

УДК 531.36, 531.38

©2017. Б.И. Коносевиц, Ю.Б. Коносевиц

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МНОГОТОКОВОЙ МОДЕЛИ СИНХРОННОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДЕСЕ

Изучается динамика гироскопа в кардановом подвесе, имеющего вертикальную наружную ось подвеса и снабженного синхронным электромотором, который приводит гироскоп (ротор) во вращение. Используется математическая модель электромотора, включающая дифференциальные уравнения для токов в обмотках ротора. Момент сил трения и какие-либо управляющие моменты относительно осей подвеса предполагаются отсутствующими. Момент сил трения относительно оси ротора является нелинейной функцией угловой скорости его вращения относительно статора.

В работе доказано, что наличие минимума полной приведенной потенциальной энергии является достаточным условием устойчивости стационарных движений прибора (регулярных прецессий и равномерных вращений ротора). Таким образом, результат, полученный ранее с использованием упрощенной бестоковой модели синхронного электромотора, обобщен на случай многотоковой модели.

Ключевые слова: гироскоп в кардановом подвесе, синхронный электромотор, устойчивость.

Введение. Гироскоп в кардановом подвесе является основным элементом различных гироприборов и обладает рядом замечательных динамических свойств, что делает его одним из наиболее интересных объектов исследования в динамике системы твердых тел. В первых работах по теории гироскопа в кардановом подвесе предполагалось, что ротор либо вращается по инерции без трения, либо он вращается с постоянной угловой скоростью относительно внутренней рамки подвеса. На практике быстро вращающийся ротор испытывает значительное тормозящее воздействие сил трения, и для поддержания вращения ротора используют электродвигатель. Его статором является внутренняя “рамка” карданова подвеса, а ротором – ротор прибора.

Авторами данной работы проведен цикл исследований динамики гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем асинхронного или синхронного типа. При этом использовались известные модели электромоторов [1], в которых не учитывается изменение электрических токов, а принимаются упрощенные выражения для вращающего момента электромотора.

В частности, для гироскопа в кардановом подвесе с динамически и статически симметричным ротором, имеющего вертикальную наружную ось подвеса и снабженного синхронным электроприводом ротора, было получено необходимое и достаточное условие устойчивости его стационарных движений – это условие минимума приведенной потенциальной энергии в точке, соответствующей данному стационарному движению [2, 3]. Кроме того, для синхронного гироскопа в кардановом подвесе было установлено свойство притяжения стационарных движений, соответствующих точкам минимума приведенной потенциальной энергии [4, 5].

В настоящей работе также рассматривается гироскоп в кардановом подвесе, снабженный синхронным электроприводом ротора, но при этом используется модель синхронного электромотора [6], в которой учитывается изменение электрических токов в обмотках ротора. Предполагается, что наружная ось карданова подвеса вертикальна, трение на осях подвеса отсутствует, а момент сил трения относительно оси ротора является нелинейной функцией угловой скорости его вращения относительно статора. Показано, что наличие минимума приведенной потенциальной энергии и в этом случае является достаточным условием устойчивости стационарных движений.

1. Математическая модель синхронного гироскопа в кардановом подвесе. Работа синхронного электромотора описывается в [6] системой дифференциальных уравнений с фазовым вектором $(\theta, \dot{\theta}, i_0, i_1, \dots, i_{n_2})$. Здесь i_0 – ток в обмотке возбуждения, i_n ($n = 1, 2, \dots, n_2$) – токи в стержнях демпферной обмотки, θ – угол между радиусом-вектором к стержню с током i_{n_2} и вектором напряженности вращающегося магнитного поля статора, $\dot{\theta}$ – производная угла θ по времени t . Эти уравнения содержат следующие параметры: u – постоянное напряжение на обмотке возбуждения, R_1 и L_1 – активное и индуктивное сопротивления обмотки возбуждения, R_2 и L_2 – активное и индуктивное сопротивления стержней демпферной обмотки, B – напряженность магнитного поля статора, n_1 – число витков в обмотке возбуждения, n_2 – число стержней в демпферной обмотке, S_1 – площадь витка обмотки возбуждения, S_2 – площадь диаметрального сечения демпферной обмотки, $m \geq 0$ – коэффициент сильного регулирования, C – осевой момент инерции ротора, M – момент сил сопротивления относительно оси ротора, $\omega > 0$ – угловая скорость вращения магнитного поля в статоре.

В первом уравнении системы (1) из [6], определяющем $\ddot{\theta}$, откорректируем знак перед $m\dot{\theta}$ и коэффициент при $i_0 \sin(\theta + \pi/4)$, домножив его на 4. Знаки величин u, i_0, i_n ($n = 1, 2, \dots, n_2$) изменим на противоположные. Вместо тока i_0 введем переменную x по формуле $i_0 = x + u/R_1$, а вместо угла θ – угол $\gamma = \theta + \pi/4$. Обозначая через φ угол поворота ротора относительно статора, имеем $\varphi = \gamma + \omega t + \text{const}$. Далее предполагается, что $u > 0$.

В данной работе принята обобщенная модель гироскопа в кардановом подвесе [7, 8] (рис. 1). Динамически симметричный и статически уравновешенный гироскоп заключен в карданов подвес, составленный из двух “рамок” произвольной формы. Внутренняя ось подвеса неколлинеарна наружной оси подвеса и оси гироскопа и эти три оси, вообще говоря, не пересекаются в одной точке. Наружная ось подвеса неподвижна и направлена вертикально (или же эта ось не вертикальна, но прибор статически уравновешен). Диссипативные или управляющие моменты на осях подвеса отсутствуют. Внутренняя “рамка” подвеса является статором синхронного электромотора, а гироскоп – его ротором. Поэтому относительно оси ротора действуют вращающий момент синхронного электромотора и момент сил трения. Положение такого прибора в каждый момент времени t определяют углы α, β поворота наружной и внутренней “рамок” карданова подвеса и угол φ поворота ротора. Кинетичес-

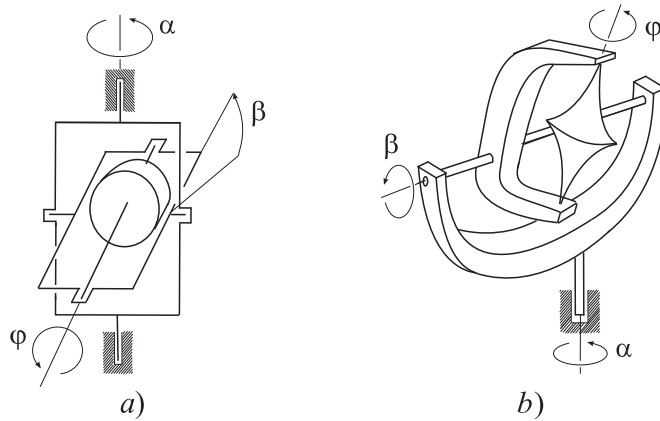


Рис. 1. Гироскоп в кардановом подвесе:
 а) общепринятая модель, б) обобщенная модель.

кая энергия прибора выражается формулой

$$T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}, \beta) = \frac{1}{2} [G(\beta)\dot{\alpha}^2 + H\dot{\beta}^2 + C\dot{\varphi}^2 + 2N(\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + 2Q(\beta)\dot{\alpha}\dot{\varphi} + 2R\dot{\beta}\dot{\varphi}], \quad (1)$$

где C – осевой момент инерции ротора, коэффициенты H, R зависят только от постоянных механических параметров. Коэффициенты G, N, Q и потенциальная энергия силы тяжести U зависят от угла β по формулам

$$\begin{aligned} G(\beta) &= g_0 + g_1 \sin \beta + g_2 \cos \beta + g_3 \sin 2\beta + g_4 \cos 2\beta, \\ N(\beta) &= n_0 + n_1 \sin \beta + n_2 \cos \beta, \quad Q(\beta) = q_0 + q_1 \sin \beta, \\ U(\beta) &= u_0 + u_1 \sin \beta + u_2 \cos \beta. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь u_0 – произвольная постоянная, а выражения остальных коэффициентов формул (2) и величин H, R через механические параметры следуют из формул (8)–(15) статьи [8]. Все эти выражения приведены в [9] и даны в Приложении. При этом из формулы $q_1 = C \sin \theta_2 \sin \theta_3$ следует, что $q_1 \neq 0$, поскольку синусы углов, которые внутренняя ось подвеса образуют с наружной осью подвеса и осью ротора, отличны от нуля. Случаю уравновешенного гироскопа соответствует $U \equiv \text{const}$.

При любом β кинетическая энергия (1) – положительно определенная квадратичная форма угловых скоростей $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}$. Поэтому, согласно критерию Сильвестра,

$$G(\beta) > 0, \quad G(\beta)H - N^2(\beta) > 0, \quad G(\beta)C - Q^2(\beta) > 0, \quad J(\beta) > 0 \quad (3)$$

при любом β . Здесь $J(\beta)$ – определитель квадратичной формы $2T$.

При сделанных предположениях обобщенными силами для лагранжевых координат α, β, φ являются $0, -U'$ и правая часть того из уравнений электромотора, которое определяет $C\ddot{\gamma}$. Здесь штрихом обозначается дифференцирование по β .

Момент сил сопротивления относительно оси ротора предполагается в [6] постоянной отрицательной величиной. В настоящей работе предполагается, что момент сил сопротивления является нечетной непрерывно дифференцируемой монотонно убывающей нелинейной функцией $M = M(\dot{\varphi})$ угловой скорости ротора $\dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} \neq 0$ знак этой функции противоположен знаку ее аргумента.

Поскольку $\dot{\varphi} = \omega + \dot{\gamma}$, момент $M(\dot{\varphi})$ представляется в виде

$$M(\dot{\varphi}) = M(\omega + \dot{\gamma}) = -c_0 + \Delta M(\dot{\gamma}),$$

где

$$\Delta M(\dot{\gamma}) = M(\omega + \dot{\gamma}) - M(\omega), \quad c_0 = -M(\omega) \quad (c_0 > 0).$$

Функция $\Delta M(\dot{\gamma})$ является монотонно убывающей вместе с $M(\dot{\varphi})$, и поэтому при $\dot{\gamma} \neq 0$ знак $\Delta M(\dot{\gamma})$ противоположен знаку $\dot{\gamma}$. Таким образом, имеем

$$\dot{\gamma} \Delta M(\dot{\gamma}) < 0 \quad (\dot{\gamma} \neq 0), \quad \Delta M(0) = 0. \quad (4)$$

Пользуясь вместо φ переменной $\gamma = \varphi - \omega t$, получаем следующие уравнения движения синхронного гироскопа в кардановом подвесе

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\dot{\alpha} G(\beta) + \dot{\beta} N(\beta) + (\omega + \dot{\gamma}) Q(\beta) \right] &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left[\dot{\alpha} N(\beta) + \dot{\beta} H + (\omega + \dot{\gamma}) R \right] - \\ &- \dot{\alpha} \left[\frac{\dot{\alpha}}{2} G'(\beta) + \dot{\beta} N'(\beta) + (\omega + \dot{\gamma}) Q'(\beta) \right] = -U'(\beta), \\ \frac{d}{dt} \left[\dot{\alpha} Q(\beta) + \dot{\beta} R + (\omega + \dot{\gamma}) C \right] &= -m\dot{\gamma} + \Delta M(\dot{\gamma}) - \\ &- a_1 x \sin \gamma - a_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2}\right) - b_0 \sin \gamma - c_0, \\ L_1 \frac{d}{dt} x &= -R_1 x + a_1 \dot{\gamma} \sin \gamma, \\ L_2 \frac{d}{dt} i_n &= -R_2 i_n + a_2 \dot{\gamma} \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2}\right), \quad n = 1, 2, \dots, n_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по β , через a_1, a_2, b_0, c_0 обозначены положительные постоянные

$$a_1 = 4\sqrt{2}n_1 S_1 B, \quad a_2 = S_2 B / 2, \quad b_0 = 4\sqrt{2}un_1 S_1 B / R_1, \quad c_0 = -M(\omega).$$

Вследствие последнего неравенства (3) уравнения (5) эквивалентны нормальной системе порядка $6+n_2$ с фазовым вектором $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2})$.

Уравнения (5) допускают интеграл

$$\dot{\alpha} G(\beta) + \dot{\beta} N(\beta) + (\omega + \dot{\gamma}) Q(\beta) = p \quad (p = \text{const}). \quad (6)$$

Рассматривая равенство (6) как определение переменной p , перейдем в уравнениях (5) к переменным $(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2})$. Для этого во второе и третье уравнения (5) подставим вытекающее из (6) выражение

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{G(\beta)} [p - \dot{\beta}N(\beta) - (\omega + \dot{\gamma})Q(\beta)]. \quad (7)$$

Получаем *преобразованную* систему уравнений движения синхронного гироскопа. Запишем ее, опустив аргумент β у функций (2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p = 0, \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{G} \left((p - \omega Q)N + \dot{\beta}(GH - N^2) + \dot{\gamma}(GR - QN) \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{2G} (p - \omega Q - \dot{\beta}N - \dot{\gamma}Q)^2 + U \right] = 0, \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{G} \left((p - \omega Q)Q + \dot{\beta}(GR - QN) + \dot{\gamma}(GC - Q^2) \right) \right] = -m\dot{\gamma} + \\ + \Delta M(\dot{\gamma}) - a_1 x \sin \gamma - a_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n \cos \left(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2} \right) - b_0 \sin \gamma - c_0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$L_1 \frac{d}{dt}x = -R_1 x + a_1 \dot{\gamma} \sin \gamma,$$

$$L_2 \frac{d}{dt}i_n = -R_2 i_n + a_2 \dot{\gamma} \cos \left(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2} \right), \quad n = 1, 2, \dots, n_2.$$

Так как $G(\beta) > 0$ при любом β согласно (3), то замена переменных $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2})$ переменными $(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2})$ взаимно однозначна и непрерывна в обе стороны. Поэтому устойчивость любого решения лагранжевой системы (5) эквивалентна устойчивости соответствующего решения преобразованной системы (8).

Отбросив в (8) первое уравнение $\dot{p} = 0$, получаем *приведенную* систему S_p , соответствующую данному значению p .

2. Стационарные решения. Далее предполагается, что

$$c_0/b_0 < 1. \quad (9)$$

Тогда уравнения (5) имеют семейство стационарных решений

$$\dot{\alpha} = \Omega^0, \quad \dot{\beta} = 0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \beta^0, \quad \gamma = \gamma^0, \quad x = 0, \quad i_1 = 0, \dots, i_{n_2} = 0, \quad (10)$$

которые описывают равномерные вращения ротора с угловой скоростью $\dot{\varphi} = \omega$ (при $\Omega^0 = 0$) и регулярные прецессии ротора вокруг наружной оси подвеса (при $\Omega^0 \neq 0$). Решение вида (10) существует при данных $\Omega^0, \beta^0, \gamma^0$, если выполнены два условия: постоянные Ω^0, β^0 связаны соотношением

$$-\Omega^0 \left[\frac{1}{2} \Omega^0 G'(\beta^0) + \omega Q'(\beta^0) \right] + U'(\beta^0) = 0, \quad (11)$$

а величина γ^0 удовлетворяет уравнению

$$b_0 \sin \gamma + c_0 = 0. \quad (12)$$

Если значение β^0 принадлежит промежутку, на котором неотрицателен дискриминант квадратного по Ω^0 трехчлена в левой части (11), то при таком β^0 уравнение (11) определяет два значения Ω^0 . В предположении (9) уравнение (12) определяет два счетных набора значений d_s, e_s величины γ^0 :

$$d_s = \gamma^{(0)} + 2\pi s, \quad e_s = \gamma^{(1)} + 2\pi s, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (13)$$

$$\gamma^{(0)} = -\arcsin c_0/b_0 \in (-\pi/2, 0), \quad \gamma^{(1)} = -\pi - \gamma^{(0)} \in (-\pi, -\pi/2). \quad (14)$$

Стационарному решению (10) системы (5) соответствует стационарное решение

$$p = p^0, \quad \dot{\beta} = 0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \beta^0, \quad \gamma = \gamma^0, \quad x = 0, \quad i_1 = 0, \dots, i_{n_2} = 0 \quad (15)$$

преобразованной системы (8), здесь $p^0 = \Omega^0 G(\beta^0) + \omega Q(\beta^0)$. Условие (11) при этом переходит в условие, которое можно записать в виде $U'_*(p^0, \beta^0) = 0$, где

$$U_*(p, \beta) = \frac{[p - \omega Q(\beta)]^2}{2G(\beta)} + U(\beta) \quad (16)$$

— приведенная потенциальная энергия силы тяжести. Стационарные решения приведенной системы S_p имеют вид

$$\dot{\beta} = 0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \beta^0, \quad \gamma = \gamma^0, \quad x = 0, \quad i_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, n_2). \quad (17)$$

Здесь значения γ^0 по-прежнему определяются уравнением (12), а значения β^0 определяются условием $U'_*(p, \beta) = 0$.

В общем случае, когда функция $U_*(p, \beta)$ не является постоянной по β , условие $U'_*(p, \beta) = 0$ определяет конечный набор значений угла β на каждом 2π -периоде. Эти значения соответствуют точкам локального минимума и локального максимума функции $U_*(p, \beta)$ и, возможно, точкам ее перегиба с горизонтальной касательной. Что касается случая постоянства функции $U_*(p, \beta)$, то в [10, 3] доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Существуют две конструкции гироскопа в кардановом подвесе такие, что функция $U_*(p, \beta)$ является постоянной по β при специальном значении \bar{p} величины p . Эти конструкции определены условиями (см. (2))*

$$D_1 : g_2 = g_3 = 0, \quad u_1 = u_2 = 0, \quad g_1^2 + 8g_4(g_0 + g_4) = 0 \quad (g_1, g_4 \neq 0).$$

$$D_2 : g_2 = g_3 = g_4 = 0, \quad u_2 = 0, \quad 2u_1g_1 + \omega^2q_1^2 = 0 \quad (g_1, u_1 \neq 0).$$

Для таких конструкций специальные значения постоянной p однозначно определяются формулами

$$\bar{p} = \omega q_0 - 2\omega q_1(g_0 + g_4)/g_1 \quad (\text{случай } D_1),$$

$$\bar{p} = \omega q_0 - \omega q_1 g_0 / g_1 \quad (\text{случай } D_2),$$

а приведенная потенциальная энергия силы тяжести (16) равна

$$U_*(p, \beta) = -4(p - \bar{p})g_4 \frac{(p - \bar{p})g_1 + 2(\bar{p} - \omega q_0)(g_1 - 4g_4 \sin \beta)}{g_1(g_1 - 4g_4 \sin \beta)^2} \quad (\text{случай } D_1),$$

$$U_*(p, \beta) = (p - \bar{p}) \frac{(p - \bar{p})g_1 - 2\omega q_1(g_0 + g_1 \sin \beta)}{2g_1(g_0 + g_1 \sin \beta)} \quad (\text{случай } D_2).$$

Следовательно, имеем следующую структуру множества стационарных решений приведенной системы для синхронного гироскопа.

Лемма 2. В вырожденных случаях, когда выполнено одно из условий D_1 или D_2 и $p = \bar{p}$, множество стационарных решений приведенной системы $S_{\bar{p}}$ несчетно и состоит из точек (17), где β^0 – любое, а γ^0 принадлежит счетному набору значений (13).

В остальных случаях множество стационарных решений приведенной системы S_p счетно и состоит из изолированных точек (17), где счетное число значений β^0 определено условием $U'_*(p, \beta) = 0$, а γ^0 принадлежит счетному набору значений (13). Следовательно, в невырожденных случаях счетное множество стационарных решений системы S_p порождается конечным числом точек (β^0, γ^0) квадрата $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ на плоскости (β, γ) .

Условия D_1, D_2 не выполняются для прибора общепринятой конструкции, так как в этом случае $G(\beta) = g_0 + g_4 \cos 2\beta$ и, следовательно, не выполняется неравенство $g_1 \neq 0$.

Определение (12) стационарных значений γ^0 угла γ можно записать в виде $dU_1(\gamma)/d\gamma = 0$, где

$$U_1(\gamma) = \int_0^\gamma (b_0 \sin \sigma + c_0) d\sigma = b_0(1 - \cos \gamma) + c_0\gamma \quad (18)$$

– потенциальная энергия, связанная с синхронным электромотором. При выполнении условия (9) определенным в (13), (14) значениям d_s и e_s ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) угла γ соответствуют точки локального минимума и локального максимума потенциальной энергии $U_1(\gamma)$.

Таким образом, если выделено некоторое стационарное решение (15) преобразованной системы (8), соответствующее определенным значениям p^0, β^0, γ^0 , то для функции $U_*(p^0, \beta)$ существуют четыре возможности: функция $U_*(p^0, \beta)$ переменной β в точке $\beta = \beta^0$ имеет А) изолированный минимум, В) изолированный максимум, С) перегиб, D) $U_*(p^0, \beta) \equiv \text{const}$. При этом для функции $U_1(\gamma)$ существуют две возможности: функция $U_1(\gamma)$ в точке $\gamma = \gamma^0$ имеет а) изолированный минимум, б) изолированный максимум. Комбинируя эти возможности, получаем 8 типов стационарных решений преобразованной системы (8), которые обозначаем следующим образом: Аа, Ва, Са, Да, Аб, Вб, Сб, Дб. Для каждого из типов Да и Дб выделяются два подтипа D_{1a}, D_{2a} и D_{1b}, D_{2b} , которые существуют при выполнении условий D_1, D_2 .

В [2, 3] устойчивость стационарных решений уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе изучалась на основе бестоковой модели синхрон-

ного электромотора. При этом функция $U_1(\gamma)$ всегда имела минимум в стационарной точке, т. е. вариант б с максимумом $U_1(\gamma)$ отсутствовал.

3. Энергетические соотношения. Для исследования устойчивости стационарных решений воспользуемся функциями Ляпунова, которые получим, пользуясь теоремой об изменении энергии. Рассмотрим три варианта теоремы об изменении энергии синхронного гироскопа в кардановом подвесе.

Вариант 1. Пусть функция E_1 определена формулой

$$E_1(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \omega + \dot{\gamma}, \beta) + T_1(x, i_1, \dots, i_{n_2}) + U(\beta),$$

где $\omega + \dot{\gamma} = \dot{\varphi}$, функция $T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}, \beta)$ выражается по формуле (1), а функция $T_1(x, i_1, \dots, i_{n_2})$ равна

$$T_1(x, i_1, \dots, i_{n_2}) = \frac{1}{2}L_1x^2 + \frac{1}{2}L_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2. \quad (19)$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} E_1(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = & \frac{1}{2}[G(\beta)\dot{\alpha}^2 + H\dot{\beta}^2 + C(\omega + \dot{\gamma})^2 + \\ & + 2N(\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + 2Q(\beta)\dot{\alpha}(\omega + \dot{\gamma}) + 2R\dot{\beta}(\omega + \dot{\gamma})] + \frac{1}{2}L_1x^2 + \frac{1}{2}L_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2 + U(\beta). \end{aligned}$$

Вычислив производную этой функции по t в силу системы уравнений (5), получаем

$$\begin{aligned} \dot{E}_1(\dot{\gamma}, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = & -m(\omega + \dot{\gamma})\dot{\gamma} + (\omega + \dot{\gamma})\Delta M(\dot{\gamma}) - R_1x^2 - R_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2 - \\ & -\omega a_1x \sin \gamma - \omega a_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n \cos(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2}) - (\omega + \dot{\gamma})(b_0 \sin \gamma + c_0). \end{aligned}$$

Вариант 2. Пусть функция E_2 определена формулой

$$E_2(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) + T_1(x, i_1, \dots, i_{n_2}) + U(\beta) + U_1(\gamma).$$

Здесь $T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta)$ – это функция, которая получается из функции $T(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}, \beta)$ при использовании переменной $\dot{\gamma}$ вместо $\dot{\varphi}$. Таким образом, с учетом (1), (19) имеем для E_2 выражение

$$\begin{aligned} E_2(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = & \frac{1}{2}[G(\beta)\dot{\alpha}^2 + H\dot{\beta}^2 + C\dot{\gamma}^2 + 2N(\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + \\ & + 2Q(\beta)\dot{\alpha}\dot{\gamma} + 2R\dot{\beta}\dot{\gamma}] + \frac{1}{2}L_1x^2 + \frac{1}{2}L_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2 + U(\beta) + U_1(\gamma). \end{aligned} \quad (20)$$

Вычислив производную функции E_2 по t в силу системы уравнений (5), получаем

$$\dot{E}_2(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = -m\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}\Delta M(\dot{\gamma}) - R_1x^2 - R_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2. \quad (21)$$

Вариант 3. В формуле (20) для E_2 заменяем величину $\dot{\alpha}$ ее выражением (7). Вместо E_2 получаем функцию

$$\begin{aligned} E_3(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = \\ = T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) + T_1(x, i_1, \dots, i_{n_2}) + U_*(p, \beta) + U_1(\gamma), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) = \frac{1}{2G(\beta)} \{ \dot{\beta}^2 [G(\beta)H - N^2(\beta)] + \\ + 2\dot{\beta}\dot{\gamma} [G(\beta)R - Q(\beta)N(\beta)] + \dot{\gamma}^2 [G(\beta)C - Q^2(\beta)] \}, \end{aligned}$$

а функции $U_*(p, \beta)$, $U_1(\gamma)$ определены в (16), (18). Из неравенств Сильвестра (3) следует, что при любом значении β функция $T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta)$ является определено положительной квадратичной формой относительно $\dot{\beta}, \dot{\gamma}$. В определении (22) функции E_3 сумма $T_* + T_1$ — полная приведенная кинетическая энергия, а сумма $U_* + U_1$ — полная приведенная потенциальная энергия рассматриваемой электромеханической системы.

Очевидно, что производная функции E_3 по t в силу преобразованной системы (8) и в силу приведенной системы S_p совпадает с производной (21) функции E_2 по t в силу системы (5), т. е.

$$\dot{E}_3(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = -m\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}\Delta M(\dot{\gamma}) - R_1x^2 - R_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2. \quad (23)$$

Если изучается устойчивость некоторого стационарного решения (15) преобразованной системы (8), то значения p^0, β^0, γ^0 рассматриваются как заданные. В этом случае определим следующую функцию фазовых переменных преобразованной системы

$$\begin{aligned} v(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) + T_1(x, i_1, \dots, i_{n_2}) + \\ + U_*(p, \beta) - U_*(p^0, \beta^0) + U_1(\gamma) - U_1(\gamma^0). \end{aligned} \quad (24)$$

Она обращается в нуль на выделенном решении этой системы. Эта функция только на константу отличается от функции (22) и поэтому имеет такую же производную (23) по t в силу данной системы:

$$\dot{v}(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = -m\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}\Delta M(\dot{\gamma}) - R_1x^2 - R_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2. \quad (25)$$

4. Теорема об устойчивости стационарных решений. Покажем, что для многотоковой модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе стационарное решение устойчиво в случае Аа. Этот результат распространяет на случай многотоковой модели теоремы 1, 5 из [2, 3]. Его доказательство основано на теореме Л. Сальвадори (теорема 2.3.1 в [11]). Она обобщает теорему Рауса–Ляпунова, которая, в свою очередь, является обобщением широко известного результата об устойчивости положения равновесия механической системы, соответствующего минимуму ее потенциальной энергии.

Прежде чем сформулировать теорему Л. Сальвадори, приведем необходимое для этого определение.

Пусть Ω – область в R^n , содержащая точку $x = 0$, I – неотрицательная числовая полуось, $f : I \times \Omega \rightarrow R^n$ – непрерывная функция такая, что $f(t, 0) \equiv 0$ и для любой пары $(t_0, x_0) \in (I \times \Omega)$ система

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{26}$$

имеет единственное решение $x(t, t_0, x_0)$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$. Правый максимальный интервал существования этого решения обозначается через $J^+(t_0, x_0)$. Система (26) допускает нулевое решение $x(t, 0, 0) \equiv 0$.

Пусть также заданы две функции – скалярная функция $V : I \times \Omega \rightarrow R$ и вектор-функция $w : I \times \Omega \rightarrow R^m$ ($m < n$), причем $V(t, 0) \equiv 0$, $w(t, 0) \equiv 0$. Через $\|\cdot\|$ обозначим норму в R^n и R^m .

Определение (Л. Сальвадори [11]). *Функция V называется положительно определенной на множествах $E_t(w = 0)$, если существует $\varepsilon' > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$ найдутся $\alpha, \beta > 0$ такие, что $V(t, x) > \alpha$ для всех $(t, x) \in I \times \Omega$, удовлетворяющих условиям $\varepsilon \leq \|x\| \leq \varepsilon'$, $\|w(t, x)\| < \beta$.*

Теорема 1 (Л. Сальвадори [11]). *Пусть непрерывно дифференцируемая функция $V : I \times \Omega \rightarrow R$ и непрерывная функция $w : I \times \Omega \rightarrow R^m$ удовлетворяют условиям:*

- 1) $V(t, 0) \equiv 0$, $w(t, 0) \equiv 0$, $t \in I$;
- 2) функция V положительно определена на множествах $E_t(w = 0)$;
- 3) производная функции V в силу системы (26) удовлетворяет неравенству $\dot{V}(t, x) \leq 0$, $(t, x) \in I \times \Omega$;
- 4) $\dot{W}(t, x) \leq 0$, где $W(t, x) = \|w(t, x)\|^2$.

Тогда нулевое решение системы (26) устойчиво.

В [12] дано обобщение теоремы 1.

Эта теорема сложна для применения, так как трудно проверяемым является условие 2 положительной определенности V на множествах $E_t(w = 0)$. Но, как отмечено в [11], в случае, когда функции V и w не зависят от t , положительная определенность V на множествах $E_t(w = 0)$ означает, что в точке $x = 0$ функция V имеет изолированный минимум на множестве точек $x \in \Omega$, удовлетворяющих условию $w(x) = 0$. Условие 4 автоматически выполняется, когда функция w – векторный первый интеграл. Следовательно, для

автономной системы

$$\dot{x} = f(x) \tag{27}$$

получаем такой результат.

Теорема 2. Пусть непрерывно дифференцируемая функция $V : \Omega \rightarrow R$ и непрерывная функция $w : \Omega \rightarrow R^m$ удовлетворяют условиям:

- 1) $V(0) = 0, \quad w(0) = 0;$
- 2) точка $x = 0$ является точкой строгого локального минимума функции V на множестве тех точек $x \in \Omega$, где $w(x) = 0;$
- 3) производная функции V в силу системы (27) удовлетворяет неравенству $\dot{V}(x) \leq 0, \quad x \in \Omega;$
- 4) $w(x) = \text{const}$ на решениях системы (27).

Тогда нулевое решение системы (27) устойчиво.

Теорема 2 сводит вопрос об устойчивости нулевого решения автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к более простой задаче об условном минимуме функции нескольких переменных.

Справедлива следующая теорема об устойчивости стационарных решений уравнений многоугольной модели синхронного гироскопа в кардановом подвесе в случае Аа.

Теорема 3. Если функция $U_*(p^0, \beta)$ имеет изолированный локальный минимум при $\beta = \beta^0$, а функция $U_1(\gamma)$ имеет локальный минимум при $\gamma = \gamma^0$, то решение (15) уравнений (8) устойчиво (по отношению к переменным, образующим фазовый вектор $(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma, x, i_1, \dots, i_{n_2})$ этих уравнений при записи их в виде нормальной системы).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теоремой 2 и покажем, что в качестве функций V, w , фигурирующих в этой теореме, можно принять функцию v , определенную в (24), и функцию $p - p^0$. В самом деле, если $w = p - p^0$, то, по условию теоремы 3, при $w = 0$, т. е. при $p = p^0$, разность $U_*(p, \beta) - U_*(p^0, \beta^0)$ в определении v является определено положительной функцией возмущения $\beta - \beta^0$. Далее, по условию теоремы 3, разность $U_1(\gamma) - U_1(\gamma^0)$ является определено положительной функцией возмущения $\gamma - \gamma^0$, а функция $T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta)$, как отмечено в п. 3, определено положительна по отношению к возмущениям $\dot{\beta}, \dot{\gamma}$ при любом β .

Следовательно, функция v , заданная формулой (24), является положительно определенной на множестве $w = 0$. Согласно (4), производная (25) функции v в силу уравнений движения является знакопостоянной отрицательной. Таким образом, все условия теоремы 2 выполнены, и поэтому решение (15) уравнений (8) устойчиво. \square

Так как $U_*(p^0, \beta)$ – аналитическая функция β , то изолированный минимум при $\beta = \beta^0$ она имеет только в случае, когда первая из ее производных по β , отличных от нуля в точке $\beta = \beta^0$, имеет четный порядок n и положительна, т. е. имеют место соотношения

$$U'_*(p^0, \beta^0) = 0, \dots, U_*^{(n-1)}(p^0, \beta^0) = 0, U_*^{(n)}(p^0, \beta^0) > 0,$$

где $n > 0$ – четное. С учетом определения (16) функции $U_*(p, \beta)$ и структуры формул (2) в [10, 3] показано, что здесь $n \leq 6$, так что n принимает одно из значений 2, 4 или 6. Для уравновешенного гироскопа $n \leq 4$.

5. Приложение. Выражения для кинетической и потенциальной энергии. В этом приложении даны детальные выражения кинетической энергии и потенциальной энергии силы тяжести для обобщенной механической модели гироскопа в кардановом подвесе, кратко описанной в п. 1.

В соответствии с этой моделью, динамически и статически уравновешенный ротор S^3 установлен в кардановом подвесе, который образован двумя твердыми телами S^1, S^2 произвольной формы (рис. 1, *b*). Здесь S^1 – внутренний элемент (внутренняя "рамка") карданова подвеса, а S^2 – его внешний элемент (внешняя "рамка"). Пусть l^0 – вертикальная ось, l^k ($k = 1, 2, 3$) – ось вращения тела S^k , C^k – центр масс тела S^k . Для того, чтобы определить лагранжевы координаты и механические параметры, вводится декартова система координат $O^0 e_1^0 e_2^0 e_3^0$, связанная с неподвижным основанием, и декартовы системы координат $O^k e_1^k e_2^k e_3^k$ ($k = 1, 2, 3$), связанные с телами S^k .

Здесь первый единичный вектор e_1^0 системы координат $O^0 e_1^0 e_2^0 e_3^0$ направлен вверх вдоль вертикальной оси l^0 . Первый единичный вектор e_1^k системы координат $O^k e_1^k e_2^k e_3^k$ ($k = 1, 2, 3$) направлен вдоль оси l^k . При этом из двух возможных направлений выбирается такое, чтобы углы θ^k ($k = 1, 2, 3$) между векторами e_1^k и e_1^{k-1} удовлетворяли условиям $\theta^k \in [0, \pi/2]$.

Внешняя ось подвеса l^1 предполагается вертикальной, и поэтому $\theta^1 = 0$. Внутренняя ось подвеса l^2 предполагается неколлинеарной внешней оси l^1 и оси ротора l^3 . Поэтому $\theta^2, \theta^3 \in (0, \pi/2]$, что позволяет определить вторые единичные векторы e_2^k ($k = 1, 2$) через векторное произведение по формуле $e_2^k = e_1^{k+1} \times e_1^k / \sin \theta^{k+1}$. Единичные векторы e_2^k ($k = 0, 3$) произвольны. Третьи единичные векторы равны $e_3^k = e_1^k \times e_2^k$ ($k = 0, 1, 2, 3$).

Точка O^3 совпадает с точкой C^3 , лежащей на оси ротора l^3 . Точки O^2, O^1 расположены на осях l^2, l^1 так, что координатная плоскость $O^2 e_2^2 e_3^2$ содержит точку O^3 , координатная плоскость $O^1 e_2^1 e_3^1$ содержит точку O^2 . Пусть

$$\begin{aligned} s^k &= O^k O^{k+1} = \sum_{i=1}^3 s_i^k e_i^k \quad (k = 1, 2), \\ c^k &= O^k C^k = \sum_{i=1}^3 c_i^k e_i^k \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Компоненты s_i^k, c_i^k ($i = 1, 2, 3$) векторов s^k, c^k являются постоянными механическими параметрами. В соответствии с выбором точек O^1 и O^2 , первые компоненты векторов s^k равны нулю: $s_1^1 = s_1^2 = 0$.

Пусть A_{ij}^k ($i, j = 1, 2, 3$) – компоненты тензора инерции тела S^k ($k = 1, 2, 3$) в системе координат $O^k e_1^k e_2^k e_3^k$, связанной с этим телом, и пусть m^k – масса тела S^k . В случае, когда ротор S^3 динамически симметричен

относительно оси l^3 , отличны от нуля только диагональные компоненты A_{11}^3 и $A_{22}^3 = A_{33}^3$ его тензора инерции. Их удобно обозначать через C и A .

Положение рассматриваемой механической системы в каждый момент времени t определяют углы α, β, φ поворота тел S^1, S^2, S^3 вокруг осей l^1, l^2, l^3 . Угол β отсчитывается в плоскости, ортогональной вектору e_1^2 (т. е. оси l^2), от $-e_2^1$ до e_3^2 . В случае общепринятой модели гироскопа в кардановом подвесе это определение β совпадает со стандартным его определением, т. е. $\beta = 0$ в положении, когда ось ротора ортогональна внешней оси подвеса (рис. 1, а).

Пользуясь введенными обозначениями, имеем для обобщенной модели гироскопа в кардановом подвесе выражение кинетической энергии (1), где

$$\begin{aligned} G(\beta) = & A_{11}^1 + (m^2 + m^3)(s_2^1 s_2^1 + s_3^1 s_3^1) + 2m^2 c_1^2 s_3^1 \sin^2 \theta^2 + \\ & + [A_{11}^2 + m^3(s_2^2 s_2^2 + s_3^2 s_3^2) + C \cos^2 \theta^3 + A \sin^2 \theta^3] \cos^2 \theta^2 - \\ & - [A_{12}^2 \sin 2\theta^2 + 2s_2^1(m^3 s_3^2 + m^2 c_3^2) - 2s_3^1(m^3 s_2^2 + m^2 c_2^2) \cos \theta^2] \cos \beta + \\ & + \left[(A_{13}^2 + \frac{(C - A) \sin 2\theta^3}{2}) \sin 2\theta^2 - 2s_2^1(m^3 s_2^2 + m^2 c_2^2) - \right. \\ & \left. - 2s_3^1(m^3 s_3^2 + m^2 c_3^2) \cos \theta^2 \right] \sin \beta + (A_{22}^2 + m^3 s_3^2 s_3^2 + A) \sin^2 \theta^2 \cos^2 \beta + \\ & + (A_{33}^2 + m^3 s_2^2 s_2^2 + C \sin^2 \theta^3 + A \cos^2 \theta^3) \sin^2 \theta^2 \sin^2 \beta - \\ & - (A_{23}^2 - m^3 s_2^2 s_3^2) \sin^2 \theta^2 \sin 2\beta, \end{aligned}$$

$$H = A_{11}^2 + m^3(s_2^2 s_2^2 + s_3^2 s_3^2) + C \cos^2 \theta^3 + A \sin^2 \theta^3,$$

$$\begin{aligned} N(\beta) = & [A_{11}^2 + m^3(s_2^2 s_2^2 + s_3^2 s_3^2) + C \cos^2 \theta^3 + A \sin^2 \theta^3] \cos \theta^2 - \\ & - [A_{12}^2 \sin \theta^2 + s_2^1(m^3 s_3^2 + m^2 c_3^2) \cos \theta^2 - s_3^1(m^3 s_2^2 + m^2 c_2^2)] \cos \beta + \\ & + \left[(A_{13}^2 + \frac{C - A}{2} \sin 2\theta^3) \sin \theta^2 - s_2^1(m^3 s_2^2 + m^2 c_2^2) \cos \theta^2 - \right. \\ & \left. - s_3^1(m^3 s_3^2 + m^2 c_3^2) \right] \sin \beta, \end{aligned}$$

$$Q(\beta) = C \cos \theta^2 \cos \theta^3 + C \sin \theta^2 \sin \theta^3 \sin \beta,$$

$$R = C \cos \theta^3.$$

Потенциальная энергия силы тяжести выражается по формуле

$$\begin{aligned} U = U(\beta) = & g[m^1 c_1^1 + m^2 c_1^2 \cos \theta^2 + (m^2 c_2^2 + m^3 s_2^2) \sin \theta^2 \cos \beta + \\ & + (m^2 c_3^2 + m^3 s_3^2) \sin \theta^2 \sin \beta], \end{aligned}$$

где g – ускорение свободного падения.

В [8] рассмотрена еще более общая модель гироскопа в кардановом подвесе, предложенная в [7]. В этой модели ротор является динамически и статически неуравновешенным, а наружная ось подвеса не вертикальна. Приведенные выше формулы следуют из формул (8)–(15) статьи [8] при $\theta^1 = 0$, $A_{22}^3 = A_{33}^3$, $A_{23}^3 = A_{12}^3 = A_{13}^3 = 0$, $c = 0$.

В п. 1 вместо θ^2, θ^3 используются обозначения θ_2, θ_3 .

1. *Климов Д.М., Харламов С.А.* Динамика гироскопа в кардановом подвесе. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
2. *Коносевиц Ю.Б.* Критерий устойчивости стационарных движений синхронного гироскопа в кардановом подвесе // *Механика твердого тела.* – 2005. – Вып. 35. – С. 115 – 123.
3. *Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б.* Об устойчивости стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* – 2013. – № 3. – С. 57–73.
4. *Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б.* Асимптотическое поведение возмущенных стационарных движений синхронного гироскопа в кардановом подвесе // *Механика твердого тела.* – 2006. – Вып. 36. – С. 64–74.
5. *Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б.* Свойство притяжения стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* – 2014. – № 4. – С. 3–14.
6. *Леонов Г.А., Зарецкий А.М.* Глобальная устойчивость и колебания динамических систем, описывающих синхронные электрические машины // *Вестн. СПбГУ. Сер. 1.* – 2012. – Вып. 4. – С. 18–27.
7. *Харламов П.В.* Составной пространственный маятник // *Механика твердого тела.* – 1972. – Вып. 4. – С. 73–82.
8. *Коносевиц Б.И.* Скорость ухода оси ротора в обобщенной задаче о гироскопе в кардановом подвесе // *Механика твердого тела.* – 1972. – Вып. 4. – С. 82–92.
9. *Konosevich B., Konosevich Yu.* Global attraction of steady motions of a gimbal-mounted asynchronous gyroscope // *Nonlinear Dynamics.* – 2015. – **79**, № 3. – P. 2005–2015. DOI 10.1007/s11071-14-1789-z
10. *Коносевиц Б.И.* Об устойчивости стационарных движений асинхронного гироскопа в кардановом подвесе // *Механика твердого тела.* – 1977. – Вып. 9. – С. 61–73.
11. *Сальвадори Л.* Об устойчивости движения // *Механика. Период. сб. переводов.* – 1970. – 6 (124). – С. 3–19.
12. *Коносевиц Б.И., Игнатъев А.О.* О критерии устойчивости Рауса–Ляпунова–Сальвадори // *Докл. НАН Украины.* – 1997. – № 10. – С. 78–79.

B.I. Konosevich, Yu.B. Konosevich

Stability of steady solutions of equations of a multi-current model of a gimbals mounted synchronous gyroscope

The subject of investigation is the dynamics of a gimbals mounted gyroscope placed on the immovable foundation in the field of gravity and supplied with the synchronous electric motor, which sets the gyroscope (rotor) in rotation. A mathematical model of the synchronous electric motor is taken that includes differential equations for electric currents in windings of the rotor. Frictional and control torques acting about the axis of gimbals are assumed to be zero. The frictional torque acting about the axis of the rotor is assumed to be nonlinear function of its angular velocity with respect to the stator. It is proved that the condition of isolated minimum of the reduced potential energy is sufficient for stability of steady-state motions of the device (with respect to the components of the phase vector of its equations of motion written in the form of normal system of differential equation).

Keywords: *gimbals mounted gyroscope, synchronous electric motor, stability.*

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
konos.donetsk@yandex.ru

Получено 15.06.17