

Я. Я. Рушицкий, Я. В. Симчук, С. В. Синчило

О ТРЕТЬЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ В АНАЛИЗЕ КВАДРАТИЧНО НЕЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова 3, 03057, Киев, Украина e-mail: rushch@inmech.kiev.ua
Национальный технический университет Украины «КПИ»,
просп. Победы 34, 03034, Киев, Украина e-mail: simchuk@i.ua*

Abstract. The perturbation method is applied to the problem on propagation of a cylindrical wave in the hyperelastic material, deformation of which is quadratically nonlinear according to the classical Murnaghan model. The third approximation is found exactly through the fourth powers of Hankel functions of the zeroth and first indexes and their products. The variant of simplification of new representation is considered and numerically analyzed.

Key words: cylindrical wave, quadratically nonlinear wave equation, Murnaghan model, perturbation method, first three approximations.

Введение.

Настоящая работа посвящена рассмотрению цилиндрической волны [2, 3, 15] в гиперупругом материале, деформирование которого происходит квадратично нелинейно согласно модели Мурнагана. При этом рассмотрены различные постановки задачи (состояние плоской деформации, осесимметричное и другие состояния) [18 – 20].

Изучается осесимметричное состояние. Такая задача в рамках двух первых приближений проанализирована в [14, 23]. Поскольку нулевое (линейное) приближение выражается через функцию Ханкеля и для таких функций имеются представления в виде степенных рядов, то в [20, 23] были использованы именно такие представления. В работе [14] представлен общий подход к анализу в рамках многих приближений и в рамках двух первых приближений получено точное аналитическое представление решения через функции Ханкеля.

Необходимо отметить, что нелинейные упругие волны изучаются в последнее время достаточно интенсивно. Для примера укажем здесь публикации по распространению упругих волн в классических средах [4, 8], в микроструктурных средах [6, 24], средах нового типа [5], применительно к задачам геофизики [9, 26], в элементах конструкций [12, 25], по анализу относительно простых и сложных типов волн [4, 10, 12, 15, 16, 17, 21]. Ранее исследования плоских и цилиндрических волн для модели Мурнагана проводились известными в нелинейной теории волн методами – методом последовательных приближений (малого параметра) и методом медленно изменяющихся амплитуд (методом Ван дер Поля) [7]. При использовании метода последовательных приближений ограничивались двумя первыми приближениями – нулевым (линейным) и первым. В обоснование этого ограничения приводились два аргумента [7]: 1) результат в рамках двух приближений совпадает с результатом решения эволюционного уравнения при применении метода медленно изменяющихся амплитуд; 2) основные нелинейные волновые явления, описываемые решением в

виде двух приближений и решением эволюционного уравнения, подтверждаются экспериментальными наблюдениями. При этом вопрос об анализе влияния последующих приближений достаточно открыт до сих пор, предположим, что публикации [22] – только начало анализа.

§1. Вычисление трех первых приближений в задаче о цилиндрической волне.

Примем в качестве исходного нелинейное волновое уравнение, которое соответствует осесимметричному, зависящему только от координаты r и с осью симметрии Oz , состоянию континуума (это состояние характерно для классической цилиндрической волны) и в котором учтены физическая и геометрическая нелинейности [19, 20]

$$u_{r,tt} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \left(u_{r,r} + \frac{u_r}{r} \right)_{,r} = S(u_r, u_{r,r}, u_{r,rr}); \quad (1)$$

$$S(u_r, u_{r,r}, u_{r,rr}) = -\tilde{N}_1 u_{r,rr} u_{r,r} - \tilde{N}_2 \frac{1}{r} u_{r,rr} u_r - \tilde{N}_3 \frac{1}{r^2} u_{r,r} u_r - \tilde{N}_4 \frac{1}{r} (u_{r,r})^2 - \tilde{N}_5 \frac{1}{r^3} (u_r)^2;$$

$$\tilde{N}_1 = \left[3 + \frac{2(A + 3B + C)}{\lambda + 2\mu} \right]; \quad \tilde{N}_2 = \frac{\lambda + 2B + 2C}{\lambda + 2\mu}; \quad \tilde{N}_3 = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu};$$

$$\tilde{N}_4 = \frac{2\lambda + 3\mu + A + 2B + 2C}{\lambda + 2\mu}; \quad \tilde{N}_5 = \frac{2\lambda + 3\mu + A + 2B + C}{\lambda + 2\mu}.$$

Здесь приняты такие обозначения: $u_r(r, t)$ – радиальное перемещение; r – пройденное волной расстояние; t – время распространения волны; ρ – постоянная плотность; λ, μ – упругие постоянные второго порядка (постоянные Ляме); A, B, C – упругие постоянные третьего порядка (постоянные Мурнагана), точкой обозначено дифференцирование по времени t , запятой после индекса – дифференцирование по пространственной переменной r .

Рассмотрим гармонические во времени цилиндрические волны, возникающие в описанной в [19, 20] гиперупругой среде с цилиндрической полостью радиуса r_o , когда к этой полости приложена гармоническая во времени нагрузка $\sigma^{rr}(r_o, t) = p_o e^{i\omega t}$ или гармоническое во времени радиальное перемещение $u_r(r_o, t) = u_{r_o} e^{i\omega t}$. В линейном случае такие волны задаются аналитически решением линейного волнового уравнения

$$u_{r,tt} - (v_{ph})^2 \left(u_{r,r} + \frac{u_r}{r} \right)_{,r} = 0 \quad (2)$$

посредством функций Ханкеля первого рода и первого порядка [7, 11, 13, 15]

$$u_r^{(0)}(r, t) = u_{r_o} H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t}, \quad (3)$$

где u_{r_o} – амплитудный множитель, определяемый по граничному условию на поверхности полости $u_{r_o} = -\frac{p_o k_L}{k_L(\lambda + 2\mu)H_0^{(1)}(k_L r_o) - \frac{2\mu}{r_o} H_1^{(1)}(k_L r_o)}$; $k_L = (\omega/v_L)$ – волновое число продольной плоской волны.

Основной особенностью цилиндрической волны (3) является то, что она уже не гармоническая (можно сказать, что по свойствам функции Ханкеля она асимптотически гармоничная) и ее интенсивность убывает со временем распространения.

Основной особенностью нелинейных плоских и цилиндрических волн при их анализе методом последовательных приближений является возрастание размаха колебаний (возрастание интенсивности волны) с увеличением пройденного волной расстояния.

Таким образом, в предпринятом в настоящей работе анализе цилиндрической волны следует ожидать взаимодействие двух противоположных тенденций – возрастания амплитуды волны вследствие учета нелинейности деформирования и уменьшения амплитуды вследствие природы цилиндрической волны.

Первое приближение определяется как решение такого неоднородного линейного волнового уравнения:

$$u_{r,tt} - (v_{ph})^2 \left(u_{r,r} + \frac{u_r}{r} \right)_{,r} = S(u_r^{(0)}, u_{r,r}^{(0)}, u_{r,rr}^{(0)}); \quad (4)$$

$$S(u_r, u_{r,r}, u_{r,rr}) = -\tilde{N}_1 u_{r,rr} u_{r,r} - \tilde{N}_2 \frac{1}{r} u_{r,rr} u_r - \tilde{N}_3 \frac{1}{r^2} u_{r,r} u_r - \tilde{N}_4 \frac{1}{r} (u_{r,r})^2 - \tilde{N}_5 \frac{1}{r^3} (u_r)^2.$$

Тогда в рамках первых двух приближений распространение цилиндрической волны описывается формулой

$$u_r(r, t) = u_r^{(0)}(r, t) + u_r^{(1)}(r, t) = u_{r_0} H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t} + \left\{ B_{00} [H_0^{(1)}(k_L r)]^2 + B_{11} [H_1^{(1)}(k_L r)]^2 + B_{01} H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r) \right\} e^{2i\omega t}, \quad (5)$$

где

$$B_{11} = k_L \left(-2 + \frac{3}{(k_L r)^2} - 2 \left(\frac{1}{1 - 2(k_L r)^2} \right) + 8 \left(\frac{1}{1 - 4(k_L r)^2} \right) \right)^{-1} \times \left(\left(-\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 \right) \frac{1}{k_L r} + \left(2\tilde{N}_1 - 2\tilde{N}_2 + \tilde{N}_3 - \tilde{N}_4 - \tilde{N}_5 \right) \frac{1}{(k_L r)^3} - 2 \left(\tilde{N}_1 + \tilde{N}_4 \right) \left(\frac{(k_L r)^2}{1 - 2(k_L r)^2} \right) \frac{1}{(k_L r)} \right) \times \left(-\tilde{N}_1 \frac{2}{k_L r} \left(\frac{(k_L r)^2}{1 - 4(k_L r)^2} \right) - \left(-\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 - \tilde{N}_3 + 2\tilde{N}_4 \right) \frac{2}{k_L r} \frac{1}{(k_L r)^2} \left(\frac{(k_L r)^2}{1 - 4(k_L r)^2} \right) \right);$$

$$B_{00} = \left(\frac{1}{(k_L r)^2} - 2 \right)^{-1} \left(k_L \left(\tilde{N}_1 + \tilde{N}_4 \right) \frac{1}{(k_L r)} - 2B_{11} \right);$$

$$B_{01} = \left(\frac{1}{(k_L r)^2} - 4 \right)^{-1} \left(k_L \left[\tilde{N}_1 + \left(-\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 - \tilde{N}_3 + 2\tilde{N}_4 \right) \frac{1}{(k_L r)^2} \right] + \frac{4}{k_L r} B_{11} \right).$$

Решение (5) может быть упрощено при условии, что пройденное волной расстояние $(r - r_0)$ согласовано с длиной волны λ_L таким образом, что

$$k_L = 2\pi / \lambda_L \rightarrow k_L r = 2\pi r / \lambda_L \rightarrow r > 3\lambda_L \rightarrow k_L r > 20. \quad (6)$$

В этом случае в (5) можно пренебречь двумя составляющими с коэффициентами B_{00} , B_{11} и частью составляющих в коэффициенте B_{01} . В итоге получаем уравнение

$$u_r(r, t) = u_{r0} H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t} - \frac{1}{4} (u_0)^2 k_L \frac{N_1}{\lambda + 2\mu} H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r) e^{2i\omega t}. \quad (7)$$

Рассмотрим уравнение третьего приближения

$$u_{r,rr}^{(2)} - (v_{ph})^2 \left(u_{r,r}^{(2)} + \frac{u_r^{(2)}}{r} \right) = S(u_r^{(1)}, u_{r,r}^{(1)}, u_{r,rr}^{(1)}). \quad (8)$$

Правую часть уравнения (8) необходимо представить через функции Ханкеля

$$\begin{aligned} S(u_r^{(1)}, u_{r,r}^{(1)}, u_{r,rr}^{(1)}) &= (k_L)^3 e^{4i\omega t} \left\{ \left(\tilde{N}_1 - \tilde{N}_4 \right) (1/k_L r) \left(H_0^{(1)}(k_L r) \right)^4 + \right. \\ &\quad \left. + \left(3\tilde{N}_1 + \tilde{N}_4 \right) (1/k_L r) \left(H_1^{(1)}(k_L r) \right)^4 + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\left(\frac{3}{k_L^2 r^2} - 4 \right) \tilde{N}_1 + \frac{1}{k_L^2 r^2} \tilde{N}_2 - \frac{1}{k_L^2 r^2} \tilde{N}_3 + \frac{1}{k_L^2 r^2} \tilde{N}_4 \right) \left(H_0^{(1)} \right)^3 H_1^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\left(4 - \frac{5}{k_L^2 r^2} \right) \tilde{N}_1 - 3 \frac{1}{k_L^2 r^2} \tilde{N}_2 + \frac{1}{k_L^2 r^2} \tilde{N}_3 - \frac{1}{k_L^2 r^2} \tilde{N}_4 \right) H_0^{(1)} \left(H_1^{(1)} \right)^3 + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{k_L r} \left(8 - \frac{2}{k_L^2 r^2} \right) \tilde{N}_1 - \frac{1}{k_L r} \left(\frac{2}{k_L^2 r^2} - 4 \right) \tilde{N}_2 + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{N}_3 \frac{1}{k_L^3 r^3} + \frac{1}{k_L r} \left(1 + \frac{1}{k_L^2 r^2} \right) \tilde{N}_4 - \tilde{N}_5 \frac{1}{k_L^3 r^3} \right) \left(H_0^{(1)} \right)^2 \left(H_1^{(1)} \right)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Итак, правая часть линейного волнового уравнения (4) содержит три составляющие, включающие четвертые степени функций Ханкеля нулевого и первого порядка и их произведение первой, второй и третьей степени, соответственно.

Коэффициенты в этих составляющих зависят от времени посредством экспоненты $e^{4i\omega t}$ (временного компонента второй гармоники плоской продольной волны), пройденного волной расстояния r и постоянных параметров задачи (упругих постоянных и волнового числа плоской продольной волны).

Поскольку степени функций Ханкеля нулевого и первого порядка и их произведения $H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r)$, $(H_0^{(1)})^4$, $(H_1^{(1)})^4$, $(H_0^{(1)})^3 H_1^{(1)}$, $H_0^{(1)} (H_1^{(1)})^3$, $(H_0^{(1)})^2 \times (H_1^{(1)})^2$ не являются решениями однородного волнового уравнения (2), то процедура решения неоднородного уравнения (4) отличается от процедуры решения соответствующего уравнения для родственной задачи о плоской продольной волне.

Частное решение неоднородного уравнения для цилиндрической волны выбирается в виде, соответствующем правой части (9)

$$u = \left\{ B_{04} \left(H_0^{(1)} \right)^4 + B_{14} \left(H_1^{(1)} \right)^4 + B_{22} \left(H_0^{(1)} \right)^2 \left(H_1^{(1)} \right)^2 + \right. \\ \left. + B_{13} H_0^{(1)} \left(H_1^{(1)} \right)^3 + B_{31} \left(H_0^{(1)} \right)^3 H_1^{(1)} \right\} e^{4i\omega t}. \quad (10)$$

Соответственно, в рамках первых трех приближений распространение цилиндрической волны описывается формулой

$$u_r(r, t) = u_r^{(0)}(r, t) + u_r^{(1)}(r, t) + u_r^{(2)}(r, t) = u_{r0} H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t} + \\ + \left\{ B_{00} \left[H_0^{(1)}(k_L r) \right]^2 + B_{11} \left[H_1^{(1)}(k_L r) \right]^2 + B_{01} H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r) \right\} e^{2i\omega t} + \\ + \left\{ B_{04} \left(H_0^{(1)} \right)^4 + B_{14} \left(H_1^{(1)} \right)^4 + B_{22} \left(H_0^{(1)} \right)^2 \left(H_1^{(1)} \right)^2 + B_{13} H_0^{(1)} \left(H_1^{(1)} \right)^3 + B_{31} \left(H_0^{(1)} \right)^3 H_1^{(1)} \right\} e^{4i\omega t}.$$

Неизвестные коэффициенты $B_{04}, B_{14}, B_{22}, B_{13}, B_{31}$ определяются с помощью подстановки представления (11) в левую часть уравнения (8) и сравнения с правой частью (9).

Такое сравнение приводит к равенству

$$\left(\frac{3}{(k_L r)^2} + 12 \right) B_{04} + 2B_{22} k_L^2 = -k_L^2 \frac{1}{\rho \omega^2 r} \left(\tilde{N}_1 - \tilde{N}_4 \right); \\ \left(\frac{3}{(k_L r)^2} + \frac{12}{r^2} + 12 \right) B_{14} + 2B_{22} k_L^2 + 6B_{13} k_L \frac{1}{r} = -k_L^2 \frac{1}{\rho \omega^2 r} \left(3\tilde{N}_1 + \tilde{N}_4 \right); \quad (12) \\ \left(\frac{3}{(k_L r)^2} + \frac{2}{r^2} - 8k_L^2 + 12 \right) B_{22} + 12k_L^2 B_{04} + 12k_L^2 B_{14} + 6B_{31} k_L \frac{1}{r} - 12B_{13} k_L \frac{1}{r} = \\ = k_L^3 \frac{1}{\rho \omega^2} \left(\begin{aligned} & -\frac{1}{k_L r} \left(8 - \frac{2}{k_L^2 r^2} \right) \tilde{N}_1 - \frac{1}{k_L r} \left(\frac{2}{k_L^2 r^2} - 4 \right) \tilde{N}_2 + \\ & + \tilde{N}_3 \frac{1}{k_L^3 r^3} + \frac{1}{k_L r} \left(1 + \frac{1}{k_L^2 r^2} \right) \tilde{N}_4 - \tilde{N}_5 \frac{1}{k_L^3 r^3} \end{aligned} \right); \\ \left(\frac{3}{(k_L r)^2} + \frac{6}{r^2} - 6k_L^2 + 12 \right) B_{13} + 6k_L^2 B_{31} - 24B_{14} k_L \frac{1}{r} + 8B_{22} k_L \frac{1}{r} = \\ = k_L^3 \frac{1}{\rho \omega^2} \left(-\left(4 - \frac{5}{k_L^2 r^2} \right) \tilde{N}_1 - 3 \frac{1}{k_L^2 r^2} \tilde{N}_2 + \frac{1}{k_L^2 r^2} \tilde{N}_3 - \frac{1}{k_L^2 r^2} \tilde{N}_4 \right); \\ \left(\frac{3}{(k_L r)^2} - 6k_L^2 + 12 \right) B_{31} + 6B_{13} k_L^2 - 4B_{22} k_L \frac{1}{r} =$$

$$= k_L^3 \frac{1}{\rho \omega^2} \left(- \left(\frac{3}{k_L^2 r^2} - 4 \right) \tilde{N}_1 + \frac{1}{k_L^2 r^2} \tilde{N}_2 - \frac{1}{k_L^2 r^2} \tilde{N}_3 + \frac{1}{k_L^2 r^2} \tilde{N}_4 \right).$$

Если использовать равенство $\rho \omega^2 = (\lambda + 2\mu)(k_L)^2$ в выражении $(u_o)^2 (\rho \omega^2)^{-1} \times (k_L)^3$, то после сравнения выражений и упрощении при условиях, изложенных выше, коэффициенты получаем в следующем виде:

$$B_{04}, B_{14}, B_{22} = 0; B_{13} = \frac{1}{3} k \tilde{N}_1; B_{31} = -\frac{1}{3} k \tilde{N}_1.$$

Тогда в рамках первых трех приближений и принятых упрощений распространение цилиндрической волны описывается формулой

$$\begin{aligned} u_r(r, t) = & u_r^{(0)}(r, t) + u_r^{(1)}(r, t) + u_r^{(2)}(r, t) = u_o H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t} - \\ & - \frac{1}{4} u_o^2 k_L \frac{N_1}{\lambda + 2\mu} H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r) e^{2i\omega t} + \\ & + \frac{1}{48} u_o^4 k^3 \left(\frac{N_1}{\lambda + 2\mu} \right)^3 H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r) \left(\left(H_1^{(1)}(k_L r) \right)^2 - \left(H_0^{(1)}(k_L r) \right)^2 \right) e^{4i\omega t}. \end{aligned} \quad (13)$$

Итак, решение (13) выражается через функции Ханкеля нулевого и первого порядка и содержит первые, вторые и четвертые гармоники.

Представим далее результаты первичного анализа искажения первоначального профиля цилиндрической волны. Для компьютерного анализа использованы данные о физических постоянных материалов (плотность, две постоянные Ляме, три постоянные Мурнагана) из таблицы.

Материал	$\rho \cdot 10^{-4}$	$\lambda \cdot 10^{-10}$	$\mu \cdot 10^{-10}$	$A \cdot 10^{-11}$	$B \cdot 10^{-11}$	$C \cdot 10^{-11}$
вольфрам	1,89	7,5	7,3	-1,08	-1,43	-9,08
молибден	1,02	15,7	1,1	-0,26	-2,83	3,72
медь	0,893	10,7	4,8	-2,8	-1,72	-2,4
сталь	0,78	9,4	7,9	-3,25	-3,1	-8,0
алюминий	0,27	5,2	2,7	-0,65	-2,05	-3,7
полистирол	0,105	0,369	0,114	-0,108	-0,0785	-0,0981

При расчетах принимались такие значения (в системе СИ): первоначальная амплитуда $u_o = 1 \cdot 10^{-3}$ м, частота волны $\omega = 1,5$ МГц, волновое число $k_L = 4000$ 1/м, $r_o = 5 \cdot 10^{-3}$ м. На представленных ниже рис. 1 – 6 показано искажение первоначального профиля цилиндрической волны в случае пятого материала (алюминия).

Рис. 1 – 6 однотипны; по оси абсцисс отложена величина r ; по оси ординат отложена амплитуда осцилляций u_r .

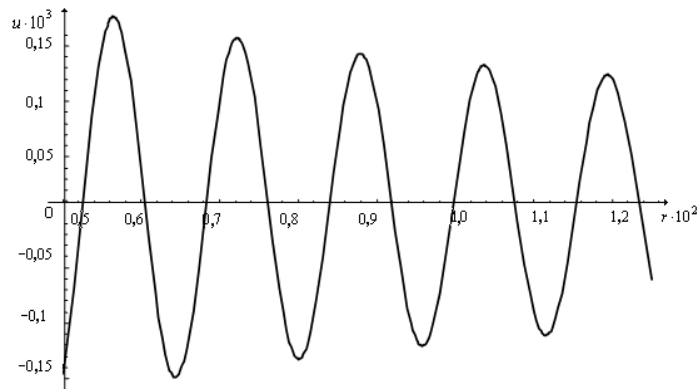


Рис. 1

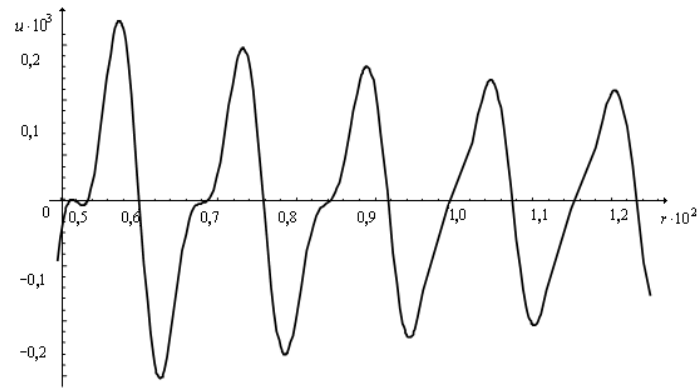


Рис. 2

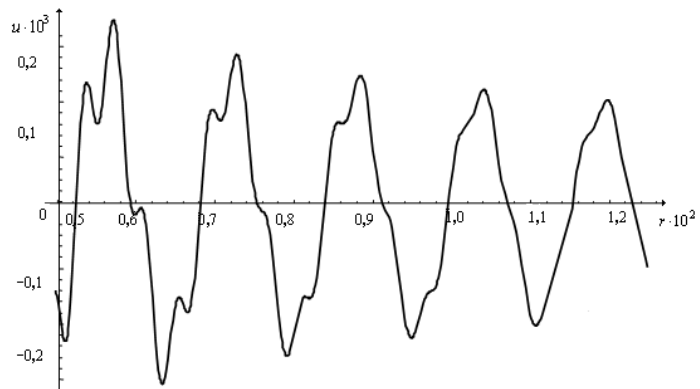


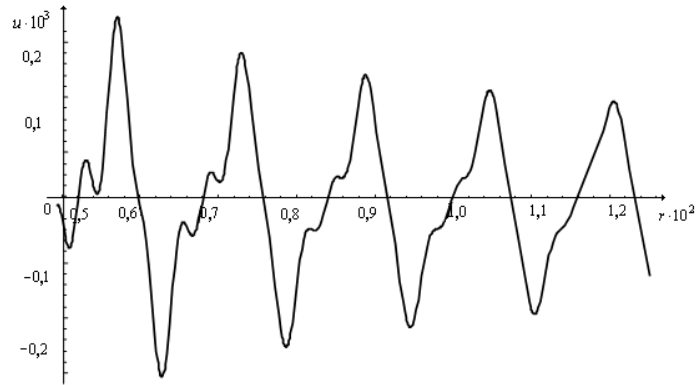
Рис. 3

На рис. 1 показан первоначальный профиль $u_r(r, t) = u_r^{(0)}(r, t) = u_o H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t}$; рис. 2 и 3 показывают искаженный профиль влияния второго и третьего приближения, соответственно, т.е.

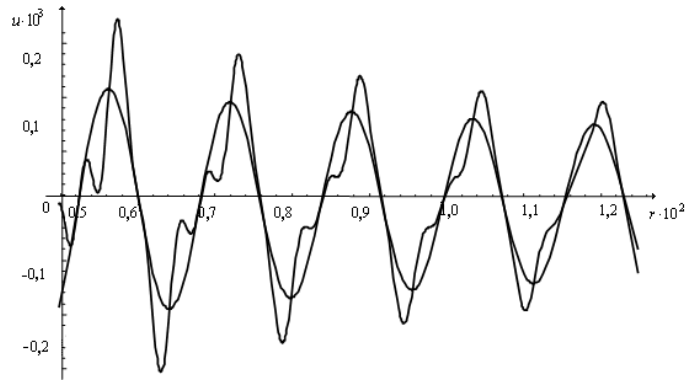
$$u_r(r, t) = u_r^{(0)}(r, t) + u_r^{(1)}(r, t) = u_o H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t} - \frac{1}{4} u_o^2 k_L \frac{N_1}{\lambda + 2\mu} H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r) e^{2i\omega t};$$

и

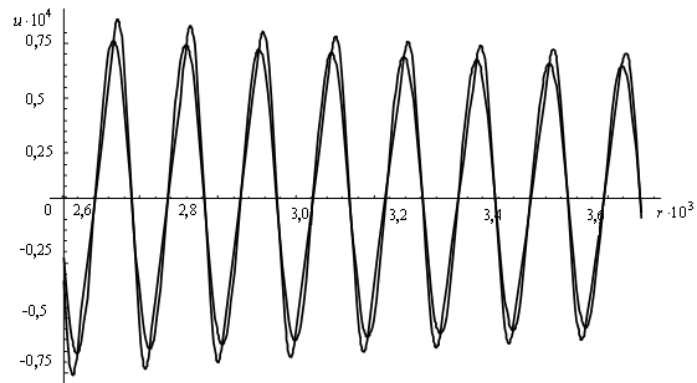
$$u_r(r,t) = u_r^{(0)}(r,t) + u_r^{(2)}(r,t) = u_o H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t} + \frac{1}{48} u_0^4 k^3 \left(\frac{N_1}{\lambda + 2\mu} \right)^3 H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r) \left((H_1^{(1)}(k_L r))^2 - (H_0^{(1)}(k_L r))^2 \right) e^{4i\omega t}.$$



Puc. 4



Puc. 5



Puc. 6

Рис. 4 характерен для одновременного влияния второго и третьего приближений

$$\begin{aligned}
 u_r(r, t) &= u_r^{(0)}(r, t) + u_r^{(1)}(r, t) + u_r^{(2)}(r, t) = \\
 &= u_0 H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t} - \frac{1}{4} u_0^2 k_L \frac{N_1}{\lambda + 2\mu} H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r) e^{2i\omega t} + \\
 &+ \frac{1}{48} u_0^4 k^3 \left(\frac{N_1}{\lambda + 2\mu} \right)^3 H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r) \left(\left(H_1^{(1)}(k_L r) \right)^2 - \left(H_0^{(1)}(k_L r) \right)^2 \right) e^{4i\omega t}.
 \end{aligned}$$

На рис. 5 показано оба профиля – первоначальный и искаженный.

Как следует из рис. 1 и рис. 4, достаточно быстро периодичность осцилляций становится практически ровно в два раза большей и амплитуда осцилляций убывает со временем, о чем свидетельствует рис. 6, который показывает два профиля, первоначальный и искаженный, на расстоянии от $2,5 r_0$ до $5 r_0$.

Основные волновые эффекты состоят в том, что в отличие от плоской продольной волны, где волна сначала слабо отличается от линейной гармонической, далее с ростом пройденного волной расстояния или времени распространения волны первая гармоника складывается со второй и четвертой гармониками и они образуют слабомодулированную волну; в цилиндрической волне вначале видно сильное влияние третьей и меньшее влияние второй гармоник. Со временем влияние второй и третьей гармоник убывает и профиль принимает вид первого приближения; это можно наблюдать уже на промежутке от $2,5 r_0$ до $5 r_0$.

Заключение.

Таким образом, к задаче о распространении плоской продольной гармонической волны в гиперупругом материале, деформирование которого происходит квадратично нелинейно согласно классической модели Мурнагана, применен метод возмущений (метод малого параметра). В точном виде получено третье приближение через функции Ханкеля нулевого и первого порядков и их произведений. Рассмотрен вариант упрощения нового представления.

РЕЗЮМЕ. До задачі про поширення плоскої поздовжньої гармонічної хвилі в гіперупругому матеріалі, деформування якого відбувається квадратично нелінійно згідно з класичною моделлю Мурнагана, застосовано метод збурень (метод малого параметра). У точному вигляді отримано представлення третього наближення через функції Ханкеля нулевого та першого порядків та їхній добуток. Розглянуто варіант спрощення нового представлення.

1. Гузь А.Н., Руцицкий Я.Я., Гузь И.А. Введение в механику нанокompозитов. – К.: Академперіодика, 2010. – 398 с.
2. Руцицкий Я.Я., Цурнал С.І. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – К.: Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка, 1998. – 377 с.
3. Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. – Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1973. – 425 p.
4. Abrahams I.D. Antiplane wave scattering from a cylindrical void in a prestressed incompressible neo-Hookean materials // Communications Comp. Physics. – 2012. – 11. – P.367 – 382.
5. Barbieri E., Meo M., Polimeno U. Nonlinear wave propagation in damaged hysteretic materials using a frequency domain-based PM space formulation // Int. J. Solids and Struct. – 2009. – 46, N 1. – P. 165 – 180.
6. Berezovski A., Berezovski M., Engelbrecht J. Numerical simulation of nonlinear elastic wave propagation in piecewise homogeneous media // Material Science and Engineering. – 2006. – A418. – P. 354 – 360.
7. Cattani C., Rushchitsky J.J. Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro or Nanostructure. – Singapore – London: World Scientific, 2007. – 466 p.

8. Engelbrecht, J., Berezovski, A., Salupere, A.: Nonlinear deformation waves in solids and dispersion // *Wave Motion*. – 2007. – **44**, N 6. – P. 493 – 500.
9. Hakstad K. Nonlinear and dispersive acoustic wave propagation // *Geophysics*. – 2004. – **69**, N 3. – P. 840 – 848.
10. Korneev V. Spherical wave propagation in a nonlinear elastic medium // *Reports of Lawrence Berkeley National Laboratory*. – 2009. – P. 1 – 12.
11. Kratzer A., Franz W. *Transcendente Funktionen*. – Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1960. – 466 s.
12. Mueller M.F., Kim J.-Y., Qu J.M., Jacobs L.J. Characteristics of second harmonic generation of Lamb waves in nonlinear elastic plates // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 2010. – **127**, N 4. – P. 2141 – 2152.
13. Olver F.W.J. *Asymptotics and Special Functions*. – New York: Academic Press, 1974. – 528 p.
14. Rushchitsky J.J. Analysis of Propagation of Quadratically Nonlinear Hyperelastic Cylindrical Wave // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 6. – P. 848 – 858.
15. Rushchitsky J.J. *Nonlinear Elastic Waves in Materials*. – Heidelberg: Springer, 2014. – 454 p.
16. Rushchitsky J.J. On Nonlinear Description of Love Elastic Wave // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 6. – P. 629 – 640.
17. Rushchitsky J.J. On the Nonlinear Elastic Stoneley Wave // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 1. – P. 31 – 41.
18. Rushchitsky J.J. Quadratically Nonlinear Cylindrical Hyperelastic Waves – Derivation of Wave Equations. Plane Strain State // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 5. – P. 701 – 712.
19. Rushchitsky J.J. Quadratically Nonlinear Cylindrical Hyperelastic Waves – Derivation of Wave Equations. Axisymmetrical and Other States // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 6. – P. 831 – 840.
20. Rushchitsky J.J. Quadratically Nonlinear Cylindrical Hyperelastic Waves – Primary Analysis of Evolution // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 7. – P. 825 – 833.
21. Rushchitsky J.J., Sinchilo S.V. On 2D Nonlinear Wave Equations Corresponding to Murnaghan Model // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 5. – P. 533 – 539.
22. Rushchitsky J.J., Sinchilo S.V., Khotenko I.N. Generation of the Second, Fourth, Eighth and Next Harmonics by the Quadratically Nonlinear Hyperelastic Plane Longitudinal Wave // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 6. – P. 764 – 772.
23. Rushchitsky J.J., Symchuk J.V. Modeling Cylindrical Waves in Nonlinear Elastic Composites // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 6. – P. 638 – 646.
24. Salupere A., Tamm K., Engelbrecht J. Numerical simulation of solitary deformation waves in microstructured solids // *Int. J. Non-Linear Mech.* – 2008. – **43**. – P. 201 – 208.
25. Young R. Wave interactions in nonlinear elastic strings // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 2002. – **161**. – P. 65 – 92.
26. Zheng Hai-shah, Zhang Zhong-jie, Yang Bao-jun. A numerical study of 1D nonlinear P-wave propagation in solid // *Acta Seismologica Sinica*. – 2004. – **17**, N 1. – P. 80 – 86.

Поступила 07.05.2013

Утверждена в печать 19.02.2015