

Л. В. Мольченко¹, И. И. Лоос²

**ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ МАГНИТОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ГИБКИХ
ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С ОРТОТРОПНОЙ
ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬЮ**

*Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, пр. Глушкова, 4 Е,
03127, Киев, Украина; e-mail: ¹ Mol_lv@univ.kiev.ua, ² Loiri@univ.kiev.ua*

Abstract. A statement of axisymmetric nonlinear problem of magnetoelasticity for an orthotropic shell with orthotropic electroconductivity is given. The system of nonlinear differential equations that describes the stress-strain state of flexible orthotropic shell of revolution in the mechanical and magnetic fields is obtained. The numerical examples are proposed. In particular, an analysis is carried out for the stress state of orthotropic plate in dependence on tangential component of magnetic induction and for the stress state of spherical shell in dependence on the external current and mechanical force.

Key words: orthotropic shell, magnetic field, magnetoelasticity.

Введение.

Развитие современной техники, эксплуатация которой связана с нагружением в условиях взаимодействия разных физических факторов, обуславливает необходимость создания и разработки теории сопряженных полей упругих тел. Основываясь на этой теории, могут быть решены важные для технического применения задачи движения электропроводного тела в магнитном поле. В механике сопряженных полей существенное место занимают вопросы изучения движения оболочек вращения с учетом электромагнитных эффектов [11 – 18]. Исследование механики связанных полей в деформируемых телах имеют как фундаментальный [8 – 10, 19, 20, 23], так и прикладной характер, что придает им особую актуальность.

В современной технике все чаще используются конструкционные материалы, которые в недеформированном состоянии являются анизотропными.

В данной работе изложена теория и построены уравнения магнитоупругости гибких ортотропных оболочек вращения с учетом ортотропной электропроводности в геометрически нелинейной постановке. На основании предложенной методики решения данного класса задач приведены численные примеры расчета гибких ортотропных кольцевой пластины и усеченной сферической оболочки.

§1. Электромагнитные свойства ортотропных сред.

В изотропных средах векторы \vec{D} и \vec{E} (электрическая индукция и напряженность электрического поля), а также \vec{B} и \vec{H} (магнитная индукция и напряженность магнитного поля) параллельны. Параметры относительной электрической проводимости σ , магнитной проницаемости μ и диэлектрической проницаемости ε в этом случае являются постоянными.

В анизотропных средах, в крайнем случае, один из этих параметров является тензором. В общем виде они представляются в виде симметричных тензоров второго ранга $\sigma_{ij}, \mu_{ij}, \varepsilon_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$).

Таким образом, материальные соотношения электродинамики, обобщенный закон Ома и выражения пондеромоторных сил запишем, соответственно, в виде

$$\vec{B} = \mu_{ij} \vec{H}; \vec{D} = \varepsilon_{ij} \vec{E}; \vec{J} = \sigma_{ij} (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}); \rho \vec{F}^{\wedge} = \sigma_{ij} (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B}, \quad (1)$$

где \vec{J} – плотность электрического тока; $\rho \vec{F}^{\wedge}$ – сила Лоренца; \vec{V} – скорость деформирования.

Исходя из кристаллографии [4, 22], для класса проводящих ортотропных тел с ромбической кристаллической структурой тензора $\sigma_{ij}, \mu_{ij}, \varepsilon_{ij}$ принимают диагональный вид. Как и любой симметричный тензор второго ранга, тензора электропроводности путем соответствующего выбора осей координат могут быть приведены к диагональному виду. Таким образом, в общем виде, тензора $\sigma_{ij}, \mu_{ij}, \varepsilon_{ij}$ определяются тремя независимыми величинами. В зависимости от вида симметрии кристалла число главных значений тензоров может быть и меньше трех.

В кристаллах триклинной, моноклинной и ромбической структур все три главные значения разные. При этом в кристаллах триклинной структуры направления главных осей тензоров не связаны однозначно с кристаллографическими направлениями. В кристаллах моноклинной структуры заранее определено направление одной из главных осей. В кристаллах ромбической структуры определены все три главные оси тензоров, а в кристаллах тетрагональной, ромбоэдрической и гексагональной структур два из трех главных значений совпадают, так что есть всего две независимые величины.

§2. Постановка задачи. Основные уравнения.

Предполагая, что на тело действует внешнее магнитное поле, уравнения магнитоупругости в лагранжевых переменных, в области занимаемом телом (внутренняя задача), представим в виде [5, 6]:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \text{rot} \vec{H} = \vec{J}; \quad (2)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0; \text{div} \vec{D} = 0;$$

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \rho (\vec{F} + \vec{F}^{\wedge}) + \text{div} \vec{P}, \quad (3)$$

где \vec{E} – напряженность электрического поля; \vec{H} – напряженность магнитного поля; \vec{B} – магнитная индукция; \vec{D} – электрическая индукция; \vec{J} – плотность электрического тока; ρ – плотность материала; \vec{F} – объемная механическая сила; \vec{F}^{\wedge} – объемная сила Лоренца; \vec{V} – скорость деформирования.

Для рассматриваемого случая квадратичной нелинейности [2, 3, 7] принимаем, что деформации и сдвиги малы в сравнении с углами поворота элемента, а сами углы существенно меньше единицы. Как отмечено выше, упругие свойства материала соответствуют ортотропному телу, главные направления упругости которого совпадают с направлениями соответствующих координатных линий, а электромагнитные свойства материала характеризуются ортотропной электропроводностью.

Рассмотрим ортотропные оболочки вращения переменной толщины вдоль меридиана, у которых срединная поверхность имеет форму, замкнутую в круговом направлении. Принимаем, что оболочка находится под действием осесимметричного нестационарного механического и магнитного нагружений. Процессами поляризации и намагничивания пренебрегаем.

Срединную поверхность оболочки в недеформированном состоянии отнесем к криволинейной ортогональной системе координат s, θ , где s – длина дуги меридиана, θ – центральный угол в параллельном круге.

Координатные линии $s = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ являются линиями главных кривизн срединной поверхности. Отсчитывая координату γ по нормали к срединной поверхности вращения, отнесем оболочку к ортогональной пространственной системе координат s, θ, γ .

Учитывая диагональный вид тензоров $\sigma_{ij}, \mu_{ij}, \varepsilon_{ij}$ и согласно работам [2, 3, 11, 13, 16 – 18], полная система уравнений осесимметричных ортотропных оболочек вращения в геометрически нелинейной постановке состоит из:

уравнений магнитоупругости –

$$\begin{aligned} \frac{\partial(rN_s)}{\partial s} - \cos\varphi N_\theta + \frac{r}{R_s} Q_s + r(P_s + \rho F_s^\wedge) &= r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial(rQ_s)}{\partial s} - r\left(\frac{N_s}{R_s} - \frac{\sin\varphi}{r} N_\theta\right) + r(P_\gamma + \rho F_\gamma^\wedge) &= r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial(rM_s)}{\partial s} - \cos\varphi M_\theta - rQ_s - r\left(N_s - \frac{\sin\varphi}{r} M_\theta\right) \mathcal{G}_s &= 0; \\ \frac{\partial E_\theta}{\partial s} &= -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} - \frac{\cos\varphi}{r} E_\theta; \\ \frac{\partial B_\gamma}{\partial s} &= -\sigma_2 \mu \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] - \frac{B_s^+ - B_s^-}{h}; \end{aligned} \quad (4)$$

выражений для деформаций –

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_s} + \frac{1}{2} \mathcal{G}_s^2; \quad \varepsilon_\theta = \frac{\cos\varphi}{r} u + \frac{\sin\varphi}{r} w; \\ \chi_s &= \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial s}; \quad \chi_\theta = \frac{\cos\varphi}{r} \mathcal{G}_s - \frac{\sin\varphi}{2r} \mathcal{G}_s^2; \end{aligned} \quad (5)$$

соотношений упругости –

$$\begin{aligned} N_s &= \frac{e_s h}{1 - \nu_s \nu_\theta} (\varepsilon_s + \nu_\theta \varepsilon_\theta); \quad N_\theta = \frac{e_\theta h}{1 - \nu_s \nu_\theta} (\varepsilon_\theta + \nu_s \varepsilon_s); \\ M_s &= \frac{e_s h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)} (\chi_s + \nu_\theta \chi_\theta); \quad M_\theta = \frac{e_\theta h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)} (\chi_\theta + \nu_s \chi_s), \\ \nu_s &= \nu_{\theta s}, \quad \nu_\theta = \nu_{s\theta}, \quad e_s \nu_\theta = e_\theta \nu_s. \end{aligned} \quad (6)$$

Компоненты силы Лоренца имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho F_s^\wedge &= h J_{\theta CT} B_\gamma + \sigma_1 h \left[E_\theta B_\gamma - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_\gamma \right]; \\ \rho F_\gamma^\wedge &= -0,5 h J_{\theta CT} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma_2 h \left[0,5 E_\theta (B_s^+ + B_s^-) + \right. \\ &\quad \left. + 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ - B_s^-)^2 - 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_\gamma \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь: N_s, N_θ – нормальные усилия; Q_s, Q_θ – поперечные усилия; M_s, M_θ – изгибающие моменты; u, w – компоненты перемещений; $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \chi_s, \chi_\theta$ – компоненты тензора деформаций; \mathcal{G}_s – угол поворота нормали; e_s, e_θ – модули Юнга; ν_s, ν_θ – коэффициенты Пуассона; E_θ – компоненты напряженности электрического поля; B_γ – нормальная составляющая магнитной индукции; B_s^+, B_s^- – известные составляющие магнитной индукции на поверхностях оболочки; $J_{\theta CT}$ – составляющая плотности электрического тока от внешнего источника; h – толщина оболочки. Также учтено, что $r = R_\theta \sin \varphi$, $\frac{dr}{ds} = \cos \varphi$; φ – угол нормали к срединной поверхности оболочки; $r(s)$ – радиус параллельного круга оболочки.

При получении соотношений (4) – (7) учтено, что все искомые компоненты электромагнитного и механического полей не зависят от переменной θ .

§3. Разрешающая система уравнений магнитоупругости для осесимметричной ортотропной оболочки вращения.

Разрешающую систему уравнений магнитоупругости строим в нормальной форме. Искомые компоненты электромагнитного и механического полей принимаем следующими: $u, w, \mathcal{G}_s, N_s, Q_s, M_s, B_\gamma, E_\theta$.

Учитывая, что искомые разрешающие функции не зависят от координаты θ и тензора $\sigma_{ij}, \mu_{ij}, \varepsilon_{ij}$ имеют диагональный вид, разрешающая система уравнений магнитоупругости осесимметричных ортотропных оболочек вращения с учетом ортотропной электропроводности имеет такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{1 - \nu_s \nu_\theta}{e_s h} N_s - \frac{\nu_\theta \cos \varphi}{r} u - \frac{\nu_\theta \sin \varphi}{r} w + \frac{u}{R_s} - \frac{1}{2} g_s^2; \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= -g_s, \quad \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial s} = \frac{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}{e_s h^3} M_s - \frac{\nu_\theta \cos \varphi}{r} g_s; \\ \frac{\partial N_s}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} \left[(\nu_\theta - 1) N_s + e_\theta h \left(\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right) \right] - F_s - h J_{\theta CT} B_\gamma - \frac{1}{R_s} Q_s - \\ &\quad - \sigma_1 h \left[E_\theta B_\gamma + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 \right] + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial Q_s}{\partial s} &= -\frac{\cos \varphi}{r} Q_s + \left(\frac{1}{R_s} + \frac{\nu_\theta \sin \varphi}{r} \right) N_s + e_\theta h \frac{\sin \varphi}{r} \left[\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right] - F_\gamma - \\ &\quad - 0,5 h J_{\theta CT} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma_2 h [-0,5 E_\theta (B_s^+ + B_s^-) - 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ - B_s^-)^2 + 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) + \\ &\quad + \frac{h}{12} \frac{\partial \mathcal{G}_s}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-)] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_s}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} \left[(v_\theta - 1) M_s + \frac{e_\theta h^3 \cos \varphi}{12 r} g_s \right] + Q_s + N_s g_s - \\ &\quad - \frac{\sin \varphi}{r} \left[v_\theta M_s + \frac{e_\theta h^3 \cos \varphi}{12 r} g_s \right] g_s + \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 g_s}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial B_\gamma}{\partial s} &= -\mu_3 \sigma_2 \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] + \frac{(B_s^+ - B_s^-)}{\mu_1 h}; \\ \frac{\partial E_\theta}{\partial s} &= -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} - \frac{\cos \varphi}{r} E_\theta. \end{aligned}$$

Разрешающая система уравнений (8) является нелинейной гиперβολо-параболической системой восьмого порядка с переменными коэффициентами.

Краевые условия для функций, характеризующих механическую часть задачи, отвечают условиям классической теории оболочек. Граничные условия для электромагнитных функций могут быть заданы через компоненты электрического поля или комбинацию компонент магнитного и электрического полей.

Отметим, что в уравнениях вектор \vec{B} определяет изменение магнитного поля как изменение собственного магнитного поля, так и индукции. Вектор \vec{E} характеризует изменение электрического поля вследствие только индукции. Изменение электрического поля вследствие действия сторонних токов определяется формулой $\vec{E}_{CT} = \vec{J}_{CT} / \hat{\sigma}$.

§4. Методика решения задач для гибких ортотропных оболочек вращения.

Решение краевых задач магнитоупругости ортотропных оболочек в нелинейной постановке связано с большими вычислительными трудностями. Это объясняется тем, что система, описывающая напряженно-деформированное состояние (НДС) оболочки, связанная, т.е. состоит из уравнений движения и электродинамики. Кроме того, она является нелинейной смешанной гиперβολо-параболической системой дифференциальных уравнений в частных производных восьмого порядка с переменными коэффициентами. Объемные силы Лоренца – нелинейные и изменяются с изменением пространственной и временной координат.

Предложенная методика численного решения нелинейных задач магнитоупругости ортотропных оболочек вращения с ортотропной электропроводимостью основана на последовательном использовании конечно-разностной схемы Ньюмарка [21], методов квазилинеаризации [1] и дискретной ортогонализации [3].

Запишем в векторном виде разрешающую систему уравнений (8)

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial s} = \vec{F}_1 \left(s, t, \vec{N}, \frac{\partial \vec{N}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial t^2} \right) \quad (9)$$

с граничными условиями

$$g_1 \vec{N}(s_0, t) = \vec{b}_1, \quad g_2 \vec{N}(s_N, t) = \vec{b}_2 \quad (10)$$

и начальными условиями

$$\vec{N} = 0, \quad \frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad (11)$$

где $\vec{N} = \{u, w, g_s, N_s, Q_s, M_s, E_\theta, B_\gamma\}^T$, \vec{F}_1 – в общем виде нелинейная вектор-функция; g_1, g_2 прямоугольные матрицы; \vec{b}_1, \vec{b}_2 – известные вектора.

Использование схемы Ньюмарка позволяет весь часовой интервал разбить на отдельные малые интервалы и отследить деформирование оболочки на каждом временном интервале.

Отметим, что соотношения шагов разностной схемы по времени и пространственной координате определяются критерием устойчивости Куранта. Учитывая, что система уравнений (8) – смешанная система гипербола-параболического типа, значение шага по времени Δt необходимо выбирать из следующих соотношений:

$$\Delta t < \min \begin{cases} \Delta s / C_M, & (12) \\ 0,5(\Delta s)^2 \frac{\sigma\mu}{\rho^2}, & (13) \end{cases}$$

где C_M – скорость распространения магнитоупругих возмущений; Δs – шаг по пространственной координате. Условие устойчивости (12) – критерий Куранта для гиперболической группы уравнений, а условие (13) – для уравнений параболического типа.

После применения схемы Ньюмарка разрешающую систему магнитоупругости (8) для соответствующего временного интервала можно представить в векторной форме

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{F}(s, \vec{N}), \quad (14)$$

где \vec{F} – восьмимерный вектор.

Граничные условия на контуре $s = \text{const}$ имеют вид:

$$D_1 \vec{N}|_{s=s_0} = \vec{d}_1, \quad D_2 \vec{N}|_{s=s_N} = \vec{d}_2, \quad (15)$$

где D_1, D_2 – заданные прямоугольные матрицы, соответственно, порядков $k \times 8$ и $(8-k) \times 8$, ($k < 8$); \vec{d}_1, \vec{d}_2 – заданные вектора; k – число граничных условий на контуре $s = s_0$.

С помощью метода квазилинеаризации исходная краевая задача (14), (15) сведена к последовательности линейных краевых задач [2, 3]

$$\frac{d\vec{N}^{k+1}}{ds} = \vec{G}(\vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k); \quad (16)$$

$$B_1(\vec{N}^k) \vec{N}^{k+1}(s_0) = \vec{b}_1(\vec{N}^k); \quad B_2(\vec{N}^k) \vec{N}^{k+1}(s_N) = \vec{b}_2(\vec{N}^k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где $\vec{N} = \{u, w, \vartheta_s, N_s, Q_s, M_s, E_\theta, B_\gamma\}^T$; \vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k – решения, соответственно, на $(k+1)$ -й и k -й итерациях; $\vec{G}(\vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k)$ – вектор правой части системы уравнений; $B_1(\vec{N}^k), B_2(\vec{N}^k), \vec{b}_1(\vec{N}^k), \vec{b}_2(\vec{N}^k)$ – соответственно, матрицы и правые части граничных условий.

Каждую из линейных краевых задач последовательности на соответствующем часовом интервале решаем численно с помощью устойчивого метода дискретной ортогонализации. На первом по времени шаге за начальное приближение в итерационном процессе выбираем решение краевой задачи в линеаризированной постановке, а на последующих шагах – решение, полученное на предыдущем шаге, что является уже нелинейной задачей. Выбор такой схемы существенно уменьшает количество итераций, необходимых для решения задачи.

При решении задач магнитоупругости для токнесущих оболочек необходимо учитывать ограничения, которые накладываются на плотность тока и внешнее магнитное поле. Принимая, что температура внешней среды отсутствует, а температура в оболочке, обусловленная выделением в ней джоулевой температуры во время проте-

кания тока, не превышает $T \approx 200^0 C$, максимальное значение плотности тока определяем формулой $J_0 = \sqrt{T\sigma\alpha_T/h}$, где α_T – коэффициент теплообмена с внешней средой по закону Ньютона – Рихмана; T – часовой интервал; h – толщина оболочки.

§5. Магнитоупругое деформирование ортотропной кольцевой пластины с учетом ортотропной электропроводности.

Исследуем НДС металлической (бороалюминий) кольцевой пластины постоянной толщины h , внутреннего радиуса r_0 , внешнего r_1 , под воздействием нормальной составляющей механической нагрузки P_z и внешнего магнитного поля с заданным вектором магнитной индукции $\vec{B}^{(e)}$. Внешние токи и внешние электрические заряды отсутствуют.

За координатную плоскость выбираем срединную плоскость, отнесенную к полярной системе координат r, θ . Координату z отсчитываем по нормали к срединной поверхности.

Разрешающая система уравнений для кольцевой пластины получена из системы (8), учитывая, что для пластины $1/R_s = 0, \varphi = 0$ и полагая $s = r, \theta = \theta$.

Контуры пластины закреплены следующим образом:

$$u = 0; Q_r = 0; M_r = 0; B_z = 0,1 \sin \omega t \text{ при } r = r_0;$$

$$u = 0; w = 0; M_r = 0; B_z = 0 \text{ при } r = r_1 \text{ (} \omega \text{ – круговая частота).}$$

Параметры пластины и материала приняты в таком виде:

$$r_0 = 0,49 \text{ м}; r_1 = 0,86 \text{ м}; h = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}; P_z = 3 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}^2;$$

$$e_r = 22,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; e_\theta = 10,7 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м};$$

$$\nu_r = 0,262; \nu_\theta = 0,32; \rho = 2600 \text{ кг/м}^3; \omega = 314,16 \text{ с}^{-1};$$

$$\sigma_1 = 0,454 \cdot 10^8 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}; \sigma_2 = 0,454 \cdot 10^8 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}.$$

Решение задачи получено на интервале времени $t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$, шаг интегрирования по времени – $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

Исследовано влияние тангенциальных составляющих магнитной индукции на НДС кольцевой пластины для двух вариантов: 1) $B_r^\pm = \pm 1 \cdot 10^{-3}; \pm 5 \cdot 10^{-3}; \pm 1 \cdot 10^{-2} T$;

2) $B_r^\pm = \pm 0,15; \pm 0,25; \pm 0,5 T$.

Результаты решения данной задачи представлены ниже в виде графиков.

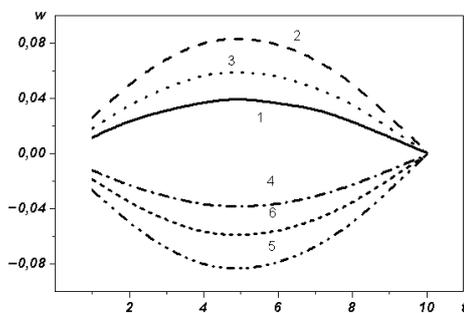


Рис. 1

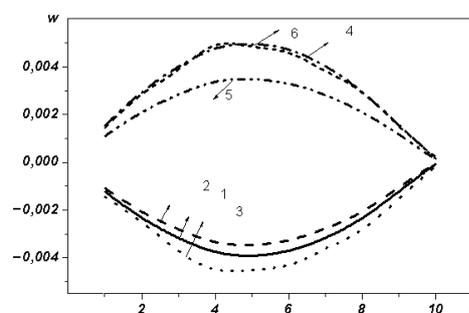


Рис. 2

На рис. 1, 2 (варианты 1, 2) представлено максимальное распределение прогиба пластины $w(t)$ при $t = 5 \cdot 10^{-3} c$. Здесь линии 1 – 3 соответствуют отрицательным значениям магнитной индукции, линии 4 – 6 – положительным значениям для вариантов 1, 2. Положительные значения прогиба соответствуют отрицательным значениям магнитной индукции (рис. 1, 2).

Максимальному значению прогиба соответствует линия 2 на рис. 1 ($B_r^\pm = -5 \cdot 10^{-3} T$), а минимальному – линия 1 ($B_r^\pm = -1 \cdot 10^{-3} T$) – для положительных значений прогиба. Аналогичная картина имеет место и для отрицательных значений прогиба на рис. 1, где максимальному значению w по абсолютной величине соответствует линия 5 ($B_r^\pm = 5 \cdot 10^{-3} T$), а минимальному – линия 4 ($B_r^\pm = 1 \cdot 10^{-3} T$).

На рис. 2 максимальное значение для положительного прогиба имеет место при $B_r^\pm = -0,15T$ (линия 1), а минимальное – при $B_r^\pm = -0,25T$ (линия 2). Для отрицательных значений прогиба максимальное значение по абсолютной величине достигается при $B_r^\pm = 0,5T$ (линия 6), а минимальное – при $B_r^\pm = 0,25T$ (линия 5).

Как следует из представленных результатов, при увеличении значений тангенциальной составляющей магнитной индукции B_r^\pm , значения прогиба уменьшаются и сближаются между собой (рис. 2). Это отвечает общей нелинейной теории пластин (с увеличением тангенциальных усилий пластина становится более жесткой). Однако, установить прямую закономерность между величиной прогиба и изменением тангенциальной составляющей магнитного поля, как это происходит с тангенциальными силами в геометрически нелинейной теории пластин без влияния магнитного поля, не удастся.

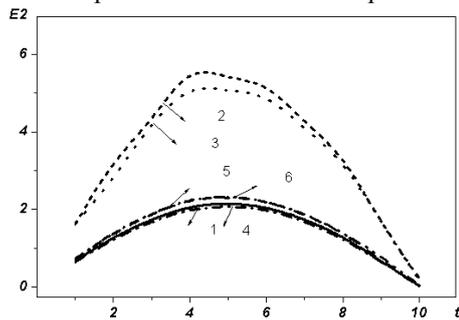


Рис. 3

Максимальное распределение составляющей напряженности электрического поля $E_\theta(t)$ представлено на внутреннем контуре пластины на рис. 3 при $B_r^\pm = 0,15; 0,25; 0,5T$ (линии 1 – 3) и $B_r^\pm = -0,15; -0,25; -0,5T$ (линии 4 – 6). Согласно представленным результатам, наибольшее значение напряженности электрического поля E_θ достигается при $B_r^\pm = \pm 0,5T$. Для остальных значений магнитной индукции

результаты практически совпадают.

Анализ полученных результатов позволяет оценить влияние тангенциальных составляющих магнитной индукции на напряженное состояние гибкой ортотропной кольцевой пластины. На основе представленных результатов заключаем, что магнитоупругую нелинейную задачу для кольцевой пластины необходимо рассматривать в связанном виде, что отражено на рисунках.

§6. Влияние внешнего тока и механической силы на НДС усеченной ортотропной сферической оболочки.

Разрешающая система уравнений магнитоупругости для сферической оболочки получена, исходя из ее геометрии и полагая в системе (8) $R_s = R$ (R – радиус оболочки), $r = R \sin \varphi$, $\sin \varphi = s / R$, $\cos \varphi = \cos s / R$.

Исследовано НДС металлической (бороалюминий) усеченной ортотропной сферической оболочки радиуса $R = 0,5 м$, постоянной толщины $h = 5 \cdot 10^{-2} м$. Оболочка находится под воздействием нормальной составляющей механической нагрузки $P_y = P_0 \sin \omega t$ (ω – круговая частота) и круговой составляющей внешнего электрического тока $J_{\theta CT} = J_0 \sin \omega t$.

Контуры пластины закреплены следующим образом:

$$u = w = 0; \quad M_s = 0; \quad B_\gamma = 0,1 \sin \omega t \quad \text{при } s = s_0;$$

$$u = 0; \quad Q_s = 0; \quad M_s = 0; \quad B_\gamma = 0,1 \sin \omega t \quad \text{при } s = s_N.$$

Параметры оболочки и материала приняты следующие:

$$s_0 = 0,4 \text{ м}; \quad s_N = 0,78 \text{ м}; \quad h = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad \mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м};$$

$$e_s = 22,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad e_\theta = 10,7 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$\nu_s = 0,262; \quad \nu_\theta = 0,32; \quad \rho = 2600 \text{ кг/м}^3; \quad \omega = 314,16 \text{ с}^{-1};$$

$$\sigma_1 = 0,454 \cdot 10^8 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}; \quad \sigma_2 = 0,454 \cdot 10^8 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}; \quad B_s^\pm = 0,5 \text{ Т}.$$

Решение задачи получено на интервале времени $t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$, шаг интегрирования по времени – $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

Исследуем взаимовлияние механической нагрузки P_γ и стороннего электрического тока $J_{\theta CT}$ на НДС ортотропной сферической оболочки при известных значениях магнитной индукции на ее поверхностях. При этом рассмотрим следующие варианты изменения механической нагрузки и стороннего тока: 1). $P_\gamma = -1,3 \cdot 10^2 \sin \omega t$; $J_{\theta CT} = 5 \cdot 10^{-3} \sin \omega t$; 2). $P_\gamma = -1,3 \cdot 10^2 \sin \omega t$; $J_{\theta CT} = -5 \cdot 10^{-3} \sin \omega t$; 3). $P_\gamma = 1,3 \cdot 10^2 \sin \omega t$; $J_{\theta CT} = 5 \cdot 10^{-3} \sin \omega t$;

На рис. 4 дано распределение прогиба $w(s)$ при $t = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ для вариантов 1, 2 (вариант 1 – сплошная линия; вариант 2 – пунктирная линия). На оси абсцисс для обозначений 2 – 10 координата s принимает значения, соответственно: 0,438 м; 0,514 м; 0,590 м; 0,666 м; 0,742 м. Нелинейное максимальное значение прогиба ($w/h = 3,2$) имеет место при $s = 0,552 \text{ м}$ для варианта 1. При изменении направления протекания стороннего тока при том же значении механической нагрузки (вариант 2) максимальное значение прогиба при $s = 0,552 \text{ м}$ уменьшается ($w/h = 2,42$).

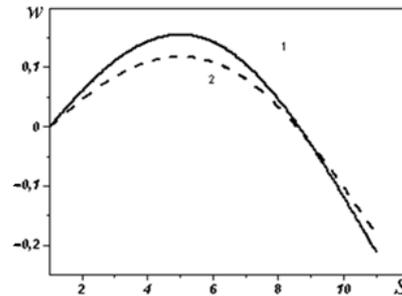


Рис. 4

При рассмотрении варианта 3 (рис. 5) прогиб $w(s)$ при том же значении $t = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ становится чисто линейным ($w/h = 0,1$). Как видно, при изменении направления действия внешних сил существенно изменяется характер НДС сферической оболочки.

На рис. 6, 7 показано изменение нормальной составляющей силы Лоренца вдоль s при $t = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ для вариантов 1, 2 и варианта 3, соответственно.

Таким образом, изменение пондеромоторной силы взаимосвязано с изменением прогиба (рис. 4, 5), т.е. форма представления силы Лоренца дает возможность оценивать ее влияние на деформацию оболочки.

Рассмотренные результаты численно-

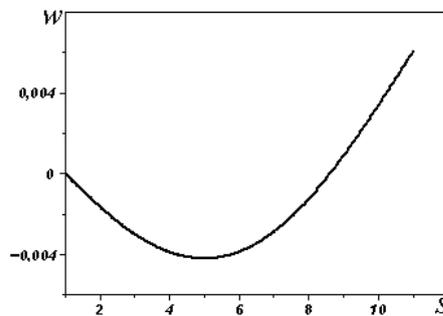


Рис. 5

го решения осесимметричных задач магнитоупругости гибких ортотропных оболочек вращения с учетом ортотропной электропроводности иллюстрируют эффективность и возможности построенной физической модели магнитоупругих оболочек и предложенной методики решения данного класса задач.

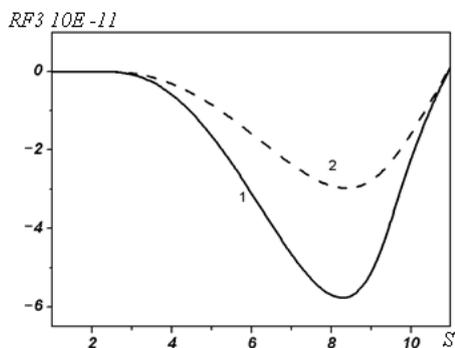


Рис. 6

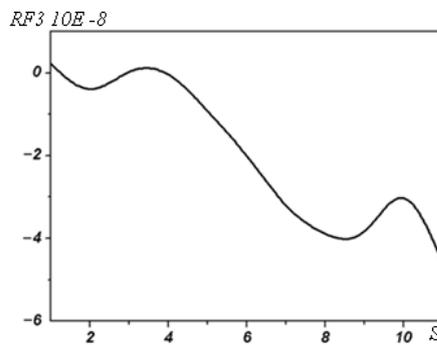


Рис. 7

Выводы.

1. В данной работе построена теория магнитоупругости гибких ортотропных оболочек вращения с учетом ортотропной электропроводности.
2. Предложена методика решения такого класса задач. Получена разрешающая система уравнений магнитоупругости гибких ортотропных оболочек с ортотропной электропроводностью.
3. Проведен анализ напряженного состояния кольцевой ортотропной пластины, усеченной ортотропной сферической оболочки с учетом ортотропной электропроводности в геометрически нелинейной постановке.

РЕЗЮМЕ: Розв'язано задачу магнитоупругості в осесиметричній постановці для гнучких ортотропних оболонок обертання з ортотропною електропровідністю. Отримано розв'язувальну систему нелінійних диференціальних рівнянь, яка описує напружено-деформівний стан гнучких ортотропних оболонок обертання в механічному та магнітному полях. Наведено числові приклади. Проведено аналіз напружених станів ортотропної пластини при зміні тангенційної складової магнітної індукції та сферичної оболонки в залежності від зовнішнього струму та механічної сили.

1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 184 с.
2. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основы теории пластин и оболочек с элементами магнитоупругости: Учебник. – К.: ИПЦ «Киевский университет», 2010. – 403с.
3. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – К.: Выш. шк., 1983. – 286 с.
4. Келли А., Гровс Г. Кристаллография и дефекты в кристаллах. – М.: Мир, 1974. – 496 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 624 с.
6. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
7. Шаповалов Л.А. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек // Инж. журн. Механика твердого тела. – 1968. – № 1. – С. 56 – 62.
8. Flugge W. Stresses in shells. – Berlin: Springer-Verlag, 1973. – 525 p.
9. Hussain M.A., Pu S.L. Dynamic stress intensity factors for an unbounded plate having collinear cracks // Eng. Fact. Mech. – 1972. – 4, N 4. – P. 865 – 876.
10. Maugin G. A. Nonlinear electromechanical effects and applications. – Singapore: World Scientific, 1985. – 168 p.
11. Mol'chenko L.V., Loos I.I., Indiaminov R.S. Determining the Stress State of Flexible Orthotropic Shell of Revolution in Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N 8. – P. 882 – 891.

12. *Mol'chenko L. V., Loos I. I., Indiaminov R. Sh.* Stress-Strain State of Flexible Ring Plates of Variable Stiffness in a Magnetic Field // *Int. Appl. Mech.*, – 2009, – **45**, N 11. – P. 1236 – 1242.
13. *Mol'chenko L.V., Loos I.I.* Effect of Conicity on Axisymmetrical Strain State of Flexible Orthotropic Conical Shell in Non-stationary Magnetic Field // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 11. – P. 1261 – 1267.
14. *Mol'chenko L. V., Loos I. I., Plyas I.V.* Effect of the Tangential Components of Magnetic-Flux Density on the Stress State of a Flexible Circular Cylinder with Variable Stiffness // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 3. – P. 313 – 319.
15. *Mol'chenko L. V., Loos I. I.* Influence of the Boundary Conditions on the Stress State of a Flexible Cylindrical Shell of Variable Stiffness in a Magnetic Field // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 1. – P. 94 – 100.
16. *Mol'chenko L. V., Loos I. I., Fedorchenko L. N.* Axisymmetric Magnetoelastic Deformation of a Flexible Orthotropic Ring with Orthotropic Conductivity // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 3. – P. 322 – 327.
17. *Mol'chenko L. V., Loos I. I.* The Stress State of a Flexible Orthotropic Spherical Shell Subject to External Current and Mechanical Force in a Magnetic Field // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 5. – P. 528 – 533.
18. *Mol'chenko L.V., Loos I.I., Fedorchenko L.M.* Influence of Extraneous Current on the Stress State of an Orthotropic Ring Plate with Orthotropic Conductivity // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 6. – P. 683 – 687.
19. *Moon F. C.* Magneto-solid mechanics. – New York: John Wiley & Sons Inc., 1984. – 448 p.
20. *Moon F. C., Chattopadhyay S.* Magnetically induced stress waves in a conducting solid-theory and experiment // *Trans. ASME.* – 1974. – **41**, N 3. – P. 641 – 646.
21. *Newmark N.M.* A Method of Computation for Structural Dynamics // *J. End Mech. Div. Proc. ASCE.* – 1959. – **85**, N 7. – P. 67 – 97.
22. *Nye J. F.* Physical properties of crystals. – Oxford: Clarendon press, 1964. – 329 p.
23. *Truesdeil C., Noll W.* The nonlinear field theorie // *Haudthuch der Physic Ed. S. F. Lugge.* – 1960. – **3/3**. – P. 1 – 602.

Поступила 22.05.2013

Утверждена в печать 19.02.2015

