асимптотическое распределение напряжений в окрестности трещины. Кривые имеют вертикальные асимптоты, соответствующие эффекту «резонансного» характера, имеющему место при достижении начальными сжимающими напряжениями значений, при которых происходит локальная потеря устойчивости материала возле трещины (по антисимметричной или изгибной относительно плоскости расположения трещины форме). Следует при этом заметить, что для указанного материала, а также для материала с потенциалом Трелоара критические значения сжимающих усилий для изгибной формы потери устойчивости, получаемые из решения задачи о трещине радиального отрыва, совпадают с критическими значениями сжимающих усилий для симметричной формы потери устойчивости, получаемыми из решения задачи о трещине нормально отрыва (см. п. 3.2.2).

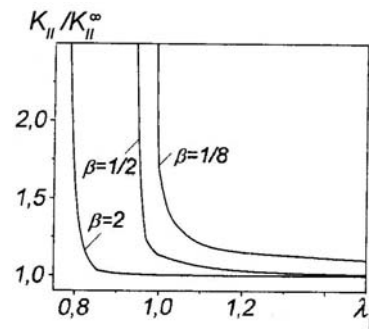


Рис. 24

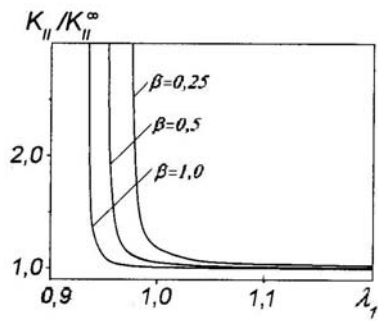


Рис. 25

Композит со стохастическим армированием в плоскости  $y_3 = \text{const}$  короткими волокнами эллипсоидальной формы. При континуальном подходе такой композит моделируется трансверсально-изотропным телом с приведенными макрохарактеристиками (см. п. 2.2). Результаты на рис. 25 даны для углепластикового связующего со стохастическим армированием эллиптическими углеродными волокнами при объемной концентрации волокон  $c_1 = 0,7$ . Как видно из рисунка, значения

$K_{II} / K_{II}^{\infty}$  существенно зависят от начальных напряжений и асимптотически стремятся к бесконечности при приближении параметра

$\lambda_1$  к значениям, соответствующим локальной потере устойчивости полупространства с приповерхностной трещиной для этого материала. Кроме того, на значения КИН заметно влияет расстояние между трещиной и свободной границей. Так, для значений  $\lambda_1 = 0,98$  величины  $K_{II} / K_{II}^{\infty}$  отличаются для  $\beta = 0,25$  и  $\beta = 1,0$  почти в два раза.

3.2.4. Трещина кручения [38, 66, 123]. К поверхности трещины приложена антисимметрично относительно плоскости  $y_3 = 0$  касательная окружная нагрузка интенсивности  $\tau_{\theta}(r)$ . Коэффициенты интенсивности напряжений в этом случае определяются выражениями

$$K_I = 0; \quad K_{II} = 0; \quad K_{III} = \frac{1}{2} C_{44} n_3^{-1/2} \sqrt{\pi a} \int_0^1 f(\eta) d\eta, \quad (3.63)$$

при этом функция  $f$  определяется из решения интегрального уравнение Фредгольма второго рода вида

$$f(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(\eta) K(\xi, \eta) d\eta = \frac{4}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} q'(\xi \sin \theta) d\theta; \quad q(\xi) \equiv \frac{\xi \tau_{\theta}(a\xi)}{C_{44} n_3^{-1/2}} \quad (3.64)$$

с ядром  $K(\xi, \eta) = 2\xi \left[ \eta^{-1} I_1(2\beta_3, \eta) - I_1(2\beta_3, 1) \right]$ , где  $\beta_3 = n_3^{-1/2} \beta$ , а выражение для  $I_1$  дано в (3.61).

В предельном случае расположения трещины кручения, когда расстояние между ней и границей полупространства стремится к бесконечности, из (3.63) с учетом (3.64) получаем такое выражения для  $K_{III}$ :

$$K_{III}^{\infty} = \frac{2}{a\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{t^2 \tau_{\theta}(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}}, \quad (3.65)$$

которое совпадает с результатом, полученным в [135] для линейно-упругого тела без начальных напряжений.

Ниже приведены результаты для некоторых типов материалов при действии на берегах трещины нагрузки вида  $\tau_{\theta}(r) = \tau = \text{const}$ .

Материал с потенциалом Бартенева – Хазановича. На рис. 26, а, б приведены зависимости отношения  $K_{III} / K_{III}^{\infty}$  (где  $K_{III}^{\infty}$  определяется из (3.65)), соответственно от параметра  $\lambda_1$  и от безразмерного расстояния между трещиной и границей  $\beta = h/a$ .

Как видно из этих рисунков, начальные напряжения существенно влияют на значения КИН продольного сдвига. В то же время, в отличие от случаев трещин нормального отрыва и радиального сдвига, рассмотренных выше, в случае трещины кручения отсутствуют эффекты «резонансного» характера. Это свидетельствует об отсут-



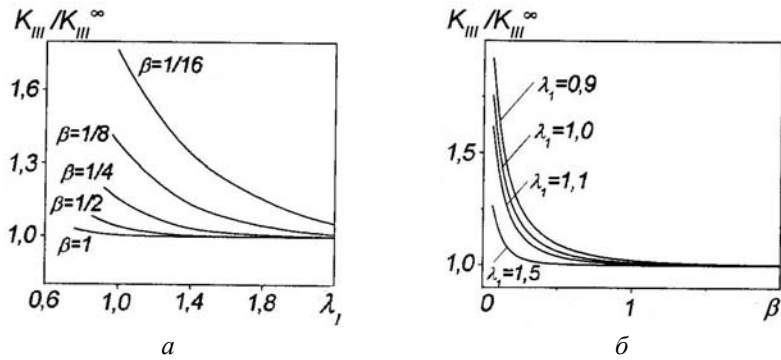


Рис. 26

ствии форм локальной потери устойчивости материала с потенциалом Бартенева – Хазановича в окрестности трещины при сжатии, соответствующих трещине кручения. Также влияние близко расположенной свободной границы тела обуславливает возрастание значений КИН по сравнению со случаем изолированной трещины. Так, для  $\lambda_1 = 0,9$  при расстоянии между трещиной и границей полупространства, составляющем  $1/16$  радиуса трещины, соответствующее значение  $K_{III}$  превышает значения  $K_{III}^{\infty}$  в 1,92 раза. С другой стороны, при возрастании расстояния между трещиной и границей полупространства указанное взаимовлияние быстро ослабевает и при расстояниях, составляющих более 2 радиусов трещины, им при инженерных расчетах можно пренебрегать.

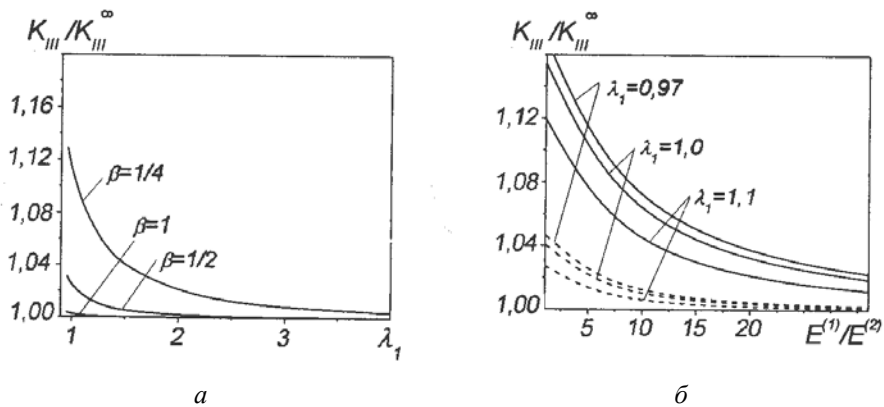


Рис. 27

Слоистый двухкомпонентный композит с изотропными слоями. На рис. 27, а приведены зависимости  $K_{III} / K_{III}^{\infty}$  от параметра начальных напряжений  $\lambda_1$  для разных значений  $\beta = h/a$  при соотношении модулей упругости слоев  $E^{(1)} / E^{(2)} = 4$  с одинаковыми коэффициентами Пуассона  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,3$  и при коэффициенте концентрации слоя с модулем упругости  $E^{(1)}$ , равном  $c_1 = 0,3$ . Характер указанной зависимости аналогичен полученному для материала с потенциалом Бартенева – Хазановича. На рис. 27 б для этого материала приведены зависимости  $K_{III} / K_{III}^{\infty}$  от отношения модулей упругости слоев  $E^{(1)} / E^{(2)}$  для значений  $\lambda_1 = 0,97$ ,  $\lambda_1 = 1,0$  и  $\lambda_1 = 1,1$ . При этом сплошные линии соответствуют значению  $\beta = 0,25$ , а штриховые –  $\beta = 0,5$ .

3.2.5. Критические параметры нагружения при сжатии вдоль приповерхностной трещины. В подпунктах 3.2.1 – 3.2.3 на примере материалов с различными видами упругих потенциалов и композитов показано, что в случае неосесимметричного и осесимметричного нагружения приповерхностных трещин нормального отрыва и радиального сдвига при достижении начальными сжимающими напряжениями определенных критических значений наблюдаются эффекты «резонансного» характера в асимптотическом распределении напряжений в окрестности трещин, приводящие к резкому возрастанию значений коэффициентов интенсивности напряжений. При этом значения параметров начального сжатия, при которых наблюдается указанный «резонансоподобный» рост значений КИН, для случаев трещин нормального отрыва и радиального сдвига совпадают. Это явление, согласно объединенному подходу, изложенному в п. 1.4, позволяет определять критические (предельные) значения сжимающих усилий, при которых происходит локальная потеря устойчивости материала (по неосесимметричной или осесимметричной моде) в окрестности приповерхностной трещины в условиях сжатия вдоль трещин (рис. 13, б). В то же время в задаче о кручении тела с приповерхностной трещиной указанные «резонансоподобные» явления не наблюдаются, что свидетельствует об отсутствии формы потери устойчивости материала при сжатии, которая бы соответствовала задаче о трещине кручения.

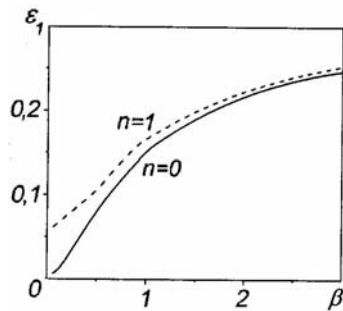


Рис. 28

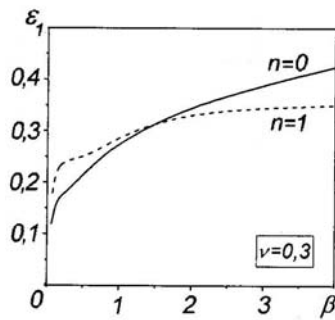


Рис. 29

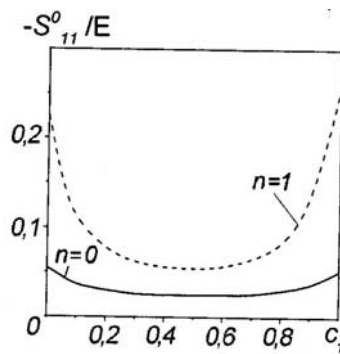


Рис. 30

На рис. 28 и 29 приведены зависимости полученных по указанной методике относительных критических (предельных) параметров укорочения  $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$  от относительного расстояния между трещиной и границей полупространства  $\beta$ , соответственно, для материалов с потенциалом Бартенева – Хазановича и гармонического типа.

Сплошными линиями показаны результаты для осесимметричной моды потери устойчивости ( $n = 0$ ), а штриховыми – для неосесимметричной моды потери устойчивости материала в окрестности приповерхностной трещины (первая гармоника по угловой координате,  $n = 1$ ). Из рисунков следует, что взаимное влияние трещины и границы полупространства приводит к существенному уменьшению значений критических (предельных) параметров укорочения и, соответственно, критических (предельных) напряжений сжатия по сравнению со случаем одной изолированной трещины в бесконечном материале (см. п. 3.1) (для этого случая для потенциала Бартенева – Хазановича критические параметры сжатия составляют  $\varepsilon_1^* = 0,307$ , а для потенциала гармонического типа вычисляются по формуле  $\varepsilon_1^* = 1/(2 + \nu)$  (осесимметричная мода потери устойчивости) и  $\varepsilon_1^* = (1 - \nu)/2$  (неосесимметричная мода потери устойчивости)). В то же время при росте расстояния между трещиной и границей полупространства это влияние ослабевает, а соответствующие критические параметры стремятся к значениям, полученным для случая одной трещины в пространстве.

На рис. 30 показано влияние объемной концентрации стекла  $c_1$  на критическое значение напряжения сжатия, отнесенного к приведенному модулю упругости  $E$ , для слоистого двухкомпонентного композита с изотропными слоями (композиция слоев алюмоборо-

силикатного стекла и эпоксиномалеиновой смолы) для значения  $\beta = 0,25$ . На рис. 31 приведены зависимости относительных критических параметров укорочения  $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$  от  $\beta$  для композитного материала со стохастическим армированием в плоскости изотропии короткими волокнами эллипсоидальной формы (углепластик, армированный углеродными волокнами с концентрацией волокон  $c_1 = 0,7$ ).

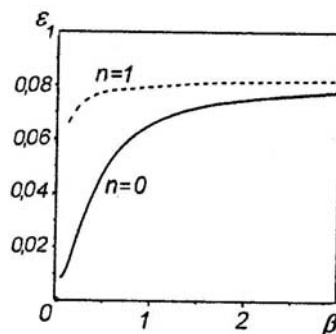


Рис. 31

Из анализа полученных результатов следует, что для всех рассмотренных материалов, кроме материала с потенциалом гармонического типа, реализуется осесимметричная мода потеря устойчивости ( $n = 0$ ). Для материала с гармоничным потенциалом при  $\beta > 1,5$  реализуется неосесимметричная мода потери устойчивости, что может быть объяснено тем, что, как известно [24], для этого потенциала реализуется неосесимметричная мода поверхностной неустойчивости, а при больших значениях  $\beta$  критические (предельные) параметры сжатия в задаче о приповерхностной трещине переходят в значения, соответствующие поверхностной потере устойчивости полупространства без трещины. Также из приведенных результатов численных расчетов видим, что критические (предельные) параметры сжатия зависят от механических характеристик материала и геометрических параметров задачи.

**3.2.6. Выводы.** Из исследования задачи о приповерхностной круговой трещине в предварительно напряженном материале следует, что взаимовлияние трещины и свободной поверхности материала приводит к ряду новых механических эффектов. В частности, для всех рассмотренных типов трещин (трещина нормального отрыва, радиального сдвига и кручения) для неосесимметричных и осесимметричных постановок задач коэффициенты интенсивности напряжений существенно зависят от начальных напряжений. В этом проявляется отличие рассмотренных в разделе задач для полуграниченного тела с приповерхностной трещиной от задач для неограниченного тела с изолированной трещиной (п. 3.1.1), в которых коэффициенты интенсивности напряжений не зависели от начальных напряжений (за исключением общей неосесимметричной задачи о трещине сдвига), а влияние этих напряжений проявлялось в зависимости от них величин раскрытия трещин.

При этом в случае действия на берегах трещины нормальной и радиальной сдвиговой нагрузок происходит «резонансоподобное» изменение значений коэффициентов интенсивности напряжений при приближении начальных сжимающих усилий к значениям, соответствующим локальной потере устойчивости материала в окрестности трещины. Вместе с тем, в случае нагрузки берегов трещины усилиями кручения, указанные «резонансоподобные» явления не наблюдаются, что свидетельствует об отсутствии форм потери устойчивости, соответствующих задаче кручения.

Кроме того, взаимодействие трещины и границы полупространства обуславливает отличие от нуля КИН поперечного сдвига в задачах о трещине под действием нормальной нагрузки, а также ненулевые значения КИН нормального отрыва в задаче о трещине под действием радиальной сдвиговой нагрузки. Следует отметить, что последний эффект является аналогичным обнаруженному при исследовании задачи о полупространстве с приповерхностной трещиной в рамках классической механики разрушения материалов без начальных напряжений [135].

При малых относительных расстояниях между трещиной и границей полупространства количественно взаимовлияние трещины и свободной границы проявляется в увеличении значений коэффициентов интенсивности напряжений по сравнению со значениями КИН для изолированной трещины в неограниченном теле. При увеличении относительного расстояния между трещинами взаимное влияние трещины и границы тела достаточно быстро ослабевает, а соответствующие значения КИН стремятся к значениям, полученным в задаче для тела с изолированной трещиной. Отметим, что эти эффекты также аналогичны полученным в соответствующих задачах для материалов без начальных напряжений [135].

На основе анализа «резонансоподобного» изменения коэффициентов интенсивности напряжений, полученных при решении задач механики разрушения материалов с начальными напряжениями для трещины нормального отрыва и поперечного сдвига, при приближении начальных сжимающих усилий к значениям, соответствующим локальной потере устойчивости материала в окрестности трещины, для отдельных моделей материалов определены критические (предельные) параметры сжатия при сжатии полупространства усилиями, направленными вдоль приповерхностной трещины. Показано, что для всех рассмотренных материалов, кроме материала с упругим потенциалом гармонического типа, потеря устойчивости при сжатии происходит по осесимметричной моде.

### 3.3. Две параллельные соосные дискообразные трещины в неограниченном теле.

Рассматривается неограниченное предварительно напряженное упругое тело с двумя круговыми трещинами одинакового радиуса  $a$ , размещенными в параллельных плоскостях  $y_3 = 0$  и  $y_3 = -2h$  с центрами на оси  $Oy_3$  (рис. 32). Поверхности трещин загружены дополнительными (по отношению к начальным напряжениям  $S_0^{11} = S_0^{22}$ ) взаимоуравновешенными усилиями, соответствующими трещинам мод I, II или III, (рис. 32, а), либо свободны от напряжений (для задачи о сжатии материала вдоль трещин, рис. 32, б). В силу симметрии (антисимметрии) геометрической и силовой схем задач относительно плоскости  $y_3 = -h$ , являющейся равноудаленной от трещин, постановку задач можно переформулировать для полупространства  $y_3 \geq -h$  с одной трещиной; однако в этом случае, в отличие от задач, рассмотренных в п. 3.2, на границе полупространства формулируются соответствующие смешанные граничные условия.

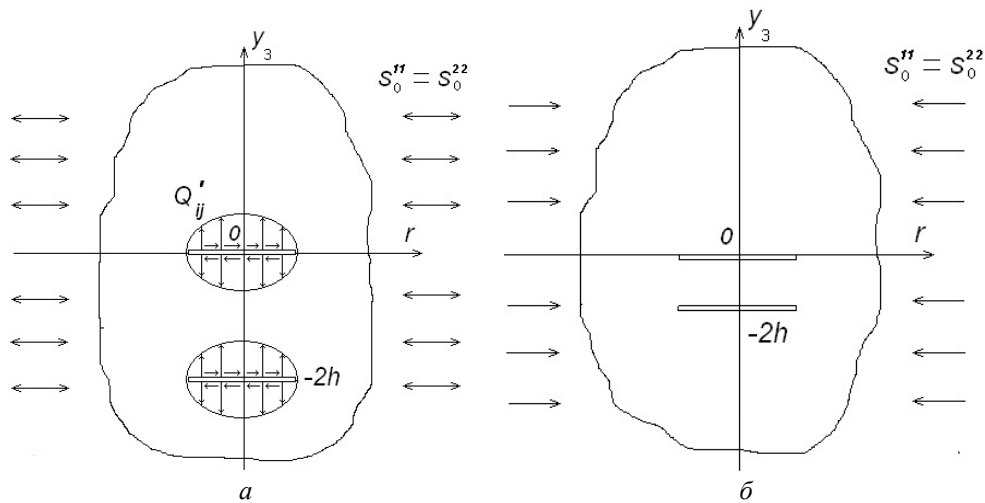


Рис. 32

Решению задач для двух параллельных соосных трещин в телах с начальными напряжениями посвящены публикации [4, 7, 8, 62, 72, 123].

3.3.1. Неосесимметричная задача [8]. Поверхности трещин загружены нормальными растягивающими усилиями одинаковой интенсивности  $\sigma(r, \theta)$ . Как было указано выше, в этом случае постановку задачи переформулируют к эквивалентной постановке для полупространства  $y_3 = -h$  с трещиной, расположенной в плоскости  $y_3 = 0$ . Смешанные граничные условия на берегах трещины и границе полупространства имеют вид:

$$\begin{aligned} Q'_{33} &= -\sigma(r, \theta); & Q'_{3r} &= 0; & Q'_{3\theta} &= 0 & (0 \leq r < a, y_3 = \pm 0); \\ u_3 &= 0; & Q'_{3r} &= 0; & Q'_{3\theta} &= 0 & (0 \leq r < \infty, y_3 = -h). \end{aligned}$$

С использованием представлений общих решений линеаризованных уравнений равновесия через гармоничные потенциальные функции в виде (2.77), (2.80), а также представляя указанные потенциальные функции в ряды Фурье по окружной координате с коэффициентами в виде интегральных разложений Ханкеля по радиальной координате и разложение функции  $\sigma(r, \theta)$  в ряд Фурье вида (3.52), поставленную задачу отдельно для каждой гармоники по координате  $\theta$  приводят к системе парных интегральных уравнений, а затем к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода (более подробно см. в [8]), которые для случая неравных корней в безразмерной форме (когда все величины нормированы на радиус трещин  $a$ ) имеют вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(sk/k_1 + q)f_1(\xi) + \frac{1}{2}(sk/k_1 - q)f_2(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_1(\eta) K_{11}(\xi, \eta) d\eta + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_2(\eta) K_{12}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_3(\eta) K_{13}(\xi, \eta) d\eta = 0; \\ & \frac{1}{2}(sk/k_1 - q)f_1(\xi) + \frac{1}{2}(sk/k_1 + q)f_2(\xi) + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_1(\eta) K_{21}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_2(\eta) K_{22}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_3(\eta) K_{23}(\xi, \eta) d\eta = 0; \\ & \frac{1}{2}sk/k_2 f_3(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_1(\eta) K_{31}(\xi, \eta) d\eta + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_2(\eta) K_{32}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_3(\eta) K_{33}(\xi, \eta) d\eta = \frac{4}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} u'(\xi \sin \theta) d\theta \end{aligned}$$

( $u(\xi) = (k_1/C_{44}k_2)\xi^n \sigma^{(n)}(a\xi)$ ,  $s = n^{-1/2}d_2(1 - (d_2l_2)/(d_1l_1))^{-1}$ ,  $q = n_3^{-1/2}$ , а  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k$  определяются из (3.9)).

При этом коэффициенты интенсивности напряжений определяются соотношениями

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{1}{4}C_{44}s \frac{k}{k_1} \sqrt{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^1 f_3(\eta) d\eta; \quad K_{II} = \frac{1}{4}C_{44}s \frac{k}{k_1} \sqrt{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta [f_1(1) + f_2(1)]; \\ K_{III} &= \frac{1}{4}C_{44}q \sqrt{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \sin n\theta [f_1(1) - f_2(1)]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Как следует из (3.66), взаимовлияние двух параллельных трещин приводит к качественным изменениям в асимптотическом распределении напряжений возле кончика трещины по сравнению со случаем изолированной трещины в неограниченном материале, а именно, к ненулевым значениям коэффициентов интенсивности напряжений  $K_{II}$  и  $K_{III}$  при нагружении приповерхностной трещины только нормальными растягивающими усилиями. Кроме того, все три КИН зависят от начальных напряжений, поскольку параметры, входящие в выражения (3.66) и в интегральные уравнения Фредгольма, зависят от параметра начального удлинения (или укорочения)  $\lambda_1$ , обусловленного действием начальных напряжений  $S_0^{11} = S_0^{22}$ .

3.3.2. *Осесимметричная задача о трещинах нормального отрыва* [4, 62, 72, 123]. На берегах трещин симметрично относительно плоскостей их расположения приложены нормальные напряжения интенсивности  $\sigma(r)$ . Значения коэффициентов интенсивности напряжений, получаемых в этой задаче, для случая неравных корней имеют вид

$$K_I = -\frac{1}{2}C_{44}d_2I_2\sqrt{\pi a}f(1); \quad K_{II} = \frac{1}{2}C_{44}d_2n_2^{-1/2}\sqrt{\pi a}\int_0^1 g(\xi)d\xi; \quad K_{III} = 0, \quad (3.67)$$

где функции  $f$  и  $g$  определяются из системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$f(\xi) + \frac{2}{\pi k} \int_0^1 f(\eta)K_{11}(\xi, \eta)d\eta + \frac{2}{\pi k} \int_0^1 g(\eta)K_{12}(\xi, \eta)d\eta = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} s(\xi \sin \theta)d\theta;$$

$$g(\xi) + \frac{2}{\pi k} \int_0^1 f(\eta)K_{21}(\xi, \eta)d\eta + \frac{2}{\pi k} \int_0^1 g(\eta)K_{22}(\xi, \eta)d\eta = 0; \quad s(\xi) = -\frac{\xi \sigma(a\xi)}{C_{44}d_2I_2}; \quad (3.68)$$

с ядрами

$$K_{11}(\xi, \eta) = k_1I_1(2\beta_1, \eta) - k_2I_1(2\beta_2, \eta);$$

$$K_{12}(\xi, \eta) = k_1 \{ [I_0(2\beta_1, 1) - I_0(2\beta_2, 1)] - \eta^{-1} [I_0(2\beta_1, \eta) - I_0(2\beta_2, \eta)] \};$$

$$K_{21}(\xi, \eta) = -k_2\xi [I_2(2\beta_1, \eta) - I_2(2\beta_2, \eta)]; \quad (3.69)$$

$$K_{22}(\xi, \eta) = -\xi \{ [k_2I_1(2\beta_1, 1) - k_1I_1(2\beta_2, 1)] - \eta^{-1} [k_2I_1(2\beta_1, \eta) - k_1I_1(2\beta_2, \eta)] \}$$

( $\beta_i = n_i^{-1/2}\beta$  ( $i=1, 2$ );  $I_0 = 0,25 \ln(\zeta + 1)/(\zeta - 1)$ , а  $\zeta$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  определяются из (3.61)).

Из (3.67) видим, что взаимодействие трещин между собой приводит к ненулевому значению  $K_{II}$  в задаче о трещинах нормального отрыва (для неограниченного тела с начальными напряжениями, содержащего изолированную трещину нормального отрыва, как следует из (3.38),  $K_{II} = 0$ ) (отметим, что аналогичный эффект был установлен и при исследовании осесимметричной задачи о двух параллельных соосных трещинах нормального отрыва в теле без начальных напряжений [135]). Кроме того, оба КИН  $K_I$  и  $K_{II}$  зависят от начальных напряжений и от расстояния между трещинами, поскольку значения функций  $f(\xi)$  и  $g(\xi)$ , получаемые из уравнений (3.68), зависят от этих параметров.

Характер указанных зависимостей продемонстрируем на примере численных расчетов для конкретных материалов. Результаты приводятся для случая равномерного нормального нагружения на берегах трещин  $\sigma(r) = \sigma = \text{const}$ .

*Материал с потенциалом Бартенева – Хазановича.* На рис. 33, а, б приведены, соответственно, зависимости отношений  $K_I/K_I^\infty$  и  $-K_{II}/K_I^\infty$  (где  $K_I^\infty$  – КИН для трещины нормального отрыва в бесконечном теле, который не зависит от начальных напряжений) от параметра  $\lambda_1$  для разных значений безразмерного полурасстояния между трещинами  $\beta = h/a$ . Из рисунков видно, что КИН  $K_I$  и  $K_{II}$  существенно зависят от начальных напряжений. Приведенные на рис. 33, б кривые имеют вертикальные асимптоты, соответствующие эффекту «резонансного» характера, имеющему место при достижении начальными сжимающими напряжениями (и, соответственно, параметром начального сжатия  $\lambda_1 < 1$ ) значений, при которых происходит локальная потеря устойчивости материала (по симметричной относительно равноудаленной от трещин плоскости  $y_3 = -h$  форме) в окрестности трещин при сжатии вдоль трещин.

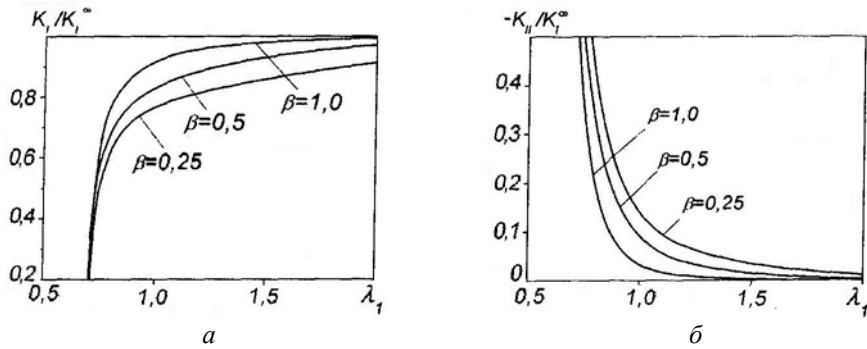


Рис. 33

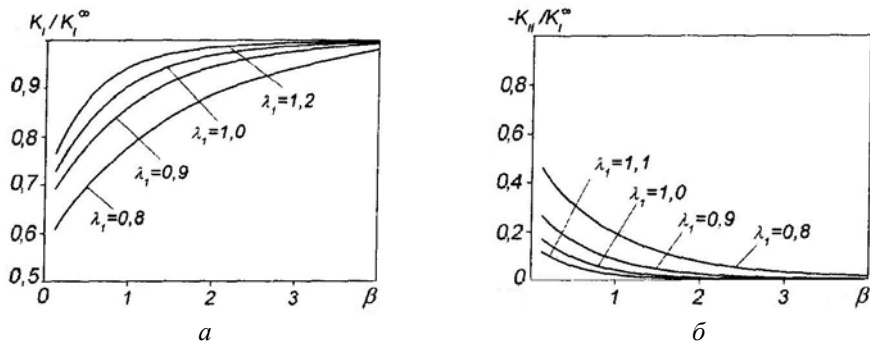


Рис. 34

Материал с потенциалом Трелоара. Рис. 34 иллюстрирует зависимость, соответственно, отношений  $K_I / K_I^\infty$  и  $-K_{II} / K_I^\infty$  от безразмерного полурасстояния между трещинами и свидетельствует о том, что взаимодействие трещин между собой приводит к заметному уменьшению значений КИН по сравнению со случаем трещины нормального отрыва в бесконечном теле как при наличии в материале начальных сжимающих ( $\lambda_1 = 0,8$ ,  $\lambda_1 = 0,9$ ) или растягивающих ( $\lambda_1 = 1,1$ ,  $\lambda_1 = 1,2$ ) напряжений, так и при отсутствии начальных напряжений ( $\lambda_1 = 1,0$ ). Так, например, для  $\lambda_1 = 0,8$  значение  $K_I$  для случая двух параллельных трещин при расстоянии между ними, составляющем четверть радиуса трещин, меньше значения  $K_I^\infty$  на 40%. В то же время с увеличением расстояния между трещинами их взаимодействие достаточно быстро ослабевает и при  $\beta > 4$  (т.е. при расстоянии между трещинами, превышающем 8 радиусов трещин) им можно при практических расчетах пренебрегать, поскольку при этом значения  $K_I$  отличаются для всех исследованных значений  $\lambda_1$  от значений  $K_I^\infty$  менее, чем на 2%, а значения  $K_{II}$  практически равны нулю. Заметим, что аналогичный эффект снижения значения  $K_I$  вследствие взаимодействия трещин был установлен и при рассмотрении задач для двух параллельных соосных трещин в материале без начальных напряжений [50].

Слоистый двухкомпонентный композит с изотропными слоями. Для композиции слоев алюмоборосиликатного стекла со слоями эпоксиномалеиновой смолы (см. п. 2.2) на рис. 35 дана зависимость отношения  $K_I / K_I^\infty$  от коэффициента концентрации стекла  $c_1$  для разных значений параметра началь-

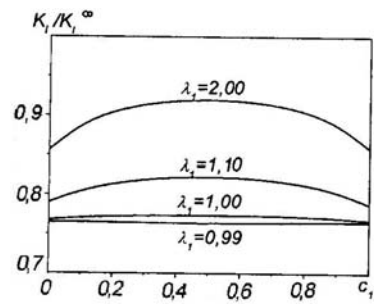


Рис. 35

ных напряжений  $\lambda_1$ , свидетельствующая о влиянии начальных напряжений и физико-механических характеристик композита на значения КИН.

3.3.3. *Осесимметричная задача о трещинах радиального сдвига* [62, 123]. На берегах трещин антисимметрично относительно плоскостей их расположения  $y_3 = 0$  и  $y_3 = -2h$  приложены касательные радиальные напряжения интенсивности  $\tau(r)$ . Коэффициенты интенсивности напряжений в этом случае имеют вид (3.67), а функции  $f$  и  $g$  определяются из решения системы интегральных уравнений вида:

$$f(\xi) - \frac{2}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) K_{11}(\xi, \eta) d\eta - \frac{2}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) K_{12}(\xi, \eta) d\eta = 0;$$

$$g(\xi) - \frac{2}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) K_{21}(\xi, \eta) d\eta - \frac{2}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) K_{22}(\xi, \eta) d\eta = -\frac{4}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} p'(\xi \sin \theta) d\theta;$$

$$p(\xi) \equiv -\frac{\xi \tau(a\xi)}{C_{44} n_2^{-1/2} d_2}, \quad (3.70)$$

где ядра имеют вид (3.69).

В этой задаче эффект взаимовлияния трещин между собой также приводит к новому механическому эффекту – ненулевому значению коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$  (в задаче об изолированной трещине радиального сдвига в предварительно напряженном неограниченном теле имели (см. (3.42))  $K_I = 0$ ).

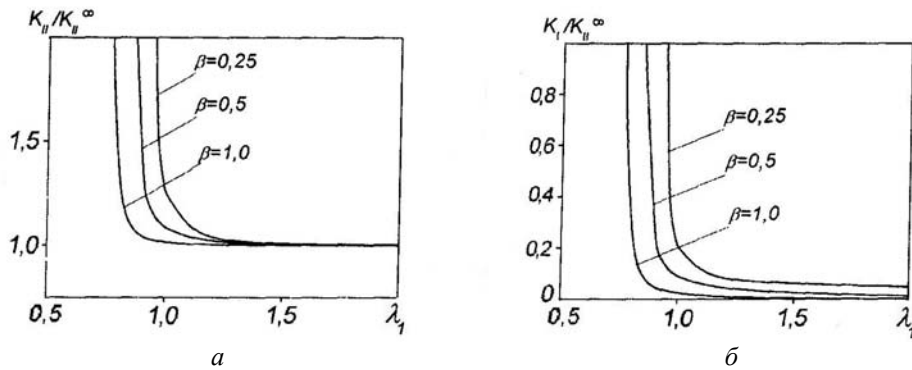


Рис. 36

В качестве примера приводятся результаты расчетов для материала с упругим потенциалом *Бартенева – Хазановича* при действии на берегах трещин равномерной сдвиговой нагрузки  $\tau(r) = \tau = \text{const}$ . На рис. 36, а, б приведены, соответственно, зависимости отношений  $K_{II} / K_{II}^{\infty}$  и  $K_I / K_{II}^{\infty}$  (где  $K_{II}^{\infty}$  – КИН для трещины радиального сдвига в неограниченном теле, не зависящий от начальных напряжений) от параметра  $\lambda_1$  для разных значений безразмерного полурасстояния между трещинами  $\beta = h/a$ . Рисунки демонстрируют существенное влияние начальных напряжений на величины КИН. При этом в области сжимающих начальных напряжений ( $\lambda_1 < 0$ ) кривые имеют вертикальные асимптоты, соответствующие эффекту «резонансного» характера, имеющему место при стремлении величин начальных сжимающих напряжений к значениям, при которых происходит локальная потеря устойчивости материала в окрестности трещин (по антисимметричной относительно плоскости  $y_3 = -h$  или изгибной форме) при сжатии направленными вдоль трещин усилиями. Отметим при этом, что полученные таким образом критические (предельные) значения параметров сжатия



$\lambda_1 < 1$  для антисимметричной (изгибной) формы потери устойчивости являются большими (а критические (предельные) сжимающие напряжения, соответственно, меньшими), чем полученные в п. 3.3.2 (см. рис. 33) критические значения для симметричной формы потери устойчивости.

Аналогичные зависимости отношений коэффициентов интенсивности напряжений  $K_{II} / K_{II}^\infty$  и  $K_I / K_{II}^\infty$  от параметра начальных напряжений  $\lambda_1$  были получены в [123] и для материала с потенциалом Трелоара.

3.3.4. *Трещины под действием усилий кручения* [7, 123]. К поверхностям трещин приложены антисимметрично относительно плоскостей их расположения тангенциальные крутящие напряжения интенсивности  $\tau_\theta(r)$ . Коэффициенты интенсивности напряжений в этом случае определяются выражениями

$$K_I = 0; \quad K_{II} = 0; \quad K_{III} = \frac{1}{2} C_{44} n_3^{-1/2} \sqrt{\pi a} \int_0^1 f(\eta) d\eta, \quad (3.71)$$

при этом функция  $f$  вычисляется из решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода в виде:

$$f(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(\eta) K(\xi, \eta) d\eta = \frac{4}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} q'(\xi \sin \theta) d\theta, \quad (3.72)$$

где  $q(\xi) = \frac{\xi \tau_\theta(a\xi)}{C_{44} n_3^{-1/2}}$  с ядром

$$K(\xi, \eta) = 8\beta_3 \xi^2 \left[ \frac{1}{(4\beta_3^2 + \xi^2 + \eta^2)^2 - 4\xi^2 \eta^2} - \frac{1}{(4\beta_3^2 + \xi^2 + 1)^2 - 4\xi^2} \right]; \quad \beta_3 = n_3^{-1/2} \beta.$$

Ниже приведены результаты численных расчетов для некоторых типов материалов при действии на берегах трещины нагрузки вида  $\tau_\theta(r) = \tau = \text{const}$ .

*Материал с потенциалом Бартенева – Хазановича.* На рис. 37 даны зависимости соотношений КИН  $K_{III} / K_{III}^\infty$  от параметра начальных напряжений  $\lambda_1$  для разных значений  $\beta$ , свидетельствующие о существенном влиянии начальных напряжений на коэффициент интенсивности напряжений  $K_{III}$ . Однако при этом эффектов «резонансоподобного» изменения КИН, в отличие от задач для трещин нормального отрыва и радиального сдвига, не происходит, поскольку, очевидно, при сжатии материала с двумя параллельными трещинами отсутствует форма потери устойчивости, соответствующая задаче кручения.

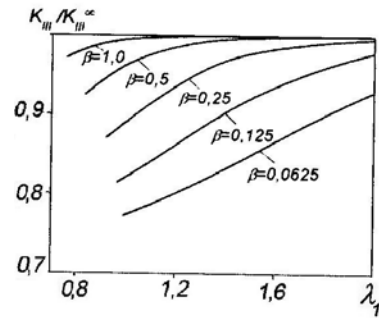


Рис. 37

*Материал с потенциалом Трелоара.* Рис. 38 иллюстрирует для этого материала влияние на величину КИН относительного полурасстояния между трещинами, нормированного на радиус трещин. Из рисунка видим, что взаимодействие двух параллельных соосных трещин кручения приводит к уменьшению  $K_{III}$  по сравнению со значением  $K_{III}^\infty$  для случая наличия в теле одной изолированной трещины, т.е. к определенному «упрочнению» тела. Следует отметить, что подобный характер взаимного влияния

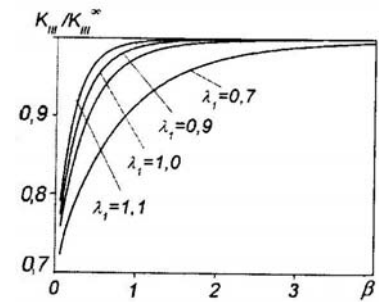


Рис. 38

двух трещин кручения был обнаружен ранее [142] при исследовании аналогичной задачи для материала без начальных напряжений. При возрастании расстояния между трещинами указанное взаимовлияние постепенно уменьшается и при расстояниях между трещинами, составляющих восемь и более радиусов трещин, при практических расчетах можно пренебрегать.

3.3.5. *Критические параметры нагружения при сжатии вдоль двух параллельных соосных трещин.* Согласно объединенному подходу, изложенному в п. 1.4, критические (предельные) параметры сжатия, соответствующие локальной потере устойчивости материала при сжатии вдоль двух параллельных соосных трещин (рис. 32, б), определяются из решений рассмотренных выше неоднородных задач для материала с начальными напряжениями, содержащего две параллельные соосные трещины, как значения начальных сжимающих напряжений, при достижении которых происходит резкое «резонансное» изменение значений коэффициентов интенсивности напряжений.

Так, из результатов, полученных в п. 3.3.2 при исследовании задачи для тела с трещинами нормального отрыва, можно определить критические параметры сжатия, соответствующие симметричной форме потери устойчивости материала в локальной области возле трещин. Аналогично, из численных результатов, полученных в п. 3.3.3 при исследовании задачи для тела с трещинами радиального сдвига, определяются критические параметры сжатия, соответствующие антисимметричной (изгибной) форме локальной потери устойчивости материала при сжатии вдоль двух параллельных трещин. Вместе с тем, в п. 3.3.4 было показано отсутствие «резонансных» эффектов при исследовании задачи о двух трещинах кручения, что свидетельствует об отсутствии на практике для указанной геометрической схемы размещения трещин формы потери устойчивости, соответствующей задаче кручения.

В табл. 2 для материала с потенциалом *Бартенева – Хазановича* приведены значения относительных критических (предельных) параметров укорочения  $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$ , при которых происходит локальная потеря устойчивости материала при сжатии вдоль двух параллельных соосных трещин, для разных значений нормированного на радиус трещин полурасстояния между трещинами  $\beta$  (верхним индексом «(1)» обозначены критические значения для симметричной формы потери устойчивости, а индексом «(2)» – для антисимметричной (изгибной) формы потери устойчивости. Как видим, на всем диапазоне изменения  $\beta$  значения  $\varepsilon_1^{(2)} < \varepsilon_1^{(1)}$ , т. е. потеря устойчивости для этого материала происходит по изгибной форме. Также видим, что при малых расстояниях между трещинами их взаимовлияние приводит к существенному уменьшению значений критических параметров сжатия. В то же время, при увеличении расстояния между трещинами значения относительных критических параметров укорочения стремятся к значению  $\varepsilon_1^* = 0,307$ , соответствующему для потенциала *Бартенева-Хазановича* критическому (предельному) параметру сжатия для случая одной изолированной трещины в бесконечном теле (см. п. 3.1.1).

Таблица 2

$\beta$	0,0625	0,125	0,25	0,5	1,0	2,0	5,0	10,0
$\varepsilon_1^{(1)}$	0,2643	0,3035	0,3070	0,3074	0,3069	0,3076	0,3067	0,3066
$\varepsilon_1^{(2)}$	0,0080	0,0354	0,0894	0,1675	0,2420	0,2877	0,3048	0,3064

Отметим, что из полученных в [4, 62, 123] результатов следует, что и для других моделей высокоэластических материалов (в частности, с потенциалом *Трелоара*) и композитов потеря устойчивости также происходит по изгибной форме. Поэтому ниже будем приводить зависимости критических параметров сжатия для изгибной формы потери устойчивости, опуская при этом верхний индекс «(2)».

На рис. 39 для материала с потенциалом Трелора проиллюстрирована зависимость относительного критического параметра укорочения  $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$  от значений  $\beta$ . Из рисунка можно сделать выводы о характере указанной зависимости, аналогичные тем, которые были сделаны для материала с потенциалом Бартенева – Хазановича.

На рис. 40 для слоистого композитного материала (слои алюмоборосиликатного стекла в композиции со слоями эпоксиномалеиновой смолы) дана зависимость критических значений напряжений сжатия, отнесенных к приведенному модулю упругости композита,  $\bar{\sigma} = S_0^{11} / E$  от коэффициента объемной концентрации стекла  $c_1$  для разных значений  $\beta$ . Как видим, соотношения объемных концентраций компонент слоистого композита существенно влияют на критические (предельные) параметры сжатия.

Зависимость относительных критических параметров сжатия  $\varepsilon_1$  от значений безразмерного полурастояния между трещинами  $\beta$  для композита, состоящего из углепластика, стохастически армированного в плоскостях  $y_3 = \text{const}$  короткими углеродными волокнами эллипсоидальной формы, приведена на рис. 41. При малых расстояниях между трещинами их взаимовлияние приводит к существенному снижению критических параметров сжатия. Так,  $\varepsilon_1$  для  $\beta = 1/16$  почти в 15 раз ниже, чем для случая сжатия материала вдоль одной изолированной трещины.

**3.3.6. Выводы.** На основании приведенных в настоящем разделе результатов исследования задач о двух параллельных соосных круговых трещинах в предварительно напряженном материале можно сделать следующие выводы:

для всех рассмотренных типов трещин (трещины нормального отрыва, радиального сдвига и кручения) для неосесимметричных и осесимметричных постановок задач коэффициенты интенсивности напряжений существенно зависят от начальных напряжений. В этом проявляется отличие рассмотренных в разделе задач для двух параллельных соосных трещин от задач для неограниченного тела с одной изолированной трещиной (п. 3.1.1), в которых коэффициенты интенсивности напряжений не зависели от начальных напряжений (за исключением общей неосесимметричной задачи о трещине сдвига), а влияние этих напряжений проявлялось в зависимости от них величин раскрытия трещин;

при действии на берегах трещин нормальной нагрузки и радиальной сдвиговой нагрузки обнаруживаются эффекты «резонансного» характера, состоящие в резком изменении значений коэффициентов интенсивности напряжений при приближении начальных сжимающих усилий к значениям, соответствующим локальной потере устойчивости материала в окрестности трещин. Вместе с тем, в случае нагрузки берегов трещин усилиями кручения, указанные «резонансоподобные» явления не наблюдаются, что свидетельствует об отсутствии на практике форм потери устойчивости в условиях сжатия вдоль двух параллельных трещин, соответствующих задаче кручения;

взаимодействие трещин обуславливает отличие от нуля КИН поперечного сдвига в задачах о трещине под действием нормальной нагрузки, а также ненулевые значе-

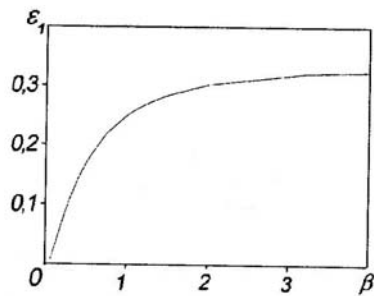


Рис. 39

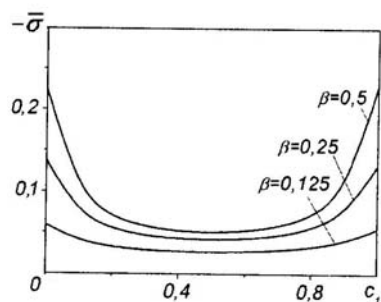


Рис. 40

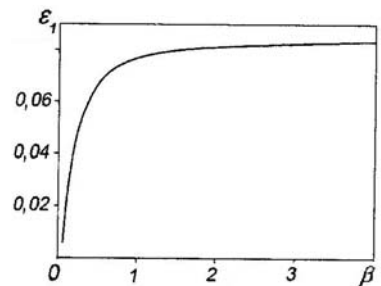


Рис. 41

ния КИН нормального отрыва в задаче о трещине под действием радиальной сдвиговой нагрузки. Следует отметить, что последний эффект является аналогичным обнаруженному при исследовании задачи о двух параллельных соосных трещинах в рамках классической механики разрушения материалов без начальных напряжений [135];

при малых относительных расстояниях между трещинами количественно взаимовлияние трещин проявляется в: снижении значения  $K_I$  при действии на поверхностях трещин нормальных усилий по сравнению с КИН для одной изолированной трещины нормального отрыва; увеличении значения  $K_{II}$  при действии на берегах трещин радиальных сдвиговых усилий по сравнению со значением КИН для одной изолированной трещины радиального сдвига; уменьшении значения  $K_{III}$  при действии на берегах трещин нагрузки кручения по сравнению с КИН для одной изолированной трещины кручения. Указанные эффекты взаимного влияния трещин в предварительно напряженных материала аналогичны установленным при исследовании соответствующих задач в рамках классической механики разрушения материалов без начальных напряжений [50, 135, 142];

при увеличении относительного расстояния между трещинами взаимовлияние трещин постепенно ослабевает, а соответствующие значения КИН стремятся к значениям, полученным в задачах для тела с одной изолированной трещиной. При этом при практических расчетах взаимным влиянием двух параллельных трещин можно пренебрегать, когда расстояние между ними превышает восемь радиусов трещин;

на основе анализа эффекта «резонансного» изменения коэффициентов интенсивности напряжений, полученных при решении задач для трещин нормального отрыва и радиального сдвига, при приближении начальных сжимающих усилий к значениям, соответствующим локальной потере устойчивости материала в окрестности трещин, для отдельных моделей материалов определены критические (предельные) параметры при сжатии вдоль двух параллельных соосных трещин. Показано, что для всех рассмотренных моделей материалов потеря устойчивости при сжатии происходит по антисимметричной (изгибной) форме;

значения коэффициентов интенсивности напряжений и критических (предельных) параметров сжатия существенно зависят от геометрических параметров задач (расстояния между трещинами и радиуса трещин) и физико-механических характеристик материалов.

**3.4. Периодическая система параллельных соосных круговых трещин в пространстве.** Рассматривается неограниченное упругое тело с начальными напряжениями  $S_0^{11} = S_0^{22}$ , действующими вдоль бесконечного ряда соосных круговых трещин

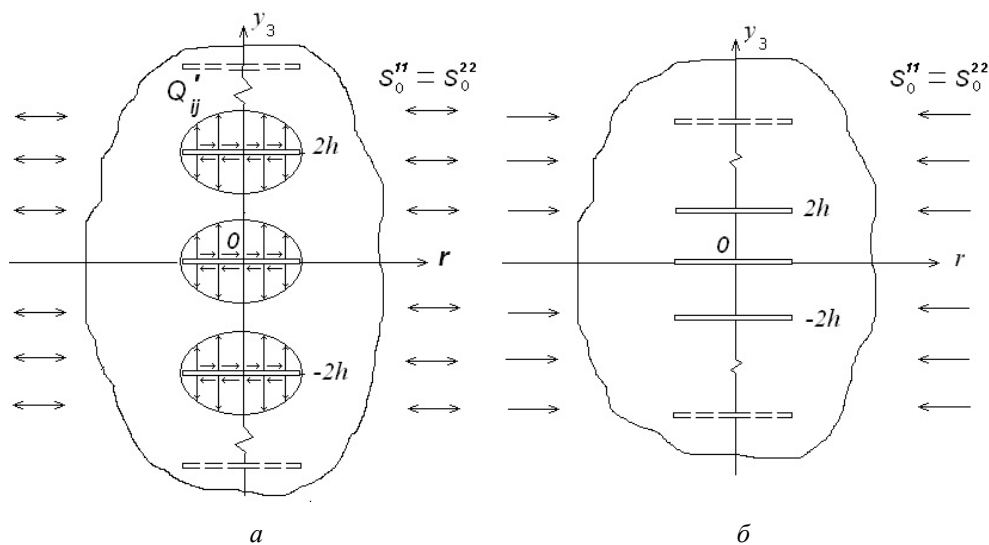


Рис. 42

одинакового радиуса  $a$ , размещенных в параллельных плоскостях  $y_3 = \text{const}$ :  $\{r < a, 0 \leq \theta < 2\pi, y_3 = 2hn; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  (рис. 42). Поверхности трещин нагружены дополнительными (по отношению к начальным напряжениям  $S_0^{11} = S_0^{22}$ ) взаимоуравновешенными усилиями, соответствующими трещинам нормального отрыва, радиального сдвига или кручения, (рис. 42, а), либо свободны от напряжений (для задачи о сжатии материала вдоль трещин, рис. 42, б).

Учитывая симметрию геометрической и силовой схем задачи относительно плоскости  $y_3 = 0$ , а также периодичность компонент тензора напряжений и вектора перемещений (с периодом  $2h$ ) по переменной  $y_3$ , исходную линеаризованную задачу для тела с периодической системой соосных трещин можно свести к смешанной краевой задаче для слоя  $0 \leq y_3 \leq h$ .

Задачи для периодической системы параллельных соосных трещин в предварительно напряженных материалах были рассмотрены в публикациях [6, 64, 65, 68, 69, 123].

**3.4.1. Неосесимметричная задача [6].** Поверхности трещин нагружены нормальными растягивающими усилиями одинаковой интенсивности  $\sigma(r, \theta)$ . Как было указано выше, в этом случае постановку задачи переформулируем к эквивалентной постановке для слоя  $0 \leq y_3 \leq h$  с трещиной, расположенной в плоскости  $y_3 = 0$ . Граничные условия на берегах трещины и границе полупространства имеют вид (здесь и далее  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ):

$$\begin{aligned} u_3 &= 0 \quad (y_3 = 0, r > a); \\ Q'_{33} &= -\sigma(r, \theta) \quad (y_3 = 0, r < a); \\ Q'_{3r} &= 0; \quad Q'_{3\theta} = 0 \quad (y_3 = 0, 0 \leq r < \infty); \\ u_3 &= 0; \quad Q'_{3r} = 0; \quad Q'_{3\theta} = 0 \quad (y_3 = h, 0 \leq r < \infty). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Для задачи о сжатии материала вдоль плоскостей расположения трещин (рис. 42, б) второе граничное условие в (3.73) следует заменить условием  $Q'_{33} = 0$  ( $y_3 = 0, r < a$ ).

С использованием представлений общих решений линеаризованных уравнений равновесия через гармоничные потенциальные функции в виде (2.77), (2.80), а также представляя указанные потенциальные функции в ряды Фурье по окружной координате с коэффициентами в виде интегральных разложений Ханкеля по радиальной координате и разложение функции  $\sigma(r, \theta)$  в ряд Фурье вида (3.52), поставленную задачу отдельно для каждой гармоники по координате  $\theta$  приводят к системе парных интегральных уравнений, а затем к интегральному уравнению Фредгольма второго рода (более подробно см. в [6]), которое для случая неравных корней имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_n(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^a \tilde{\omega}_n(t) K_n(x, t) dt &= \frac{2}{\pi} x \int_0^{\pi/2} \Sigma'_n(x \sin \theta) d\theta; \quad 0 \leq x \leq a, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots; \\ \Sigma_n(x) &= -\frac{1}{C_{44} d l_1} \frac{k_1}{k} x^n \sigma_n(x) \end{aligned} \quad (3.74)$$

с ядром

$$\begin{aligned} K_n(x, t) &= \\ &= \frac{x^{n+1/2}}{k} \int_0^\infty \left[ t^{-n+1/2} J_{n-1/2}(\lambda t) J_{n-1/2}(\lambda x) - a^{-n+1/2} J_{n-1/2}(\lambda a) J_{n-1/2}(\lambda x) \right] \left[ k_1 \frac{e^{-\mu_1}}{sh \mu_1} - k_2 \frac{e^{-\mu_2}}{sh \mu_2} \right] \lambda d\lambda, \end{aligned}$$

где  $\mu_i = \lambda n_i^{-1/2} h$  ( $i = 1, 2$ ), а  $k_1, k_2$  и  $k$  определяются из (3.9).

Из анализа асимптотического распределения напряжений в области трещины, получаем такие выражения для коэффициентов интенсивности напряжений:

$$K_I = -\sqrt{\pi} C_{44} d_1 l_1 \frac{k}{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta) a^{-n/2} \int_0^a \tilde{\omega}_n(t) dt; \quad K_{II} = 0; \quad K_{III} = 0, \quad (3.75)$$

где  $\tilde{\omega}_n(t)$  определяются из (3.74).

Очевидно, что  $K_I$  зависит от начальных напряжений, поскольку параметры, входящие в выражения (3.75) и в интегральное уравнение Фредгольма (3.74), зависят от параметра начального удлинения (или укорочения)  $\lambda_1$ , обусловленного действием начальных напряжений  $S_0^{11} = S_0^{22}$ .

В предельном случае расположения трещин, когда расстояние между ними стремится к бесконечности, из (3.75) с учетом (3.74) получаем такое значение  $K_I$ :

$$K_I^{\infty} \equiv \lim_{h \rightarrow \infty} K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{a^{n+1/2}} \int_0^a \frac{t^{n+1}}{\sqrt{a^2 - t^2}} \sigma_n(t) dt. \quad (3.76)$$

В случае, когда нагрузка на берегах трещин имеет вид  $\sigma(r, \theta) = \sigma_1(r) \cos \theta$ , вводя нормированные на радиус трещин переменные и функции вида  $\xi \equiv a^{-1}x$ ,  $\eta \equiv a^{-1}t$ ,  $f_1(\xi) \equiv a^{-1} \tilde{\omega}_1(a\xi) = a^{-1} \tilde{\omega}_1(x)$ , получаем интегральное уравнение Фредгольма в безразмерном виде:

$$f_1(\xi) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_1(\eta) K_1(\xi, \eta) d\eta = \frac{2}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} \Sigma'_1(\xi \sin \theta) d\theta, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.77)$$

с ядром  $K_1(\xi, \eta) = \xi \left\{ \eta^{-1} [R(\xi - \eta) - R(\xi + \eta)] - [R(\xi - 1) - R(\xi + 1)] \right\}$ ; где

$$R(z) = \frac{1}{k} \left[ \frac{k_1}{\beta_1} \operatorname{Re} \psi \left( 1 + \frac{iz}{2\beta_1} \right) - \frac{k_2}{\beta_2} \operatorname{Re} \psi \left( 1 + \frac{iz}{2\beta_2} \right) \right], \quad (3.78)$$

а  $\operatorname{Re} \psi(1 + iz/2\beta_j)$ ,  $j = 1, 2$  – действительная часть от пси-функции  $\psi(z) = (d \ln \Gamma(z))/dz$  ( $\Gamma(z)$  – гамма-функция).

В этом случае КИН  $K_I$  принимает вид:  $K_I = -\sqrt{\pi a} C_{44} d_1 l_1 \frac{k}{k_1} \int_0^1 f_1(\eta) d\eta \cos \theta$ .

Ниже приведены результаты численного расчета для некоторых высокоэластических материалов в случае загрузки берегов трещины нормальной растягивающей нагрузкой вида  $\sigma(r, \theta) = \sigma_1(r) \cos \theta$ , где  $\sigma_1(r) = \sigma = \text{const}$ .

Так, для материала с упругим потенциалом *Бартенева – Хазановича* на рис. 43, а приведены зависимости отношения  $K_I / K_I^{\infty}$  (де  $K_I^{\infty}$  – КИН, получаемый для задачи об изолированной трещине нормального отрыва и определяемый из (3.76)) от параметра начальных напряжений  $\lambda_1$  для разных значений нормированного на радиус трещин полурасстояния между трещинами  $\beta = h/a$ . Как видим, начальные напряжения оказывают весьма существенное влияние на КИН, особенно в области сжимающих начальных напряжений.

На рис. 43, б для этого же материала приведены зависимости  $K_I / K_I^{\infty}$  от безразмерного полурасстояния между трещинами  $\beta$ . Как видим, взаимовлияние трещин в теле с начальными напряжениями приводит к уменьшению (особенно существенному

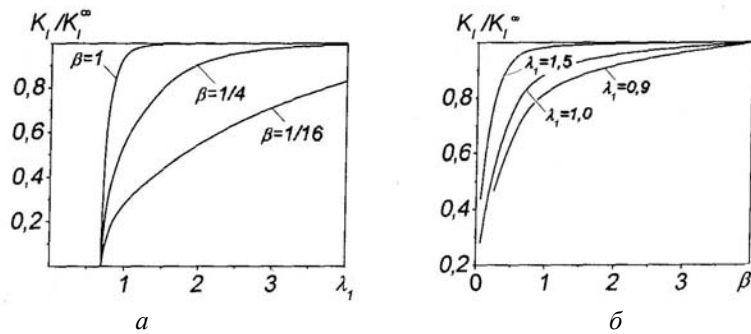


Рис. 43

при малых расстояниях между трещинами) коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$  по сравнению с  $K_I^\infty$ . Так, например, для  $\lambda_1 = 0,9$  значение  $K_I$  при  $\beta = 0,25$  в 2,2 раза меньше, чем  $K_I^\infty$ . При возрастании расстояния между трещинами их взаимное влияние ослабевает, а соответствующие значения КИН стремятся к значению  $K_I^\infty$ .

На рис. 44 и 45 проиллюстрирована зависимость отношений КИН  $K_I/K_I^\infty$  от параметра  $\lambda_1$ , соответственно, для материала с потенциалом Трелора (при разных значениях  $\beta$ ) и материала с потенциалом гармонического типа (при разных значениях коэффициента Пуассона  $\nu$  при  $\beta = 0,25$ ). Как видно из последнего рисунка, сжимаемость материала заметно влияет на значения коэффициентов интенсивности напряжений. Так, при  $\lambda_1 = 0,7$  значение  $K_I$  для материала с потенциалом гармонического типа и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,1$  превышает значение  $K_I$  для этого же материала при  $\nu = 0,5$  на 20%.

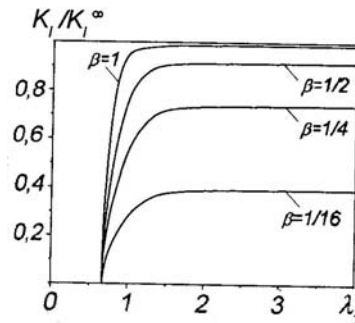


Рис. 44

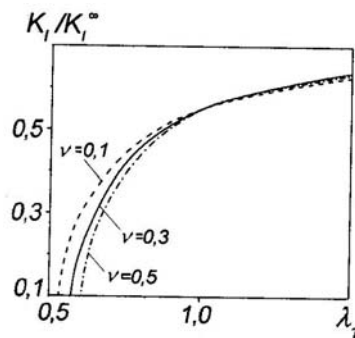


Рис. 45

3.4.2. Осесимметричная задача о трещинах нормального отрыва [64, 68, 123]. На берегах трещин симметрично относительно плоскостей их расположения приложены нормальные напряжения интенсивности  $\sigma(r)$ . В этом случае постановку задачи можно переформулировать для слоя  $0 \leq y_3 \leq h$  с трещиной, расположенной в плоскости  $y_3 = 0$  с граничными условиями на гранях указанного слоя, аналогичными (3.73).

С использованием интегральных преобразования Ханкеля для потенциальных гармонических функций задачу можно свести сначала к парным интегральным уравнениям, а затем к интегральному уравнению Фредгольма второго рода (более подробно см., например, в [68]), которое для случая неравных корней в безразмерной форме имеет вид:

$$f(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(\eta) K(\xi, \eta) d\eta = \frac{2}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} s(\xi \sin \theta) \sin \theta d\theta; \quad s(\xi) \equiv -\frac{k_1 \sigma(a\xi)}{kC_{44}d_1l_1} \quad (3.79)$$

с ядром  $K(\xi, \eta) = R(\xi - \eta) - R(\xi + \eta)$ , где  $R(z)$  имеет вид (3.78).

Значения КИН определяются соотношениями

$$K_I = -C_{44}d_1l_1 \frac{k}{k_1} \sqrt{\pi a} f(1); \quad K_{II} = 0; \quad K_{III} = 0, \quad (3.80)$$

где  $f$  определяется из решения интегрального уравнения (3.79).

Как следует из (3.80), коэффициент интенсивности напряжений  $K_I$  зависит от начальных напряжений. Характер указанной зависимости продемонстрируем на примере численных расчетов для конкретных материалов в случае действия на берегах трещин равномерного нормального нагружения  $\sigma(r) = \sigma = \text{const}$ .

*Материал с потенциалом Бартенева – Хазановича.* Зависимости отношения коэффициентов интенсивности напряжений  $K_I/K_I^\infty$  от параметра начальных удлинений (укорочений)  $\lambda_1$  отражены на рис. 46, а для значений  $\beta = 0,25$  и  $\beta = 1,0$ . Здесь и в дальнейшем сплошные линии соответствуют случаю периодической системы параллельных соосных трещин, а штриховыми линиями приведены для сравнения соответствующие зависимости для случая двух параллельных соосных трещин, полученные в п. 3.3. Как видим, коэффициенты интенсивности напряжений существенно зависят от значений параметра  $\lambda_1$ . Кроме того, для случая периодической системы трещин значения  $K_I/K_I^\infty$  оказываются меньшими, чем для случая двух параллельных соосных трещин (для одних и тех же значений  $\beta$ ).

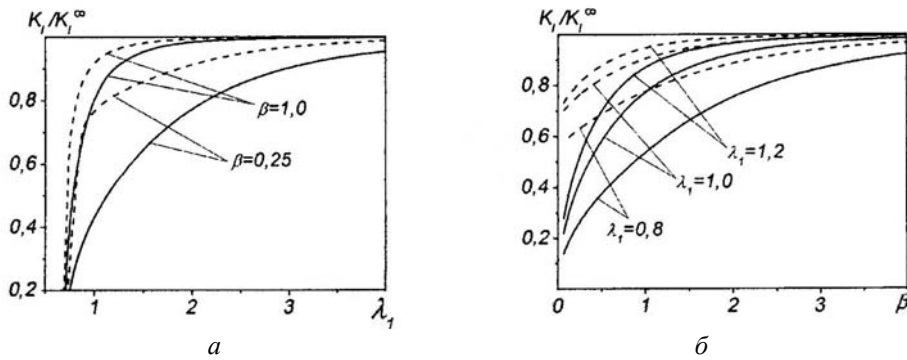


Рис. 46

На рис. 46, б даны зависимости  $K_I/K_I^\infty$  от безразмерного расстояния между трещинами  $\beta$  для  $\lambda_1 = 1,2$  (растягивающие начальные напряжения),  $\lambda_1 = 0,8$  (сжимающие начальные напряжения),  $\lambda_1 = 1,0$  (начальные напряжения отсутствуют). Приведенные данные показывают, что взаимодействие трещин в задаче о периодической системе соосных трещин нормального отрыва, как и в случае двух параллельных соосных трещин нормального отрыва, приводят к снижению величин  $K_I$  по сравнению с величиной  $K_I^\infty$  для одной изолированной трещины в бесконечном материале. С другой стороны, при возрастании расстояния между трещинами их взаимное влияние быстро ослабевает и соответствующие значения КИН стремятся к значениям, получаемым для одной изолированной трещины в бесконечном материале.

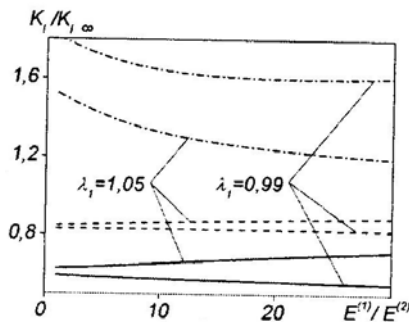


Рис. 47

Аналогичные зависимости получены в [68] для материалов с потенциалами Трелоара и гармонического типа.

*Слоистый двухкомпонентный композит с изотропными слоями.* Рис. 47 для случаев действия в материале начальных растягивающих ( $\lambda_1 = 1,05$ ) и начальных сжимающих ( $\lambda_1 = 0,99$ )



напряжений показывает существенную зависимость соотношений КИН  $K_I / K_I^\infty$  от соотношения модулей упругости слоев (при этом предполагается, что коэффициенты Пуассона материалов слоев  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,3$ , а объемная концентрация материала первого слоя  $c_1 = 0,3$ ). Результаты даны для задач о периодической системе трещин (сплошные линии), о двух параллельных трещинах (штриховые линии), и о приповерхностной трещине (штрих-пунктирные линии), находящихся под действием равномерной нормальной нагрузки, для одинаковых относительных полурасстояний между трещинами (периодическая система трещин, две параллельные трещины) или расстояния между трещиной и свободной границей материала (приповерхностная трещина)  $\beta = 0,5$ .

3.4.3. *Осесимметричная задача для трещин радиального сдвига* [65, 69, 123]. На берегах трещин антисимметрично относительно плоскостей их расположения приложены касательные радиальные напряжения интенсивности  $\tau(r)$ . Эквивалентные граничные условия для слоя  $0 \leq y_3 \leq h$  с трещиной, расположенной в плоскости  $y_3 = 0$ , имеют вид:

$$Q'_{3r} = -\tau(r) \quad (y_3 = 0, 0 < r \leq a), \quad u_r = 0, Q'_{33} = 0 \quad (y_3 = h, 0 \leq r < \infty);$$

$$u_r = 0 \quad (y_3 = 0, a < r < \infty), \quad Q'_{33} = 0 \quad (y_3 = 0, 0 \leq r < \infty).$$

Поставленная задача сводится к разрешающему интегральному уравнению Фредгольма второго рода [69], которое для случая неравных корней в безразмерной форме имеет вид:

$$f(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(\eta) K(\xi, \eta) d\eta = \frac{2}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} p'(\xi \sin \theta) d\theta; \quad p(\xi) = \frac{k_2 \xi \tau(a\xi)}{k C_{44} n_1^{-1/2} d_1} \quad (3.81)$$

с ядром  $K(\xi, \eta) = \xi \eta^{-1} [R_1(\xi - \eta) - R_1(\xi + \eta)] - \xi [R_1(\xi - 1) - R_1(\xi + 1)]$ , где

$$R_1(z) = \frac{1}{k} \left[ \frac{k_1}{\beta_2} \operatorname{Re} \psi \left( 1 + \frac{iz}{2\beta_2} \right) - \frac{k_2}{\beta_1} \operatorname{Re} \psi \left( 1 + \frac{iz}{2\beta_1} \right) \right].$$

Значения КИН определяются соотношениями

$$K_I = 0; \quad K_{II} = C_{44} d_1 n_1^{-1/2} \frac{k}{k_2} \sqrt{\pi a} \int_0^1 f(\eta) d\eta; \quad K_{III} = 0, \quad (3.82)$$

где  $f$  определяется из решения уравнения (3.81).

Как следует из (3.82), коэффициент интенсивности напряжений  $K_{II}$  зависит от начальных напряжений. Характер указанной зависимости приведен ниже на примере некоторых материалов в случае загрузки берегов трещин равномерными сдвиговыми усилиями  $\tau(r) = \tau = \text{const}$ .

На рис. 48 для материала с потенциалом Бартенева – Хазановича дана зависимость отношения коэффициентов интенсивности напряжений  $K_{II} / K_{II}^\infty$  от параметра начальных напряжений  $\lambda_1$  для отдельных значений нормированного на радиус трещин полурасстояния между трещинами  $\beta$  (как и ранее, сплошные линии соответствуют задаче о периодической системе трещин, а штриховые – задаче для двух параллельных трещин). Как видим, коэффициенты интенсивности

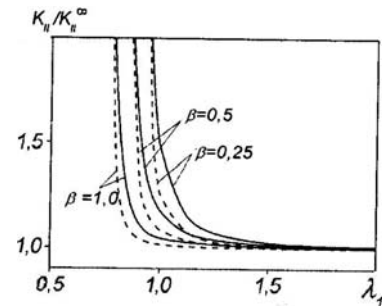


Рис. 48

напряжений существенно зависят от значений параметра  $\lambda_1$ . Кроме того, для случая периодической системы трещин значения  $K_I/K_I^\infty$  оказываются большими, чем для случая двух параллельных соосных трещин (для одних и тех же значений  $\beta$ ). Представленные зависимости в области сжимающих начальных напряжений ( $\lambda_1 < 1$ ) имеют вертикальные асимптоты, соответствующие «резонансному» эффекту, который имеет место при достижении начальными сжимающими напряжениями значений, при которых происходит локальная потеря устойчивости материала (по изгибной относительно плоскостей трещин форме) в окрестности трещин.

В [69, 123] получены аналогичные закономерности влияния начальных напряжений на КИН и для других моделей высокоэластических материалов – материала с потенциалом Трелоара и потенциалом гармонического типа.

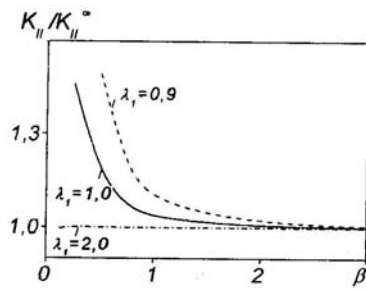


Рис. 49

На рис. 49 для материала с потенциалом Трелоара проиллюстрирована зависимость  $K_{II}/K_{II}^\infty$  от безразмерного полурасстояния между трещинами  $\beta$  для разных значений параметра  $\lambda_1$ . Видим, что взаимовлияние трещин радиального сдвига приводит к увеличению значения коэффициента интенсивности напряжений  $K_{II}$  по сравнению со случаем изолированной трещины в неограниченном теле. При увеличении расстояния между трещинами значения  $K_{II}$  уменьшаются и стремятся к значениям

$K_{II}^\infty$ . При этом при значениях  $\beta > 3$  взаимным влиянием трещин для практических расчетов можно пренебрегать, поскольку в этом случае отличие значений коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности трещин для случая периодической системы трещин отличается от значений КИН для одной трещины в бесконечном теле менее, чем на 3%.

3.4.4. Трещины под действием усилий кручения [123]. К поверхностям трещин приложена антисимметрично относительно плоскостей их расположения касательная окружная нагрузка  $\tau_\theta(r)$ . Коэффициенты интенсивности напряжений в этом случае определяются выражениями

$$K_I = 0; \quad K_{II} = 0; \quad K_{III} = -C_{44}n_3^{-1/2}\sqrt{\pi a} \int_0^1 f(\eta) d\eta, \quad (3.83)$$

а функция  $f$  определяется из решения интегрального уравнения Фредгольма вида:

$$f(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(\eta) K(\xi, \eta) d\eta = -\frac{2}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} q'(\xi \sin \theta) d\theta; \quad q(\xi) = \frac{\xi \tau_\theta(a\xi)}{C_{44}n_3^{-1/2}}.$$

При этом ядро имеет вид

$$K(\xi, \eta) = \frac{\xi}{\beta_3} \left\{ \frac{1}{\eta} [R_3(\xi - \eta) - R_3(\xi + \eta)] - [R_3(\xi - 1) - R_3(\xi + 1)] \right\};$$

$$R_3(z) = \operatorname{Re} \psi(1 + iz/(2\beta_3)).$$

Ниже приведены результаты расчета для некоторых типов материалов при действии на берегах трещины нагрузки вида  $\tau_\theta(r) = \tau = \text{const}$ .

Материал с потенциалом Трелоара. На рис. 50, а, б даны, соответственно, зависимости отношений  $K_{III}/K_{III}^\infty$  от параметра начальных напряжений  $\lambda_1$  и от безраз-

меренного полурасстояния между трещинами  $\beta$  (на первом рисунке сплошные линии соответствуют задаче о периодической системе трещин, а штриховыми – задаче для двух параллельных трещин).

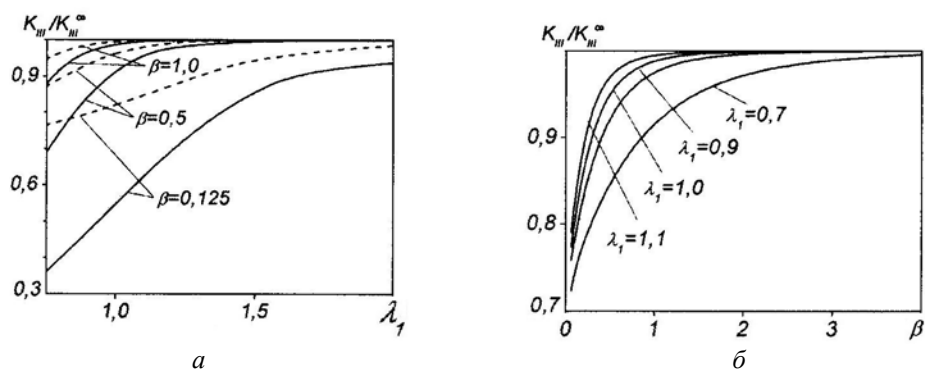


Рис. 50

Как видно из рис. 50, а, начальные напряжения заметно влияют на значения коэффициентов интенсивности напряжений, однако, в отличие от вышерассмотренных задач о предварительно напряженном теле с периодической системой трещин нормального отрыва и радиального сдвига, в задаче о трещинах под действием усилий кручения эффект «резонансного» изменения КИН не обнаруживается.

Зависимости, приведенные на рис. 50, б, показывают, что взаимовлияние трещин приводит к уменьшению (особенно существенному при малых значениях  $\beta$ ) КИН  $K_{III}$  по сравнению с коэффициентом интенсивности напряжений  $K_{III}^{\infty}$ , который был получен в задаче о неограниченном теле с изолированной трещиной под действием крутящей нагрузки. При увеличении расстояния между трещинами величина  $K_{III}$  стремится к значению  $K_{III}^{\infty}$  и при расстоянии между трещинами, превышающем 6 радиусов трещин, различием между указанными величинами КИН можно пренебрегать в виду их малости.

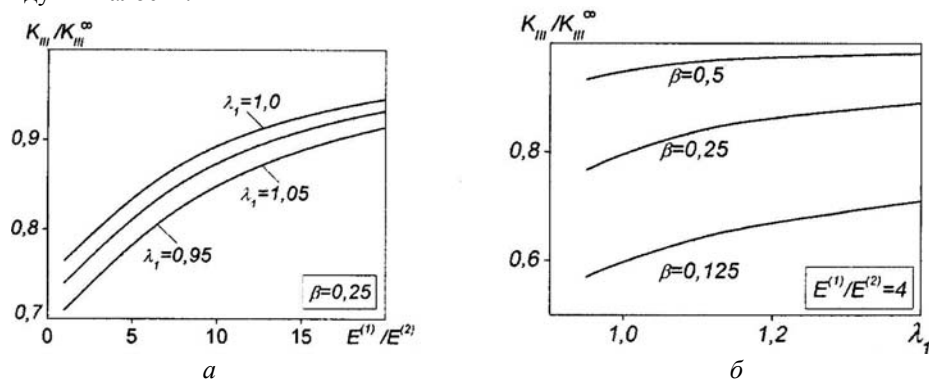


Рис. 51

Слоистый двухкомпонентный композит с изотропными слоями. На рис. 51, а проиллюстрирована зависимость отношения  $K_{III}/K_{III}^{\infty}$  от отношения модулей слоев  $E^{(1)}/E^{(2)}$  при значении  $\beta = 0,25$ . Зависимости приведены для разных значений параметров начального удлинения (укорочения)  $\lambda_1$ . Как видим, значения  $K_{III}/K_{III}^{\infty}$  монотонно возрастают с возрастанием значения  $E^{(1)}/E^{(2)}$ . На рис. 51, б даны зависимости  $K_{III}/K_{III}^{\infty}$  от параметра начальных напряжений  $\lambda_1$  для разных значений  $\beta$  при соот-

ношении модулей упругости слоев  $E^{(1)} / E^{(2)} = 4$ . Как видим, для этого материала эффекты «резонансоподобного» изменения КИН также отсутствуют, поскольку, очевидно, при сжатии материала с периодической системой соосных круговых трещин отсутствует форма потери устойчивости, соответствующая задаче кручения.

*3.4.5. Критические параметры нагружения при сжатии вдоль периодической системы параллельных соосных трещин.* Изложенный в п. 1.4 подход позволяет определить критические (предельные) параметры сжатия, соответствующие локальной потере устойчивости материала при сжатии вдоль периодической системы параллельных соосных трещин (рис. 42, б), непосредственно из решений рассмотренных выше неоднородных задач о напряженно-деформированном состоянии материала с начальными напряжениями, ослабленного периодическим рядом параллельных соосных трещин, как значения начальных сжимающих напряжений, при достижении которых происходит резкое «резонансное» изменение значений коэффициентов интенсивности напряжений.

Так, из результатов, полученных в п. 3.4.3 при исследовании задачи для тела с трещинами радиального сдвига, определяются критические (предельные) параметры сжатия, соответствующие антисимметричной (изгибной) форме локальной потери устойчивости материала при сжатии вдоль периодической системы параллельных трещин. Вместе с тем, в п. 3.4.4 было показано отсутствие «резонансных» эффектов при исследовании задачи о периодической системе трещин под действием усилий кручения, что свидетельствует об отсутствии для указанной геометрической схемы размещения трещин формы потери устойчивости, соответствующей задаче кручения.

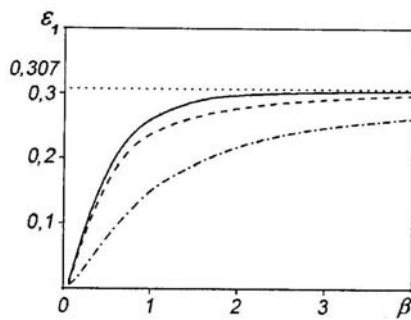


Рис. 52

На рис. 52 представлены результаты вычисления по указанной выше методике относительных критических (предельных) параметров укорочения  $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$  для материала с потенциалом Бартенева – Хазановича. Рисунок иллюстрирует зависимость  $\varepsilon_1$  от значений параметра  $\beta = h/a$ , характеризующего относительные размеры трещин, для периодической системы параллельных трещин (рис. 42, б) (сплошная линия), двух параллельных соосных трещин (рис. 32, б) (штриховая линия), приповерхностной трещины, параллельной свободной поверхности

материала, (рис. 13, б) (штрих-пунктирная линия) и одной изолированной трещины (рис. 10, б) (пунктирная линия). При этом для периодической системы трещин и двух трещин параметр  $\beta$  представляет собой нормированное на радиус трещин полурасстояние между трещинами, а для приповерхностной трещины – нормированное на радиус трещины расстояние между ней и границей тела. Отметим также, что результаты для периодической системы трещин и двух трещин приведены для изгибной формы потери устойчивости, поскольку для симметричной формы критические (предельные) значения  $\varepsilon_1$  существенно превышают критические значения  $\varepsilon_1$  для изгибной формы [33, 68, 69]; в случае приповерхностной трещины значения  $\varepsilon_1$  для изгибной и симметричной форм совпадают (см. п. 3.2).

Из рисунка следует, что взаимовлияние трещин между собой (для периодической системы параллельных трещин и двух параллельных трещин) или со свободной границей материала (для приповерхностной трещины) приводит к существенному снижению значения критического (предельного) укорочения  $\varepsilon_1$  (и, соответственно, к снижению значения критической сжимающей нагрузки) по сравнению со случаем одной изолированной трещины в неограниченном теле (для такой геометрической схемы расположения трещины критическое (предельное) укорочение равно  $\varepsilon_1^* = 0,307$ ). Кроме

того, на всем диапазоне изменения параметра  $\beta$  значения  $\varepsilon_1$  в случае периодической системы трещин оказываются более высокими, чем для случаев двух параллельных трещин и приповерхностной трещины, но ниже, чем для случая одной изолированной трещины, что соответствует соображениям физического характера.

В [123] показано, что аналогичные зависимости критических параметров  $\varepsilon_1$  от  $\beta$  наблюдаются и для материала с потенциалом Трелоара.

В табл. 3 для материала с потенциалом гармонического типа для изгибающей формы потери устойчивости приведены значения  $\varepsilon_1$  для разных значений безразмерного расстояния между трещинами  $\beta$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ , характеризующего сжимаемость материала. При достаточно больших значениях  $\beta$  получаем значения  $\varepsilon_1$ , совпадающие с критическими значениями  $\varepsilon_1^* = (2 + \nu)^{-1}$ , получаемые в задаче об изолированной трещине в бесконечном теле.

Таблица 3

$\nu$	$\beta$								
	0,0625	0,125	0,25	0,50	0,75	1,00	2,00	5,00	10,00
0,1	0,0159	0,0529	0,1377	0,2631	0,338	0,3842	0,4565	0,4756	0,4762
0,2	0,0145	0,0481	0,1247	0,2399	0,3107	0,3562	0,4312	0,4538	0,4545
0,3	0,0133	0,0439	0,113	0,2182	0,2849	0,3291	0,4067	0,4337	0,4347
0,4	0,0123	0,0401	0,102	0,1974	0,2597	0,3023	0,3822	0,4151	0,4166
0,5	0,0114	0,0365	0,0916	0,1769	0,2343	0,2749	0,3567	0,3975	0,3999

На рис. 53 для слоистого двухкомпонентного композита с изотропными слоями приведена зависимость критических безразмерных напряжений сжатия  $\bar{\sigma} = S_0^{11} / E$  (напряжений, отнесенных к приведенному модулю упругости рассматриваемого композита) от соотношения модулей упругости слоев (сплошная линия – для задачи о периодической системе трещин). Здесь же для сравнения приведены зависимости  $\bar{\sigma}$  от  $E^{(1)} / E^{(2)}$  для двух параллельных трещин (штриховая линия) и приповерхностной трещины (штрих-пунктирная линия). Отметим, что приведенные значения критических напряжений сжатия для периодической системы трещин и для двух параллельных трещин соответствуют изгибающей форме потери устойчивости (определялись из решения задач для трещин радиального сдвига), поскольку значения  $\bar{\sigma}$ , соответствующие симметричной форме потери устойчивости (определялись из решения задач для трещин нормального отрыва), оказались, как и для высокоэластических материалов, существенно выше критических значений для изгибающей формы [33, 64, 65].

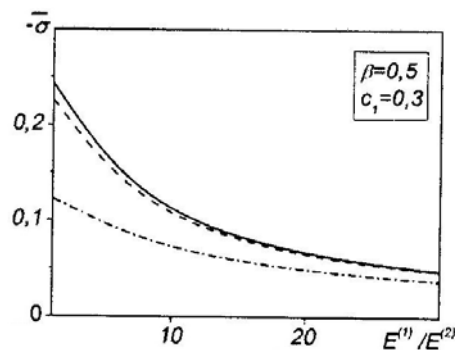


Рис. 53

**3.4.6. Выводы.** На основании приведенных в настоящем разделе результатов исследования задач о периодической системе параллельных соосных круговых трещин в предварительно напряженном материале можно сделать следующие выводы:

для всех рассмотренных типов трещин (трещины нормального отрыва, радиального сдвига и кручения) для неосесимметричных и осесимметричных постановок задач коэффициенты интенсивности напряжений существенно зависят от начальных напряжений;

при действии на берегах трещин радиальной сдвиговой нагрузки обнаруживаются эффекты «резонансного» характера, состоящие в резком стремлении значений коэффициентов интенсивности напряжений к «бесконечности» при приближении начальных сжимающих усилий к значениям, соответствующим локальной потере устойчивости материала в окрестности трещин. Вместе с тем, в случае нагрузки берегов трещин усилиями кручения, указанные «резонансоподобные» явления не наблюдаются, что свидетельствует об отсутствии форм потери устойчивости в условиях сжатия вдоль периодической системы параллельных трещин, соответствующих задаче кручения;

при малых относительных расстояниях между трещинами количественно взаимовлияние трещин проявляется в: снижении значения  $K_I$  при действии на поверхностях трещин нормальных напряжений по сравнению с КИН для одной изолированной трещины нормального отрыва; увеличении значения  $K_{II}$  при действии на берегах трещин радиальных сдвиговых напряжений по сравнению со значением КИН для одной изолированной трещины радиального сдвига; уменьшении значения  $K_{III}$  при действии на берегах трещин нагрузки кручения по сравнению с КИН для одной изолированной трещины кручения;

при увеличении относительного расстояния между трещинами взаимовлияние трещин постепенно ослабевает, а соответствующие значения КИН стремятся к значениям, полученным в задачах для тела с одной изолированной трещиной. При этом при практических расчетах взаимным влиянием системы параллельных трещин можно пренебрегать, когда расстояние между трещинами превышает 6 радиусов трещин;

на основе анализа эффекта «резонансного» увеличения значений коэффициентов интенсивности напряжений, полученных при решении задач для трещин радиального сдвига, при приближении начальных сжимающих усилий к значениям, соответствующим локальной потере устойчивости материала (по изгибной форме) в окрестности трещин, для отдельных моделей материалов определены критические (предельные) параметры при сжатии вдоль периодической системы параллельных соосных трещин;

значения коэффициентов интенсивности напряжений и критических (предельных) параметров сжатия существенно зависят от геометрических параметров задач (расстояния между трещинами и радиуса трещин) и физико-механических характеристик материалов.

#### **4. Заключение.**

В статье выполнен обзор работ по исследованию пространственных задач механики хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями, действующими параллельно плоскостям расположения трещин, и разрушению тел при сжатии вдоль трещин, выполненных с использованием предложенного авторами настоящей статьи объединенного подхода в рамках трехмерной линеаризированной механики деформируемых тел. При этом основные соотношения, постановки задач и полученные разрешающие уравнения представлены в единой общей форме для сжимаемых и несжимаемых изотропных упругих тел с произвольной структурой упругого потенциала и композитов при их моделировании в рамках континуального подхода как трансверсально-изотропных сред.

С использованием указанного подхода рассмотрены неосесимметричные и осесимметричные задачи для изолированных и взаимодействующих трещин в предварительно напряженных телах и исследовано влияние начальных напряжений, механических характеристик материалов и геометрических параметров задач на распределение напряженно-деформированного состояния возле краев трещин. Их анализа эффектов «резонансного» характера, связанных с влиянием начальных напряжений и заключающихся в резком увеличении значений коэффициентов интенсивности напряжений и/или величин раскрытия трещин, определяемых из линеаризованных соотношений, при достижении начальными сжимающими напряжениями значений, соответствующих локальной потере устойчивости материала возле трещин, определены значения критических (предельных) параметров (коэффициентов укорочения вдоль координатных осей и сжимающих напряжений) для задач о сжатии тел вдоль трещин.

Анализ полученных результатов позволяет сделать такие основные выводы.

1. При исследовании задач для изолированных свободных трещин установлено, что для всех силовых схем (за исключением общей неосесимметричной задачи о круговой трещине сдвига) параметры начального напряженно-деформированного состояния не входят в выражения для коэффициентов интенсивности напряжений, но существенно влияют на величины раскрытия трещин. В то же время для всех рассмотренных постановок задач о предварительно напряженных телах, содержащих взаимодействующие трещины, установлено, что действующие вдоль трещин начальные напряжения оказывают существенное влияние на коэффициенты интенсивности напряжений в окрестностях кончиков трещин.

2. Во всех рассмотренных задачах (за исключением задач кручения) обнаруживается резкое «резонансоподобное» изменение полей напряжений и перемещений при приближении начальных сжимающих усилий к значениям, соответствующим локальной потере устойчивости материала в окрестностях трещин, что позволяет определять критические (предельные) параметры сжатия непосредственно из решения соответствующих неоднородных задач механики разрушения материалов с начальными напряжениями.

3. Взаимовлияние трещин между собой (периодическая система трещин, две параллельные трещины) или между трещиной и свободной границей полупространства (приповерхностная трещина) приводит к количественному изменению (особенно существенному для малых значений расстояния между трещинами или между трещиной и границей полупространства) значений коэффициентов интенсивности напряжений по сравнению со значениями КИН, получаемыми для изолированной трещины в бесконечном материале. С другой стороны, при увеличении расстояния между трещинами (или между трещиной и свободной границей полупространства) указанное взаимовлияние постепенно ослабевает, а значения коэффициентов интенсивности напряжений в окрестностях краев трещин стремятся к соответствующим значениям, полученным в случае изолированной трещины в бесконечном материале.

4. В задачах механики разрушения предварительно напряженных материалов взаимовлияние двух параллельных соосных трещин, а также взаимовлияние приповерхностной трещины со свободной поверхностью тела приводит к изменениям качественного характера в распределении напряжений в окрестностях краев трещин, а именно, к ненулевым значениям КИН  $K_{II}$  в случаях трещин, находящихся под действием нормальных нагрузок, и к ненулевым значениям КИН  $K_I$  при действии на трещины радиальных сдвиговых нагрузок. Эти эффекты аналогичны тем, которые были обнаружены в подобных задачах механики разрушения тел без начальных напряжений, содержащих взаимодействующие трещины.

5. Механические характеристики материалов оказывают существенное влияние на значения коэффициентов интенсивности напряжений.

6. Значения критических (предельных) параметров сжатия, соответствующих локальной потере устойчивости материала в окрестностях трещин, существенно зависят от геометрических параметров задач (радиусов трещин, расстояний между трещинами или между трещиной и границей материала) и от механических характеристик материалов.

Дальнейшие исследования по проблемам хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями, действующими параллельно трещинам, и разрушения тел при сжатии вдоль трещин в рамках проанализированного в данной статье объединенного подхода могут, по мнению авторов, развиваться по таким актуальным направлениям:

постановка и решение задач для более сложных схем расположения трещин в материалах с начальными напряжениями, в частности, для тел с системами трещин, которые смещены в параллельных плоскостях друг относительно друга (до настоящего времени исследованы задачи для тел с начальными напряжениями, содержащих изолированные трещины, одну приповерхностную трещину, две и периодическую систему параллельных соосных внутренних трещин). Отметим, что в последние годы были исследованы задачи о сжатии слоистых композитов с трещинами, расположенными на границах раздела разных слоев и смещенными друг относительно друга (см., например, [149]);

исследование задач механики разрушения предварительно напряженных материалов с трещинами и задач о разрушении тел при сжатии вдоль трещин, когда трещины имеют усложненные (некруговые) в плане контуры;

постановка и решение задач механики разрушения материалов с начальными напряжениями с применением кусочно-однородных моделей композитных материалов, что является важным для более полного учета их структуры;

постановка и решение пространственных задач с учетом несимметричности начального напряженно-деформированного состояния, обусловленного действием начальных напряжений (до настоящего времени рассмотрены случаи одинаковых начальных напряжений вдоль осей  $Oy_1$  и  $Oy_2$ , рис. 8);

постановка и решение задач при неоднородных начальных напряженно-деформированных состояниях;

анализ асимптотики решений задач для предварительно напряженных тел с трещинами при стремлении к нулю расстояния между параллельными соосными трещинами или между трещиной и поверхностью тела (отметим, что исследование указанной асимптотики для пространственных задач о сжатии тел с взаимодействующими трещинами проведено, например, в [113]).

**РЕЗЮМЕ.** В даній оглядовій статті виконано аналіз результатів дослідження просторових задач про руйнування матеріалів з тріщинами в умовах дії зусиль, спрямованих вздовж тріщин. З використанням об'єднаного підходу, що базується на співвідношеннях тривимірної лінеаризованої механіки деформівних тіл, розглянуто два неklasичних механізми крихкого руйнування: руйнування матеріалів з початковими напруженнями, що діють вздовж тріщин, та руйнування тіл при стиску вздовж паралельних тріщин. Узагальнено результати дослідження неосесиметричних та осесиметричних задач для найбільш характерних геометричних схем розташування тріщин в попередньо напружених матеріалах з точки зору їх взаємодії між собою та з граничними поверхнями. При дослідженні використовуються представлення напружень та переміщень лінеаризованої теорії через гармонічні потенціалні функції. Шляхом застосування інтегральних перетворень Ханкеля задачі для взаємодіючих тріщин зводяться до розв'язуючих інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Підхід дозволяє проводити дослідження задач в єдиній загальній формі для стисливих та нестисливих однорідних ізотропних чи трансверсально-ізотропних пружних тіл з довільною структурою пружного потенціалу стосовно до теорій скінченних та малих початкових деформацій, а конкретизація моделі матеріалу здійснюється лише на етапі чисельного розрахунку отриманих в загальному вигляді розв'язуючих рівнянь. Виконано аналіз нових механічних ефектів, пов'язаних з впливом початкових напружень та взаємодії тріщин на асимптотичний розподіл напружень і переміщень біля кінчиків тріщин. Виявлено ефекти «резонансного» характеру при наближенні стискаючих початкових напружень до значень, що відповідають локальній втраті стійкості матеріалу в околі тріщин, що відповідно до зазначеного об'єднаного підходу дозволяє визначити критичні (граничні) параметри навантаження при стиску тіл вздовж тріщин. Зроблено висновки про характер залежностей коефіцієнтів інтенсивності напружень та критичних (граничних) параметрів стиску від геометричних параметрів задач та фізико-механічних характеристик матеріалів.

1. Александров В.М., Соболев Б.В. Равновесие предварительно напряженного упругого тела, ослабленного плоской эллиптической трещиной // Прикл. математика и механика. – 1985. – 49, № 2. – С. 348 – 352.
2. Бабич В.М., Гузь А.Н., Назаренко В.М. Приповерхностная дискообразная трещина нормального отрыва в полубесконечном теле с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 7. – С. 18 – 25.
3. Бартенев Г.М., Хазанович Т.Н. О законе высокоэластичных деформаций сеточных полимеров // Высокомолекулярные соединения. – 1960. – 2, № 1. – С. 21 – 28.
4. Богданов В.Л. Об исследовании осесимметричных задач линеаризованной механики разрушения для тела с двумя параллельными трещинами // Матем. методы та фіз. – мех. поля. – 2006. – 49, № 1. – С. 146 – 158.



5. *Богданов В.Л.* Осесимметрична задача про приповерхневу тріщину нормального відриву в композитному матеріалі з залишковими напруженнями // Матем. методи та фіз. – мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – С. 45 – 54.
6. *Богданов В.Л.* Неосесимметричная задача о периодической системе дискообразных трещин нормального отрыва в теле с начальными напряжениями // Матем. методи та фіз. – мех. поля. – 2007. – **50**, № 4. – С. 149 – 159.
7. *Богданов В.Л.* О кручении предварительно напряженного материала с двумя параллельными соосными трещинами // Доповіді НАН України. – 2008. – № 11. – С. 59 – 66.
8. *Богданов В.Л.* Неосесимметрична задача про дві паралельні співвісні тріщини нормального відриву в матеріалі з початковими напруженнями // Доп. НАН України. – 2010. – № 8. – С. 49 – 59.
9. *Богданов В.Л., Назаренко В.М.* Сжатие композитного материала вдоль приповерхностной макротрещины // Механика композитных материалов. – 1994. – **30**, № 3. – С. 352 – 358
10. *Болотин В.В.* Повреждение и разрушение композитов по типу расслоений // Механика композит. материалов. – 1987. – № 3. – С. 424 – 432.
11. *Гузь А.Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1971. – 276 с.
12. *Гузь А.Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – К.: Наук. думка, 1973. – 272 с.
13. *Гузь А.Н.* К линеаризованной теории разрушения хрупких тел с начальными напряжениями // Докл. АН СССР. – 1980. – **252**, № 5. – С. 1085 – 1088.
14. *Гузь А.Н.* Теория трещин в упругих телах с начальными напряжениями (постановка задач, трещины отрыва) // Прикл. механика. – 1980. – **16**, № 12. – С. 3 – 14.
15. *Гузь А.Н.* Теория трещин в упругих телах с начальными напряжениями (трещины сдвига, предельные случаи) // Прикл. механика. – 1981. – **17**, № 1. – С. 3 – 13.
16. *Гузь А.Н.* Теория трещин в упругих телах с начальными напряжениями (высокоэластические материалы) // Прикл. механика. – 1981. – **17**, № 2. – С. 11 – 21.
17. *Гузь А.Н.* Теория трещин в упругих телах с начальными напряжениями (жесткие материалы) // Прикл. механика. – 1981. – **17**, № 4. – С. 3 – 9.
18. *Гузь А.Н.* Теория трещин в упругих телах с начальными напряжениями (задачи расклинивания) // Прикл. механика. – 1981. – **17**, № 5. – С. 3 – 12.
19. *Гузь А.Н.* Теория трещин в упругих телах с начальными напряжениями (пространственные статические задачи) // Прикл. механика. – 1981. – **17**, № 6. – С. 3 – 20.
20. *Гузь А.Н.* Пространственные задачи для дискообразной трещины в упругом теле с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1981. – **17**, № 11. – С. 21 – 30.
21. *Гузь А.Н.* Общая пространственная задача для трещины в упругом теле с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1981. – **17**, № 12. – С. 3 – 12.
22. *Гузь А.Н.* О построении основ механики хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1983. – **19**, № 4. – С. 3 – 23.
23. *Гузь А.Н.* Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
24. *Гузь А.Н.* Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К.: Вища школа, 1986. – 512 с.
25. *Гузь А.Н.* Порядок особенности в вершине трещины в задачах механики хрупкого разрушения материалов // Физ – хим. механика материалов. – 1986. – **22**, № 1. – С. 24 – 29.
26. *Гузь А.Н.* О порядке особенности в кончике трещины в материалах с начальными напряжениями // Докл. АН СССР. – 1986. – **289**, № 2. – С. 310 – 312.
27. *Гузь А.Н.* Механика разрушения композитных материалов при сжатии. – К.: Наук. думка, 1990. – 630 с.
28. *Гузь А.Н.* Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1991. – 288 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 – х т., 5 – ти кн. / Под общ. ред. А.Н.Гузя.; Т.2).

29. Гузь А.Н. О неклассических проблемах механики разрушения // Физ. – хим. мех. мат. – 1993. – **29**, № 3. – С. 86 – 97.
30. Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: В 2 – х т. – К.: Литера, 2008.  
Т.1. Разрушение в структуре материала. – 592 с.  
Т.2. Родственные механизмы разрушения. – 736 с.
31. Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек – К.: Наук. думка, 1980. – 167 с.
32. Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Кулиев Г.Г., Милованова О.Б. Разрушение и устойчивость тонких тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 184 с.
33. Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Назаренко В.М. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами. – К.: Наук. думка, 1992. – 456 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 – х т., 5 – ти кн. / Под общ. ред. А.Н.Гузя.; Т.4, Кн.1).
34. Гузь А.Н., Каминский А.А., Назаренко В.М. и др. Механика разрушения. – К.: А.С.К., 1996. 342 с. – (Механика композитов: В 12 т. / Под общ. ред. А.Н.Гузя.; Т.5).
35. Гузь А.Н., Ключников Ю.В. Пространственная статическая задача для эллиптической трещины в упругом теле с начальными напряжениями. – Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 10. – С. 22 – 31.
36. Гузь А.Н., Назаренко В.М. Механика разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (Обзор). Высокоэластические материалы // Прикл. механика. – 1989. – **25**, № 9. – С. 3 – 22.
37. Гузь А.Н., Назаренко В.М. Механика разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (Обзор). Конструкционные материалы // Прикл. механика. – 1989. – **25**, № 10. – С. 3 – 19.
38. Гузь А.Н., Назаренко В.М., Никонов В.А. Кручение полупространства с начальными напряжениями, содержащего приповерхностную дискообразную трещину // Прикл. механика. – 1991. – **27**. – № 10. – С. 24 – 30.
39. Гузь И.А. Устойчивость композита при сжатии вдоль трещины на границе раздела слоев // ДАН СССР. – 1992. – **325**, № 3. – С. 455 – 458.
40. Ключников Ю.В. Пространственная статическая задача для внешней дискообразной трещины в упругом теле с начальными напряжениями. – Прикл. механика. – 1984. – **20**. – № 2. – С. 8 – 15.
41. Композиционные материалы. В 8 – и т. Т.2. Механика композиционных материалов / Под ред. Дж. Сендечки. – М.: Мир, 1978. – 565 с.
42. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Розвиток найдрібніших тріщин в твердому тілі // Прикл. механика. – 1959. – **5**. – № 4. – С. 391 – 401.
43. Махненко В.И. Ресурс безопасной эксплуатации сварных соединений и узлов современных конструкций. – К.: Наук. думка, 2006. – 619 с.
44. Махненко В.И., Шекера В.М., Кравцов Т.Г., Севрюков В.В. Влияние последующей механической обработки на перераспределение остаточных напряжений в наплавленных валах // Автомат. сварка. – 2001. – № 7. – С. 3 – 6.
45. Михайлов А.М. Обобщение балочного подхода к задачам теории трещин // Журн. прикл. механики и техн. физики – 1969. – № 3. – С. 171 – 174.
46. Неклассические проблемы механики разрушения: в 4 – х томах, 5 – и книгах. / Под общ. ред. А.Н.Гузя. – К.: Наук. думка, 1990 – 1993.  
Т.1. Каминский А.А. Разрушение вязкоупругих тел с трещинами, 1990. – 312 с.  
Т.2. Гузь А.Н. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями, 1991. – 288 с.  
Т.3. Каминский А.А., Гаврилов Д.А. Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами, 1992. – 248 с.  
Т.4, кн. 1. Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Назаренко В.М. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами, 1992. – 396 с.  
Т.4, кн. 2. Гузь А.Н., Зозуля В.В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках, 1993. – 240 с.

47. *Полилов А.Н., Работнов Ю.Н.* Развитие расслоений при сжатии композитов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – № 4. – С. 166 – 171.
48. *Примаченко О.В., Бабич С.Ю.* Осесимметричная задача для трещины нормального отрыва в предварительно напряженном слое // Прикл. механика. – 1992. – **28**. – № 7. – С. 18 – 24.
49. *Розен Б.У.* Механика упрочнения композитов. В: «Волокнистые композиционные материалы. – Москва: Мир, 1967». – С. 54 – 96.
50. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 404 с.
51. *Филиппова Л.М.* О влиянии начальных напряжений на раскрытие круговой трещины // Прикл. математика и механика. – 1983. – **47**. – № 2. – С. 286 – 290.
52. *Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Е.Н.Шикун, Назаренко Л.В.* Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – К.: Наук. думка, 1993. 390 с. – (Механика композитов: В 12 т. / Под общ. ред. А.Н.Гузя.; Т.3).
53. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения – М.: Наука, 1974. – 640 с.
54. *Шульга Н.А., Томашевский В.Т.* Технологические напряжения и деформации в материалах. – К.: «А.С.К», 1997. – 394 с. – (Механика композитов: В 12 т. / Под общ. ред. А.Н.Гузя.; Т. 6).
55. *Ainsworth R.A., Sharples J.K., Smith S.D.* Effects of residual stresses on fracture behaviour – experimental results and assessment methods // J. of Strain Analysis for Engineering Design. – 2000. – **35**, N 4. – P. 307 – 316.
56. *Akbarov S.D.* Three – Dimensional Stability Loss Problems of Viscoelastic Composite Materials and Structural Members // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 10. – P. 3 – 27.
57. *Akbarov S.D.* Stability loss and buckling delamination. – Berlin: Springer, 2012. – 450 p.
58. *Akbarov S.D., Guz A.N.* Mechanics of curved composites. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. – 464 p.
59. *Atkinson C., Craster R.V.* Theoretical aspects of fracture mechanics // Prog. Aerospace Sci. – 1995. – **31**. – P. 1 – 83.
60. *Bogdanov V.L.* On a circular shear crack in a semi-infinite composite with initial stresses // Material Science. – 2007. – **43**, N 3. – P. 321 – 330.
61. *Bogdanov V.L.* Effect of residual stresses on fracture of semi – infinite composites with cracks // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2008. – **15**, N 6. – P. 453 – 460.
62. *Bogdanov V.L.* Influence of initial stresses on fracture of composite materials containing interacting cracks // J. of Math. Sci. – 2010. – **165**, N 3. – P. 371 – 384.
63. *Bogdanov V.L.* Nonaxisymmetric problem of the stress – strain state of an elastic half – space with a near – surface circular crack under the action of loads along it // J. of Math. Sci. – 2011. – **174**, N 3. – P. 341 – 366.
64. *Bogdanov V.L.* Influence of initial stresses on the stressed state of a composite with a periodic system of parallel coaxial normal tensile cracks // J. of Math. Sci. – 2012. – **186**, N 1. – P. 1 – 13.
65. *Bogdanov V.L.* On the interaction of a periodic system of parallel coaxial radial – shear cracks in a prestressed composite // J. of Math. Sci. – 2012. – **187**, N 5. – P. 606 – 618.
66. *Bogdanov V.L.* Influence of initial stresses on the fracture of a composite material with a near – surface mode III crack // J. of Math. Sci. – 2014. – **174**, N3. – P. 1 – 14.
67. *Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Fracture of Semi-infinite Material with a Circular Surface Crack in Compression Along the Crack Plane // Int. Appl. Mech. – 1992. – **28**, N 11. – P. 687 – 704.
68. *Bogdanov V.L., Guz A. N., Nazarenko V. M.* Fracture of a Body with a Periodic Set of Coaxial Cracks under Forces Directed Along them: an Axisymmetric Problem // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 2. – P. 111 – 124.
69. *Bogdanov V.L., Guz A. N., Nazarenko V. M.* Stress-strain State of a Material under Forces Acting Along a Periodic Set of Coaxial Mode II Penny-Shaped Cracks // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 12. – P. 1339 – 1350.

70. Bogdanov V.L., Guz A. N., Nazarenko V. M. Nonclassical Problems in the Fracture Mechanics of Composites with Interacting Cracks // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 1. – P. 64 – 84.
71. Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Study of the Compressive Failure of a Semi-Infinite Elastic Material with a Harmonic Potential // Int. Appl. Mech. – 1994. – **30**, N 10. – P. 760 – 765.
72. Bogdanov V.L. Mutual influence of two parallel coaxial cracks in a composite material with initial stresses // Materials Science. – 2008. – **44**, N 4. – P. 530 – 540.
73. Bolotin V.V. Stability problems in fracture mechanics. – New York: John Wiley and Sons, 1994. – 183 p.
74. Cotterell B. The past, present, and future of fracture mechanics // Eng. Fract. Mech. – 2002. – **69**. – P. 533 – 553.
75. Dhaliwal R.S., Singh B.M., Rokne J.G. Axisymmetric contact and crack problems for an initially stressed neo – Hookean elastic layer // Int. J. Eng. Sci. – 1980. – **18**, N 1. – P. 169 – 179.
76. Dewald A.T., Hill M.R. Eigenstrain – based model for prediction of laser peening residual stresses in arbitrary three – dimensional bodies. Part 1: model description // J. Strain Analysis. – 2009. – **44**. – P. 1 – 11.
77. Dvorak G.J. Composite materials: Inelastic behavior, damage, fatigue and fracture // Int. J. of Solids Struct. – 2000. – **37**, N 1 – 2. – P. 155 – 170.
78. Erdogan F. Fracture mechanics // Int. J. of Solids Struct. – 2000. – **37**, N 1 – 2. – P. 171 – 183.
79. Eshelby J.D. The force on the elastic singularity // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. – 1951. – **244**. – P. 87 – 112.
80. Griffith A.A. The phenomenon of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. – 1920. – **221**. – P. 163 – 198.
81. Guz A.N. Breakaway cracks in elastic bodies with initial stresses // Doklady Akademii Nauk SSSR – 1980. – **254**, N 3. – P. 571 – 574.
82. Guz A.N. Spatial problem for shear cracks in elastic bodies with initial stresses // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1981. – **257**, N 3. – P. 562 – 565.
83. Guz A.N. A criterion of solid body destruction during compression along cracks (Two – dimensional problem) // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1981. – **259**, N 6. – P. 1315 – 1318.
84. Guz A.N. A criterion of solid body destruction under compression along cracks (A 3 – dimensional problem) // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1981. – **261**, N 1. – P. 42 – 45.
85. Guz A.N. Moving cracks in elastic bodies with initial stresses // Sov. Appl. Mech. – 1982. – **18**, N 2. – P. 132 – 136.
86. Guz A.N. Fracture mechanics of composites in compression along cracks // Sov. Appl. Mech. – 1982. – **18**, N 6. – P. 489 – 493.
87. Guz A.N. Energy criteria of the brittle fracture of materials with initial stresses // Sov. Appl. Mech. – 1982. – **18**, N 9. – P. 771 – 775.
88. Guz A.N. On the criterion of brittle fracture of materials with initial stresses // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1982. – **262**, N. 2. – P. 285 – 288.
89. Guz A.N. On the Development of Brittle – Fracture Mechanics of Material with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 1996. – **32**, N 4. – P. 316 – 323.
90. Guz A.N. On Non – Classical Problems and Mechanisms of Fracture Mechanics and its Description // Int. Appl. Mech. – 1996. – **32**, N 11. – P. 827 – 844.
91. Guz A.N. Order of Singularity in Problems of Mechanics of Brittle Fracture of Materials with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, N 2. – P. 103 – 107.
92. Guz A.N. Some modern problems of physical mechanics of fracture. In: “Fracture. A Topical Encyclopedia of Current Knowledge. Ed. by Gennady P. Cherepanov”. – Krieger Publ. Company, Florida, USA. – 1998. – P. 709 – 720.
93. Guz A.N. Dynamic Problems of the Mechanics of the Brittle Fracture Materials with Initial Stresses for Moving Cracks. 1. Problem Statement and General Relations // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, N 12. – P. 1175 – 1186.

94. *Guz A.N.* Dynamic Problems of the Mechanics of the Brittle Fracture Materials with Initial Stresses for Moving Cracks. 2. Cracks of Normal Separation (Mode I) // *Int. Appl. Mech.* –1999. –**35**, N 1. – P. 1 – 12.
95. *Guz A.N.* Dynamic Problems of the Mechanics of the Brittle Fracture Materials with Initial Stresses for Moving Cracks. 3. Transverse – Shear (Mode II) and Longitudinal – Shear (Mode III) Cracks // *Int. Appl. Mech.* –1999. – **35**, N 2. – P. 109 – 119.
96. *Guz A.N.* Dynamic Problems of the Mechanics of the Brittle Fracture Materials with Initial Stresses for Moving Cracks. 4. Wedge Problems // *Int. Appl. Mech.* –1999. – **35**, N 3. – P. 225 – 232.
97. *Guz A.N.* Fundamentals of the Three – Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. – Berlin: Springer – Verlag, 1999. – 555 p.
98. *Guz A.N.* Description and Study of Some Nonclassical Problems of Fracture Mechanics and Related Mechanisms // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 12. – P. 1537 – 1564.
99. *Guz A.N.* Constructing the Three – Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 1. – P. 1 – 37.
100. *Guz A.N.* Moving cracks in composite materials with initial stresses // *Mech. Compos. Materials.* – 2001. – **37**, N 5/6. – P. 695 – 708.
101. *Guz A.N.* Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 1. – P. 23 – 59.
102. *Guz A.N.* Critical Phenomena in Cracking of the Interface Between two Prestressed Materials. 1. Problem Formulation and Basic Relations // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 4. – P. 423 – 431.
103. *Guz A.N.* Critical Phenomena in Cracking of the Interface Between Two Prestressed Materials. 2. Exact Solution. The Case of Unequal Roots // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 5. – P. 548 – 555.
104. *Guz A.N.* Critical Phenomena in Cracking of the Interface Between Two Prestressed Materials. 3. Exact Solution. The Case of Equal Roots // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 6. – P. 693 – 700.
105. *Guz A.N.* Critical Phenomena in Cracking of the Interface Between Two Prestressed Materials. 4. Exact Solution. The Case of Unequal and Equal Roots // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 7. – P. 806 – 814.
106. *Guz A.N.* Comments on “Effects of prestresses on crack – tip fields in elastic incompressible solids” // *Int. J. Solids Struct.* – 2003. – **40**, N 5. – P. 1333 – 1334.
107. *Guz A.N.* On Some Nonclassical Problems of Fracture Mechanics Taking into Account the Stresses along Cracks // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 8. – P. 937 – 942.
108. *Guz A.N.* On study of nonclassical problems of fracture and failure mechanics and related mechanisms // *ANNALS of the European Academy of Sciences.* – 2006 – 2007. – P. 35 – 68.
109. *Guz A.N.* On Study of Nonclassical Problems of Fracture and Failure Mechanics and Related Mechanisms // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 1. – P. 3 – 40.
110. *Guz A.N.* Mechanics of Crack Propagation in Materials with Initial (Residual) Stresses (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 2. – P. 121 – 169.
111. *Guz A.N.* Stability of Elastic Bodies under Uniform Compression (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 3. – P. 241 – 293.
112. *Guz A.N.* Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed along Cracks (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 1. – P. 1 – 57.
113. *Guz A.N., Dovzhik M.V., Nazarenko V.M.* Fracture of a Material Compressed along a Crack Located at a Short Distance from the Free Surface // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 6. – P. 627 – 635.
114. *Guz A.N., Dyshel' M.Sh., Nazarenko V.M.* Fracture and Stability of Materials and Structural Members with Cracks: Approaches and Results // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 12. – P. 1323 – 1359.
115. *Guz A.N., Guz I.A.* Analytical solution of stability problem for two composite halfplane compressed along interacting cracks // *Composites, Part B.* – 2000. – **31**, N 5. – P. 405 – 411.
116. *Guz A.N., Guz I.A.* On the Publications on the Brittle Fracture Mechanics of Prestressed Materials // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **29**, N 7. – P. 797 – 801.
117. *Guz A.N., Guz I.A.* Mixed Plane Problems of Linearized Solid Mechanics. Exact Solutions // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 1. – P. 1 – 29.

118. *Guz A.N., Guz I.A., Menshikov A.V., Menshikov V.A.* Three – Dimensional Problems in the Dynamic Fracture Mechanics of Materials with Interface Cracks (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 1. – P. 1 – 61.
119. *Guz A.N., Knukh V.I., Nazarenko V.M.* Compressive failure of materials with two parallel cracks: small and large deformation // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 1989. – **11**. – P. 213 – 223.
120. *Guz A.N., Nazarenko V.M.* Symmetric failure of the half – space with penny – shaped cracks in compression // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 1985. – **3**, N 3. – P. 233 – 245.
121. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Bogdanov V.L.* Nonaxisymmetric compressive failure of a circular crack parallel to a surface of halfspace // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 1995. – **22**. – P. 239 – 247.
122. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Bogdanov V.L.* Fracture under initial stresses acting along cracks: Approach, concept and results // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2007. – **48**. – P. 285 – 303.
123. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Bogdanov V.L.* Combined analysis of fracture under stresses acting along cracks // *Archive of Appl. Mechanics* – 2013. – **83**, N 9. – P. 1273 – 1293.
124. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Starodubtsev I.P.* On problems of fracture of materials in compression along two unternal parallel cracks // *Appl. Math. Mech.* – 1997. – **18**, N 6. – P. 517 – 528.
125. *Guz I.A.* On modelling of a failure mechanism for layered composites with interfacial cracks // *ZAMM* – 1998. – 78, Sub. N 1. – P. S429 – S430.
126. *Guz I.A., Guz A.N.* Stability of Two Different Half – Planes in Compression Along Interfacial Cracks: Analytical Solution // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 7. – P. 906 – 912.
127. *Haughton D.M.* Penny – shaped cracks in a finitely deformed elastic solid // *Int. J. Solids Struct.* – 1982. – **18**, N 8. – P. 699 – 704.
128. *Horii H., Nemat – Nasser S.* Brittle failure in compression: splitting, faulting and brittle – ductile transition // *Phil. Trans. Roy. Soc. London.* – 1986. – A319, N 1549. – P. 337 – 374.
129. *Irwin G.R.* Fracture dynamics // *Fracturing of Metals.* – Cleveland: Amer. Soc. for Metals, 1948. – P. 147 – 166.
130. *Irwin G.R.* Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminium alloys // *Proc. of the 2nd Sagamore Ordinance Materials Conference.* – 1956. – **2**. – P. 289 – 305.
131. *Irwin G.R.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // *J. of Appl. Mechanics.* – 1957. – **24**. – P. 361 – 364.
132. *John F.* Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // *Commun. Pure and Appl. Math.* – 1960. – **13**, N 2. – P. 239 – 296.
133. *Kaminsky A.A.* Mechanics of Long – Term Fracture of Viscoelastic Bodies with Cracks: Theory, Experiment (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 5. – P. 3 – 79.
134. *Karihaloo B., Xiao Q.Z.* Linear and nonlinear fracture mechanics. – New York: Elsevier Science, 2003. – P. 81 – 212. – (Comprehensive Structural Integrity: In 10 vol. / *Int. Adv. Board: Milne J., Ritchie R.O., Karihaloo B.*; Vol. 2).
135. *Kassir M.K., Sih G.C.* Mechanics of Fracture. – Vol. 2. Three dimensional crack problems. – Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1975. – 452 p.
136. *Kurashige M.* Circular crack problem for initially stressed neo – Hookean solid // *ZAMM.* – 1969. – **49**, N 2. – P. 671 – 678.
137. *Murphy J.G., Destade M.* Surface waves and surface stability for pre – stretched, unconstrained, non – linearly elastic half – space // *Int. J. of Non – Linear Mechanics* – 2009. – **44**. – P. 545 – 551.
138. *Nazarenko V.M.* Fracture of plastic masses with translational straine – hardening in compression along near – surface cracks // *Sov. Appl. Mech.* – 1987. – **23**, N 1. – P.61 – 64.
139. *Nazarenko V.M., Bogdanov V.L., Altenbach H.* Influence of initial stress on fracture of a halfspace containing a penny – shaped crack under radial shear // *Int. J. of Fracture.* – 2000. – **104**. – P. 275 – 289.
140. *Obreimoff I.W.* The splitting strength of mica // *Proc. Roy. Soc. of London.* – 1930. – 127A. – P. 290 – 297.
141. *Orowan E.O.* Fundamentals of brittle behavior of metals // *Fatigue and Fracture of Metals* / Ed. W.M.Murray. – London: Willey, 1950. – P. 139 – 167.

142. *Pasha M.L.* Axially symmetric stress distributions in elastic solids containing penny – shaped cracks under torsion // *J. Appl. Mech.* – 1975. – **42**, N 4. – P. 896 – 897.
143. *Rajit S, Dhaliwal R.S., Singh R.M, Rokhe I.G.* Axisymmetric contact and crack problems for initially stressed Neo – Hookean layer // *Int. J. Eng. Sci.* – 1980. – **18**, N 1. – P. 169 – 179.
144. *Rice J.R.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // *J. Appl. Mech.* – 1968. – **35**, N 4. – P. 379 – 386.
145. *Selvadurai A.P.S.* The penny – shaped crack problem for a finitely deformed incompressible elastic solid // *Int. J. Fract.* – 1980. – **16**, N4. – P. 327 – 333.
146. *Treloar L.R.G.* Large elastic deformations in rubber – like materials // *IUTAM Colloquium.* – Madrid, 1955. – P. 208 – 217.
147. *Wang E.Z., Shrive N.G* Brittle fracture in compression: mechanisms, models and criteria // *Eng. Fract. Mech.* – 1995. – **52**, N 6. – P. 1107 – 1126.
148. *Wells A.A.* Application of fracture mechanics at and beyond general yielding // *Brit. Weld. J.* – 1963. – **10**, N 11. – P. 563 – 570.
149. *Winiarsky B., Guz I.A.* The effect of cracks interaction in orthotropic layered materials under compressive loading // *Phil. Trans. Roy. Soc. Series A.* – 2008. – **366**, N 1871. – P. 1835 – 1839.

Поступила 10.09.2014

Утверждена в печать 26.05.2015

