В.Д.Кубенко, И.В.Янчевский

НЕСТАЦИОНАРНАЯ НАГРУЗКА НА ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОЙ ПОЛУПОЛОСЫ

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: vdk@inmech.kiev.ua

Abstract. A technique is proposed for determination of the stress-strain state of elastic half-strip under action of applied to the boundary non-stationary load. The corresponding boundary problem with initial condition is formulated. The Laplace integral transform is used and further the solution is expanded into Fourier series. A progress of stress and displacement in time and by spatial coordinates is studied.

Key words: elasticity, plane problem, non-stationary processes, stress state, Laplace transform.

Введение.

Исследования нестационарных процессов в упругих телах имеют обширную библиографию. В значительной части публикаций в этом направлении рассмотрено деформирование упругого полупространства или полуплоскости при нестационарной нагрузке. Некоторые сведения о результатах исследований представлены также, например, в работах [3, 6 – 11, 13 – 17]. В работе [5] рассмотрена задача о действии нестационарной нагрузки на границу упругой полуплоскости, решение которой строилось с применением интегральных преобразований Лапласа по времени и Фурье по линейной координате вдоль границы. Инверсия преобразований строилась с применением техники Каньяра [12] совместного обращения преобразований. Указанная техника, использование которой доступно в первую очередь для изображений, однородных относительно параметров преобразований, дает возможность для некоторых видов внешней нагрузки получить точные выражения для нормального напряжения и перемещения как функции времени и расстояния от границы.

В данной публикации развивается численно-аналитический подход, позволяющий при определенных ограничениях на интервал времени исследования получить решение рассматриваемой задачи при действующей нагрузке достаточно общего вида. При этом аналитическое решение публикации [5] служит ориентиром для контроля точности результатов.

Сущность развиваемого подхода состоит в следующем. Вместо упругой полуплоскости вводится в рассмотрение упругая полуполоса определенной ширины с такими граничными условиями на боковых гранях, что представленное в виде тригонометрического ряда Фурье общее решение для волновых потенциалов позволяет удовлетворить этим условиям. Решение этой модифицированной задачи совпадает с решением исходной задачи (для полуплоскости) вплоть до момента возникновения отраженных от боковых граней волн. Применяется преобразование Лапласа по временной переменной и разложение в ряд Фурье по ширине полосы.

В результате последовательных преобразований из решения выделяются функции, имеющие скачкообразный характер, а относительно оставшейся, более гладкой части, задача обращения преобразования Лапласа сводится к решению последовательности интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода. Развиваемый ниже подход аналогичен изложенному в [13] применительно к решению задач об ударе затупленным телом.

§1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим плоскую задачу о действии нестационарной нагрузки на поверхность упругого полупространства (плоская деформация).

Введем декартовы координаты x , y , z так, что волновой процесс будет происходить в полуплоскости x , z , и используем следующие безразмерные обозначения:

$$\overline{x} = \frac{x}{h};\ \ \overline{z} = \frac{z}{h};\ \ \overline{u}_j = \frac{u_j}{h};\ \ \overline{w} = \frac{w}{h};\ \ \overline{t} = \frac{c_0 t}{h};\ \ \overline{\sigma}_{jk} = \frac{\sigma_{jk}}{E}\ \ (j,k = x,z);$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu};\ \ c_{\text{p}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\gamma}};\ \ c_{\text{s}} = \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}};\ \ c_0 = \sqrt{\frac{E}{\gamma}};\ \ \alpha = \frac{c_{\text{p}}}{c_0};\ \ \beta = \frac{c_{\text{s}}}{c_0};\ \ b = \frac{\beta}{\alpha},$$

причем далее черта над обозначениями будет опущена. Здесь h – некоторый характерный линейный размер; c_{p} , c_{s} – соответственно, скорости распространения волн расширения и волн сдвига в материале [4]; γ – его плотность; E – модуль упругости; λ и μ – постоянные Ламе; σ_{jk} – компоненты напряженного состояния.

Поведение упругой среды описывается волновыми потенциалами Φ и Ψ , которые в случае плоской задачи удовлетворяют волновым уравнениям [4]

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0;\ \ \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

и связаны с перемещениями и напряжениями соотношениями

$$u_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial z};\ \ u_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}; \tag{1.2}$$

$$\sigma_{zz} = \left(1 - 2b^2\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + 2\beta^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z}\right);\ \ \sigma_{xz} = \beta^2\left(2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right).$$

Если вместо упругой полуплоскости ввести в рассмотрение упругую полуполосу некоторой ширины, которую обозначим через $2l$, можно утверждать, что при той же внешней нагрузке волновые процессы в полуплоскости и полуполосе будут идентичны вплоть до момента появления волн, отраженных от боковых граней полуполосы. При этом на упомянутых гранях могут быть заданы произвольные граничные условия, в частности, такие, чтобы решение волновых уравнений, построенное в виде ряда Фурье на интервале $-l < x < l$, позволяло им удовлетворять. Этот прием позволяет избежать использования преобразования Фурье по линейной координате (а следовательно, и трудоемкой процедуры его обращения) и ограничиться суммированием ряда Фурье.

Сформулируем граничные условия для полуполосы, отнеся ее к координатам x , z так, что ось x направлена вдоль торца, ось z – в глубину (рис. 1).

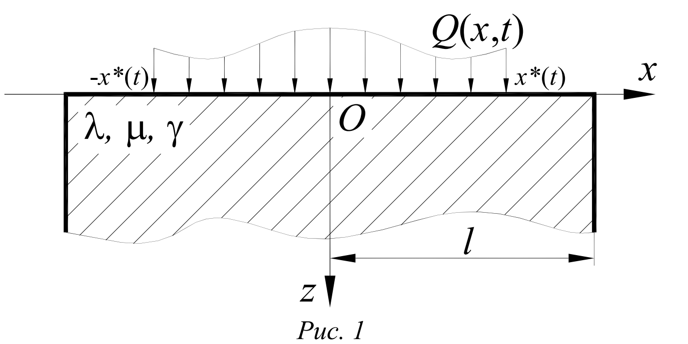


Рис. 1

Условия на торце будут состоять в задании нормального напряжения и отсутствии касательного напряжения, а именно:

$$\sigma_{zz}\big|_{z=0} = Q(t,x)\,;\;\; \sigma_{xz}\big|_{z=0} = 0\,, \tag{1.3}$$

причем функция $Q(t,x)$ раскладывается в ряд Фурье на отрезке ($-l < x < l$), т. е.

$$Q(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(t)\cos\tilde{n}x \quad (\tilde{n} = n\pi/l). \tag{1.4}$$

Примем, что на боковых гранях полуполосы (т.е. при $|x| = l$) реализуются следующие граничные условия:

$$u_x\big|_{|x|=l} = 0\,;\;\; \sigma_{xz}\big|_{|x|=l} = 0\,. \tag{1.5}$$

Кроме того, имеют место условия затухания порожденных нестационарной нагрузкой волновых возмущений на бесконечности.

Начальные условия для потенциалов нулевые, т. е.

$$\Phi_{t=0} = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{t=0} = \Psi\big|_{t=0} = \left.\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\,. \tag{1.6}$$

Если волновые уравнения подвергнуть преобразованию Лапласа по времени [1], их общее решение можно записать в виде

$$\Phi^L = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n(s)e^{-(z/\alpha)P} + \tilde{A}_n(s)e^{(z/\alpha)P}\right)\cos\tilde{n}x\,;\;\; P = \sqrt{s^2 + \alpha^2\tilde{n}^2}\,; \tag{1.7}$$

$$\Psi^L = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n(s)e^{-(z/\beta)S} + \tilde{B}_n(s)e^{(z/\beta)S}\right)\sin\tilde{n}x\,;\;\; S = \sqrt{s^2 + \beta^2\tilde{n}^2}\,.$$

Здесь индекс L обозначает изображение соответствующей функции. Напряжения и перемещения также представим в виде рядов Фурье. Из условий затухания возмущений на бесконечности следует, что $\tilde{A}_n = \tilde{B}_n = 0$. Нетрудно убедиться, что условия (1.5) выполняются автоматически. Тогда граничные условия (1.3) позволяют определить оставшиеся произвольные постоянные, в результате чего выражение для коэффициентов Фурье изображения нормального напряжения σ^L_{zz} будет иметь вид

$$\sigma^L_{zz_n} = Q^L_n\left[\frac{\left(s^2 + 2\tilde{n}^2\beta^2\right)^2}{\Delta_n}e^{-\frac{z}{\alpha}P} - \frac{4\tilde{n}^2\left(\beta^3/\alpha\right)PS}{\Delta_n}e^{-\frac{z}{\beta}S}\right] \tag{1.8}$$

$$(\,\Delta_n = \left(s^2 + 2\tilde{n}^2\beta^2\right)^2 - 4\tilde{n}^2\left(\beta^3/\alpha\right)PS\,).$$

Аналогично записываются изображения коэффициентов для остальных компонент напряженно-деформированного состояния. В частности, для перемещения u^L_z получим

$$u^L_{z_n} = -\frac{1}{\alpha}Q^L_n\left[\frac{\left(s^2 + 2\tilde{n}^2\beta^2\right)P}{\Delta_n}e^{-\frac{z}{\alpha}P} - \frac{2\tilde{n}^2\beta^2 P}{\Delta_n}e^{-\frac{z}{\beta}S}\right].$$

Задача состоит в обращении интегрального преобразования и суммировании рядов Фурье.

§2. Методика решения задачи.

Далее основное внимание уделим вычислению напряжения σ_{zz}. С целью построения процедуры обращения перепишем выражение (1.8) в виде

$$\sigma^L_{zz_n} = Q^L_n(s)\left\{e^{-\frac{z}{\alpha}s} + \left(e^{-\frac{z}{\alpha}P} - e^{-\frac{z}{\alpha}s}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{4\tilde{n}^2\left(\beta^3/\alpha\right)PS}{\Delta_n}\left\{\left[e^{-\frac{z}{\alpha}s} + \left(e^{-\frac{z}{\alpha}P} - e^{-\frac{z}{\alpha}s}\right)\right] - \left[e^{-\frac{z}{\beta}s} + \left(e^{-\frac{z}{\beta}S} - e^{-\frac{z}{\beta}s}\right)\right]\right\}\right\}. \tag{2.1}$$

Воспользуемся следующими табличными значениями оригиналов [1]:

$$L^{-1}\left\{e^{-(z/\alpha)P} - e^{-(z/\alpha)s}\right\} = k_{n\alpha}(t,z) = -H\left(t - \frac{z}{\alpha}\right)z\tilde{n}\frac{J_1\left(\alpha\tilde{n}\sqrt{t^2 - (z/\alpha)^2}\right)}{\sqrt{t^2 - (z/\alpha)^2}}; \tag{2.2}$$

$$L^{-1}\left\{e^{-(z/\beta)S} - e^{-(z/\beta)s}\right\} = k_{n\beta}(t,z) = -H\left(t - \frac{z}{\beta}\right)z\tilde{n}\frac{J_1\left(\beta\tilde{n}\sqrt{t^2 - (z/\beta)^2}\right)}{\sqrt{t^2 - (z/\beta)^2}}.$$

Здесь L^{-1} обозначает оператор обращения преобразования Лапласа; $H(t)$ – единичная функция Хевисайда; J_m – цилиндрическая функция Бесселя m-го индекса [2]. В выражении (2.1) множитель при фигурных скобках обозначим через $R_n^L(s)$

$$R^L_n(s) = \frac{4\tilde{n}^2\left(\beta^3/\alpha\right)PS}{\Delta_n} = \frac{1}{1 - 4\tilde{n}^2\left(\beta^3/\alpha\right)PS\Big/\left(s^2 + 2\tilde{n}^2\beta^2\right)^2}\cdot\frac{4\tilde{n}^2\left(\beta^3/\alpha\right)PS}{\left(s^2 + 2\tilde{n}^2\beta^2\right)^2}$$

и перепишем его в виде

$$R^L_n(s) = \frac{K^L_n(s)}{1 - K^L_n(s)};\quad K^L_n(s) = 4\tilde{n}^2\frac{\beta^3}{\alpha}\frac{PS}{\left(s^2 + 2\tilde{n}^2\beta^2\right)^2}. \tag{2.3}$$

Выражение (2.3) для R^L_n можно записать так:

$$\left(1 - K^L_n(s)\right)R^L_n = K^L_n(s),$$

откуда, применяя теорему о свертке операционного исчисления, получим интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода относительно R_n

$$R_n(t) - \int_0^t R_n(\tau)K_n(t-\tau)d\tau = K_n(t). \tag{2.4}$$

Функция $K_n(t)$, являющаяся ядром и правой частью, определяется при помощи следующей процедуры. Изображение $K^L_n(s)$ разобьем на два множителя

$$K^L_n(s) = 4\tilde{n}^2\frac{\beta^3}{\alpha}\frac{s\left(s^2 + \alpha^2\tilde{n}^2\right)}{\left(s^2 + 2\tilde{n}^2\beta^2\right)^2}\cdot\frac{S}{sP} = 4\tilde{n}^2\frac{\beta^3}{\alpha}l^L_1(s)\cdot l^L_2(s);$$

$$l^L_1(s) = \frac{s\left(s^2 + \alpha^2\tilde{n}^2\right)}{\left(s^2 + 2\tilde{n}^2\beta^2\right)^2};\quad l^L_2(s) = \frac{S}{sP}, \tag{2.5}$$

обращение которых выполним по отдельности. Первый из них – табличный [1]:

$$l_1(t) = \cos\left(\sqrt{2}\beta\tilde{n}t\right) + \frac{\sqrt{2}\tilde{n}\left(\alpha^2 - 2\beta^2\right)}{4\beta}t\cdot\sin\left(\sqrt{2}\beta\tilde{n}t\right),$$

а второй обращается после преобразования

$$l_2^L=\frac{1}{s}\frac{\left(\sqrt{s^2+\beta^2\tilde{n}^2}-s\right)+s}{\sqrt{s^2+\alpha^2\tilde{n}^2}}=\frac{1}{s\sqrt{s^2+\alpha^2\tilde{n}^2}}\left(\sqrt{s^2+\beta^2\tilde{n}^2}-s\right)+\frac{1}{\sqrt{s^2+\alpha^2\tilde{n}^2}}$$

и применения свертки

$$l_2(t)=\int_0^t f(t-\tau)\frac{\beta\tilde{n}}{\tau}J_1(\beta\tilde{n}\tau)d\tau+J_0(\alpha\tilde{n}t);\quad f(t)=\int_0^t J_0(\alpha\tilde{n}\tau)d\tau. \tag{2.6}$$

Таким образом, функция $K_n(t)$ имеет вид

$$K_n(t)=\frac{4\tilde{n}^2\beta^3}{\alpha}\int_0^t l_1(\tau)l_2(t-\tau)d\tau . \tag{2.7}$$

Из формулы (2.1) получаем окончательно выражение для $\sigma_{zz_n}(t,x,z)$

$$\sigma_{zz_n}(t,z)=H\left(t-\frac{z}{\alpha}\right)Q_n\left(t-\frac{z}{\alpha}\right)+\int_0^t Q_n(\tau)\tilde{R}_n(t-\tau,z)d\tau \tag{2.8}$$

$$(\tilde{R}_n(t,z)=k_{n\alpha}(t,z)+H(t-z/\alpha)R_n(t-z/\alpha)-H(t-z/\beta)R_n(t-z/\beta)+$$

$$+\int_0^t R_n(\tau)\left[k_{n\alpha}(t-\tau,z)-k_{n\beta}(t-\tau,z)\right]d\tau), \tag{2.9}$$

где функция $R_n(t)$ есть решение интегрального уравнения (2.3), ядро и правая часть которого задаются формулой (2.5), функции $k_{n\alpha}(t,z)$, $k_{n\beta}(t,z)$ определяются соотношениями (2.2).

Окончательно нормальное напряжение $\sigma_{zz}(t,x,z)$ в произвольной точке полуполосы, которая на конечном интервале времени моделирует волновой процесс в упругой полуплоскости, вычисляется по формуле

$$\sigma_{zz}(t,x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{zz_n}(t,z)\cos\tilde{n}x . \tag{2.10}$$

Процедура построения оригиналов коэффициентов u_{z_n}, определяющих перемещения $u_z(t,x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_{z_n}(t,z)\cos\tilde{n}x$ точек полуполосы при заданном механическом ее нагружении, аналогична изложенной выше.

§3. Числовые результаты.

Конкретные вычисления напряжения $\sigma_{zz}(t,\ x,\ z)$ были проведены для полуполосы шириной $2l=2\pi$ (рис. 1) в предположении равномерного распределения единичной нагрузки на участке $(-x^*,x^*)$, ширина которого, в общем случае, является функцией времени ($x^*=x^*(t)$). При таком варианте нагружения, т.е. при $Q(t,x)=q_0H(t)H(x^*-|x|)$, где $q_0=0{,}01$, коэффициенты ряда (1.4) могут быть вычислены на основании следующих выражений:

$$Q_0(t)=q_0\left[1-\left(1-\frac{x^*}{l}\right)H(l-x^*)\right];\quad Q_n(t)=H(l-x^*)q_0\frac{2}{\tilde{n}l}\sin(\tilde{n}x^*)\quad (n=1,2,...).$$

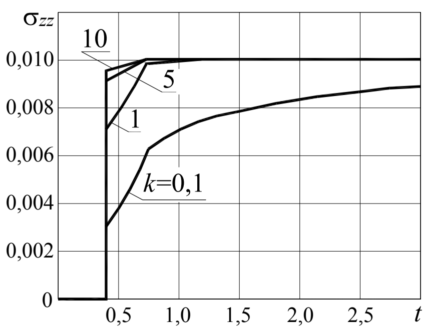
Характеристики материала приняты следующие [5] : α =1,28; β =0,69.

В качестве тестового рассмотрен случай, когда участок приложения нагрузки расширяется с постоянной скоростью $\tilde{k}$ ($x^*(t) = \tilde{k}t$). Вычисленные в соответствии с (2.10) значения напряжения σ_{zz} вдоль оси z вплоть до момента возникновения отраженных от боковых граней полуполосы волн хорошо согласуются с представленными в публикации [5] их точными значениями, что свидетельствует об эффективности разработанного подхода к исследованию нестационарного деформирования при действии нагрузок достаточно общего вида.

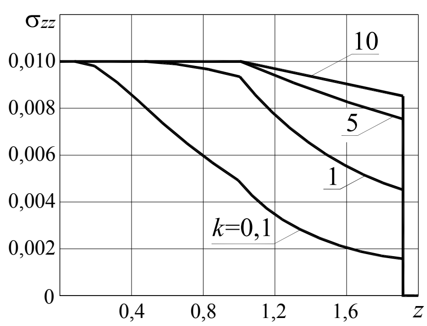
Укажем, что при решении уравнения (2.4) и вычислении входящих в (2.5) – (2.9) интегралов использованы квадратурные формулы Симпсона. Постоянный шаг интегрирования Δt, а также количество удерживаемых членов в рядах Фурье N, выбирались из условия обеспечения необходимой точности результатов. Так, отличие максимальных значений напряжений σ_{zz} (2.10) и функции R_N (2.4) на исследуемом временном интервале [0;3] при Δt =1/8000 и Δt =1/10000 не превышало 1%. При вычислении методом квадратур интегралов, содержащих функцию $k_{n\alpha}$ с точкой конечного разрыва $t = t_\alpha = z/\alpha$ ($k_{n\alpha}(t,z)\big|_{t<t_\alpha} \equiv 0$, $\lim\limits_{\delta\to 0} k_{n\alpha}(t_\alpha+\delta, z) = -z\alpha\tilde{n}^2/2$), интегрирование на содержащем эту точку интервале ($t'_\alpha ; t'_\alpha + \Delta t$) сводилось к интегрированию на интервале ненулевых значений $k_{n\alpha}$. Здесь $t'_\alpha = \Delta t \cdot E(t_\alpha/\Delta t)$, где $E(x)$ – целая часть аргумента. Аналогичная процедура применена для вычисления интегралов с подынтегральной функцией $k_{n\beta}(t,z)$.

Представленный далее графический материал иллюстрирует результаты расчета σ_{zz} и u_z для случаев, когда изменение $x^*(t)$ происходит по параболическому закону ($x^*(t) = \sqrt{\tilde{k}t}$) (рис. 2), и когда участок распределения внешней нагрузки имеет фиксированную ширину $2d$ ($x^*(t) = d$) (рис. 3).

Расчеты проводились для нескольких значений параметров $k = \tilde{k}/\alpha$ (k =0,1; 1; 5; 10) и d ($d = l/6$; $l/3$; $l/2$). При этом рис. 2, *а* и 3, *а* показывают развитие во времени нормальных напряжений в точке с координатами $x = 0$; $z = 0{,}5$, а рис. 2, *б* и 3, *б* иллюстрируют эпюры распределения напряжений вдоль оси z при $t = 1{,}5$. Наконец, на рис. 2, *в*, *г* и 3, *в*, *г* представлены кривые, отражающие динамику распределения напряжений σ_{zz} и перемещений u_z по ширине полуполосы в сечении $z = 1$ для моментов времени $t = t_\alpha \approx 0{,}78$; 1,0; $1{,}5 \approx 1{,}04 \cdot t_\beta$ и 3,0. Укажем, что штриховые линии на рис. 2, *в, г* относятся к случаю $k = 0{,}1$; сплошные – $k = 5{,}0$.

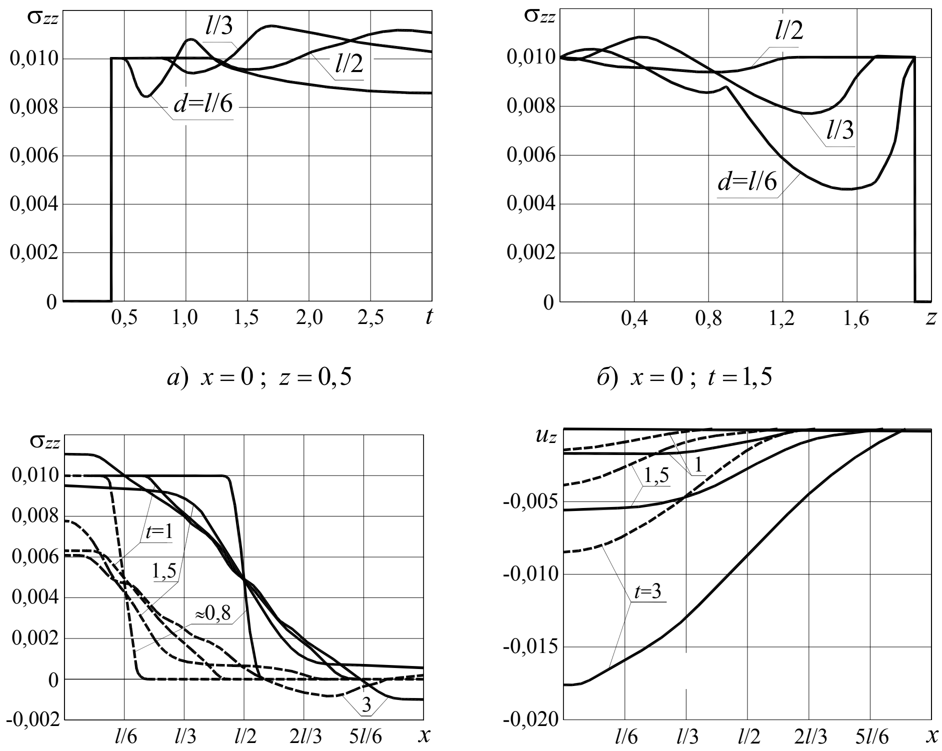


а) $x = 0$; $z = 0{,}5$



б) $x = 0$; $t = 1{,}5$

Рис. 2



а) $x = 0$; $z = 0{,}5$ *б)* $x = 0$; $t = 1{,}5$

в) $z = 1$ *г)* $z = 1$

Рис. 3

В свою очередь, штриховые линии на 3, *в, г* относятся к случаю $d = l/6$, а сплошные – $d = l/2$.

Из анализа приведенных на рис. 2, *а* – *в* кривых следует, что при движущейся в соответствии с выражением $x^*(t) = \sqrt{\tilde{k}t}$ границе области приложения нагрузки напряжение σ_{zz} в точках на оси z с приходом волны расширения ($t = t_\alpha = z/\alpha$) скачком принимает некоторое значение, меньшее q_0, причем высота скачка пропорциональна параметру скорости движения нагрузки k ($k = \tilde{k}/\alpha$) и обратно пропорциональна значению координаты z . За фронтом волны ($t > t_\alpha$) происходит непрерывное возрастание значений σ_{zz} до действующего на торцевой поверхности полуполосы ($z = 0$) единичного уровня *(*σ_{zz}=q_0). При этом для значений параметра $k = 0{,}1$, $k = 1$ на представленных на рис. 2, *а* графиках наблюдается увеличение скорости роста напряжений вплоть до момента прихода волны сдвига ($t = t_\beta = z/\beta$), после которого имеет место замедление указанного роста. Для более высоких значений параметра k ($k = 5$ и $k = 10$) максимальное на расчетном временном интервале значение σ_{zz} для точек на оси z достигается к моменту $t = t_\beta$.

Несколько иная картина напряженно-деформированного состояния возникает при фиксированной ширине участка нагружения (рис. 3). В этом случае с приходом упругой волны расширения в точку на оси z ($t = t_\alpha$) напряжение σ_{zz} скачком принимает значение q_0 (рис. 3, *а* – *в*), а распределение σ_{zz} по сечению $z = \text{const}$ при $t = t_\alpha$ качественно и количественно повторяет исходное распределение функции Q (кривые $t = t_\alpha$ – рис. 3, *в*). Выявлено, что при внезапном приложении постоянной нагрузки q_0

к части торцевой границы полуполосы ($d < l$) как напряжение σ_{zz}, так и перемещение u_z в точках $x = 0$ до прихода отраженных от боковых границ упругих волн могут превышать соответствующие случаю равномерного распределения нагрузки на торце ($d = l$) значения, для которых будут справедливы следующие выражения:

$$\tilde{\sigma}_{zz}(t,z) = H\big(t-(z/\alpha)\big)\cdot q_0\ ;\ \ \tilde{u}_z(t,z) = -H\big(t-(z/\alpha)\big)\cdot\big(q_0/\alpha\big)\cdot\big(t-(z/\alpha)\big).$$

В целом, отклонение кривой $u_z\big|_{x=0}$ от кривой $\tilde{u}_z$ при сопоставимых с шириной полуполосы областях распределения нагрузки на ее торце коррелирует с отклонением σ_{zz} от $\tilde{\sigma}_{zz}$ (рис. 3, *а*). За фронтом волны в точках оси z некоторое время сохраняется постоянное значение напряжения, после чего наблюдается поочередное уменьшение и увеличение значений σ_{zz} и затем монотонное их убывание на рассматриваемом временном интервале (кривые $d = l/6$, $d = l/3$; рис. 3, *а*. Начало уменьшения значений σ_{zz} при меньших от d ($d < l$) значениях z может быть приближенно установлено отношением d/α, однако с увеличением z происходит смещение этого момента по времени и, очевидно, имеет место при $t \ge t_\alpha$. Сравнение приведенных на рис. 2, *б* и 3, *б* графиков показывает, что волна сдвига, которая при переменном x^* обуславливает излом кривых σ_{zz}, в случае $x^* = \mathrm{const}$ оказывает слабое на них влияние, а распределение напряжений σ_{zz} в сечении $x = 0$ полуполосы за фронтом волны сжатия-растяжения имеет более сложный характер, проявляющийся также в возникновении больших, чем возбуждаемых на границе $z = 0$, напряжений σ_{zz}.

Представленные на рис. 3, *в* графики распределения напряжений σ_{zz} в сечении $z = 1$, которые вычислены при $d = l/6$ и $d = l/2$ в различные моменты времени, свидетельствуют о выравнивании (сглаживании) напряженного состояния, сопровождающееся, как и в случае переменного x^* (рис. 2, *в*), возникновением областей с напряжениями противоположного q_0 знака (кривые $t = 3$). Обнаружено, что в пределах указанных областей имеет место незначительное (не превышающее $0{,}03$ на выбранном временном интервале) смещение u_z в противоположную движению точек в средней части полуполосы сторону. При $d = l/2$ перемещение u_z точки с координатами $x = 0$ и $z = 1$ с приемлемой точностью может быть описано выражением $\tilde{u}_z(t,z)$ (расхождение значений находится в пределах 1,7 %).

Заключение.

Таким образом, в данной публикации развивается численно-аналитический подход, который на некотором конечном временном интервале позволяет получить решение рассматриваемой нестационарной задачи при действующей нагрузке достаточно общего вида. Сущность подхода состоит в том, что вместо упругой полуплоскости вводится в рассмотрение упругая полуполоса и общее решение строится в виде ряда Фурье, что позволяет избежать необходимости обращения двух интегральных преобразований. Приведенные числовые результаты подтверждают справедливость предложенного приема.

Р Е З Ю М Е . Запропоновано методику визначення напружено-деформівного стану пружної півсмуги при дії прикладеного до її межі нестаціонарного навантаження. Сформульовано відповідну граничну задачу з початковими умовами. Застосовано інтегральне перетворення Лапласа і розвинення в ряд Фур'є. Досліджено розвиток напруження і переміщення в часі і за просторовими координатами.

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований: В 2-х т. – М.: Наука, 1969. – Т. 1. – 344 с.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1966. – 295 с.
3. *Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Динамические контактные задачи с подвижными границами. – М.: Наука. Физматгиз, 1995. – 352 с.
4. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. – К.: Наук. думка, 1978. – 300 с.
5. *Кубенко В.Д.* Напряженное состояние упругой полуплоскости при нестационарном нагружении // Прикл. механика. – 2015. – **51**, № 2. – С. 3 – 12.
6. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. – 328 с.
7. *Anik′ev I. I., Maksimyuk V.A., Mikhailova M.I., Sushchenko E.A.* Incidence of a Shock Wave on a Cantilever Plate Coupled with an Elastic Rod // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 4. – P. 482 – 487.
8. *Anik′ev I. I., Maksimyuk V.A., Mikhailova M.I., Sushchenko E.A.* Nonstationary Behavior of a Cantilever – Rod System under Nearly Critical Loads // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 5. – P. 570 – 575.
9. *Anik′ev I. I., Mikhailova M.I., Sushchenko E.A.* Effect of a Lap on Deformation of Elastic Plate with an End Cut under Action of Shock Wave // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 4. – P. 570 – 575.
10. *Bakker M.C.M., Kooij B.J., and Verweij M.D,* A knife-edge load traveling on the surface of an elastic halfspace // Wave Motion. – 2012. – **49**. – P. 165 – 180.
11. *Cagniard L.* Reflexion et Refractiondes Ondes Seismiques. – Paris, 1939. – 255 p.
12. *In-Mo L.*Transient groundmotion in an elastic homogeneous halfspace to blasting loading // Soil Dynamics and Earthquake Eng. – 1996. – **15,** N 3. – P. 151 – 159.
13. *Kubenko V.D.* Nonstationary Contact of a Rigid Body with an Elastic Medium. Plane Problem // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N5. – С. 487 – 551.
14. *Mesquita E., Antes H., Thomazo L.H., Adolph M.* Transient wave propagation phenomena at viscoelastic half-spaces under distributed surface loadings // Lat. Am. J. Solids Struct. – 2012. – **9,** N 4.
15. *Payton R.G.* Transient motion of an elastic half-space due to a moving surface line load // Int. J. Eng. Sci. –1967. – **5, N**1. – P. 40 – 79.
16. *Robinson A. R., Thompson J. C.* Transient Stresses in an Elastic Half Space Resulting from the Frictionless Indentation of a Rigid Wedge-Shaped Die // ZAMM. – 1974. – 54, N 3. – P.139 – 144.
17. *Zhao X., Meguid S.A., Liew K.M.* The trancient responce of bonded piezoelectric and elastic half space with multiple interfacial collinear cracs // Acta Mech. – 2002. – **159**. – P. 11 – 27.

Поступила 11.11.2013 Утверждена в печать 19.02.2015