УДК 531.36, 517.91, 517.925.5

©2017. **А.М. Ковалев, В.Н. Неспирный**

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для неавтономных систем дифференциальных уравнений получил развитие метод исследования устойчивости нулевого решения с помощью дополнительных функций. Этот метод используется для того, чтобы за счет добавления дополнительных функций откорректировать функцию со знакопостоянной производной по времени в силу рассматриваемой системы, которая может быть построена для весьма широкого класса неавтономных систем, и получить в результате функцию со знакоопределенной производной. В статье предложены способы построения дополнительных функций для случая, когда инвариантное множество, генерируемое производной функции Ляпунова по времени, имеет сложную геометрическую структуру и является объединением нескольких подмножеств, а также для случая, когда указанное инвариантное множество определяется более, чем двумя первыми членами цепочки производных по времени от инвариантного соотношения. Получены достаточные условия, при которых использование дополнительных функций обеспечивает асимптотическую или неасимптотическую устойчивость.

Ключевые слова: *неавтономные системы, устойчивость, функция Ляпунова, метод дополнительных функций.*

Введение. Задача об устойчивости некоторого положения равновесия или заданного режима движения системы была сформулирована А.М. Ляпуновым [1] в 1892 году. Им же были предложены и несколько методов исследования устойчивости. Среди них наибольшую популярность приобрел второй метод Ляпунова, основанный на изучении свойств некоторых специальным образом подбираемых функций (функций Ляпунова) и их производных в силу заданной системы. Преимущество этого метода заключается в том, что для исследования устойчивости не требуется находить решения системы. Однако построение функции Ляпунова не имеет четко определенного алгоритма в общем случае и для конкретной заданной системы требует определенного искусства.

Большое значение для развития методов исследования асимптотической устойчивости имела теорема Барбашина–Красовского [2], в которой для автономной (или периодической по времени) системы требование знакоопределенности производной функции Ляпунова в силу системы было ослаблено. Теорема гарантирует асимптотическую устойчивость при наличии знакоопределенной функции со всего лишь знакопостоянной производной, если множество обращения в нуль этой производной не содержит целых полутраекторий (за исключением нулевого решения). Построение такой функции со знакопостоянной производной для ряда важных приложений (в частности, для механических систем) оказалось гораздо проще.

Существенным вкладом в конструктивный подход к исследованию устойчивости стало появление метода дополнительных функций [3, 4]. Отправной точкой в данном методе является нахождение функции со знакопостоянной производной (без ограничения на знак самой функции). В дальнейшем, с помощью метода инвариантных соотношений [5] из множества обращения в нуль производной построенной функции выделяется инвариантное многообразие и с помощью дополнительных функций строится новая функция, которая может обращаться в нуль только уже на инвариантном многообразии. Такая функция позволяет практически полностью исследовать систему в автономном случае, выделяя устойчивые, асимптотически устойчивые и неустойчивые переменные [6, 7].

В связи с обобщением метода инвариантных соотношений на неавтономный случай [8] часть результатов метода дополнительных функций удалось перенести на случай систем с правыми частями, зависящими от времени [9], и получить теорему о частичной асимптотической устойчивости. Настоящая работа продолжает исследование, связанное с обобщением метода дополнительных функций на системы неавтономных дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи и вспомогательные утверждения. Пусть задана система неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x \in X, \quad t \in I, \tag{1}$$

где X – некоторая область пространства R^n, содержащая начало координат в качестве внутренней точки; I – бесконечный полуинтервал времени $[t_0, \infty)$; $f(x,t)$ – функция, непрерывно дифференцируемая достаточное число раз на множестве $(x,t) \in X \times I$, и при любом $t \in I$ выполняется $f(0,t) = 0$, что обеспечивает существование нулевого решения системы (1), т. е. положения равновесия в начале координат.

Ставится задача об установлении характера этого положения равновесия: устойчивое, асимптотически устойчивое или неустойчивое.

Введем следующие обозначения. Парой угловых скобок $\langle , \rangle$ будем обозначать стандартное скалярное произведение двух n-мерных векторов. Символом D_f обозначим оператор дифференцирования функции в силу системы (1). Наряду с обозначением D_f там, где это не будет допускать двусмысленности, для обозначения производной в силу системы будем использовать также точку над дифференцируемой функцией: $\dot{\varphi} = D_f\varphi$.

При анализе устойчивости с помощью функций Ляпунова часто возникает вопрос об определении наличия целых полутраекторий системы, лежащих в множестве, где производная функции Ляпунова обращается в нуль. Этот вопрос разрешается с помощью метода инвариантных соотношений, который позволяет выделить из множества, заданного некоторым соотношением, инвариантное многообразие.

Пусть исследуемое множество M определяется функцией φ:

$$M = \{(x,t) : \varphi(x,t) = 0\}.$$

Будем предполагать, что φ такова, что $\varphi(0,t)=0$. Это гарантирует, что M содержит по крайней мере нулевое решение системы (1) и, следовательно, φ является инвариантным соотношением. Тогда, согласно [8], инвариантное множество N, содержащееся в M, задается бесконечной системой функциональных уравнений:

$$\varphi(x,t)=0,\ D_f\varphi(x,t)=0,\ ...,\ D_f^s\varphi(x,t)=0,\ ... . \tag{2}$$

Большинство содержательных результатов в теории инвариантных соотношений получается в случае, когда частные производные функции φ не обращаются в нуль одновременно по крайней мере на множестве M. Поэтому далее всюду будем предполагать, что градиент функции φ не обращается в нуль на M (или, в векторном случае, что матрица Якоби вектор-функции φ имеет полный ранг).

Следующая лемма справедлива даже в том случае, если указанное свойство не выполнено.

Лемма 1. *[8] Для всех точек множества N должны выполняться уравнения* (2).

Очевидно, что бесконечная система функциональных уравнений, связывающих фиксированное число переменных, не может быть независимой. Следовательно, в (2) найдется не более, чем $n+1$ уравнений, система которых будет эквивалентна исходной бесконечномерной системе (2). Следующая теорема показывает, что искать эти независимые уравнения следует в начале цепочки.

Теорема 1. *[8] Если в последовательности* (2) *существует k функционально независимых уравнений, то независимыми будут и первые k уравнений системы* (2).

Введем обозначение для множества, которое определяется первыми k уравнениями системы (2):

$$M_k=\{(x,t)\in X\times I\ \Big|\ \varphi(x,t)=0,\ D_f\varphi(x,t)=0,\ ...,\ D_f^{k-1}\varphi(x,t)=0\}. \tag{3}$$

В соответствии с этим обозначением и определением множества M, имеем $M_1=M$. Для удобства будем считать, что M_0 совпадает со всем расширенным фазовым пространством $X\times I$. Имеет место следующее включение

$$M_k\supseteq M_{k+1}. \tag{4}$$

Пусть l – максимальное количество независимых функций в последовательности (2). Тогда, в соответствии с теоремой 1, первые l членов цепочки производных φ, $D_f\varphi$, $\ldots$, D_f^{l-1} будут независимыми, а все производные порядка l и выше будут зависеть от них. Следовательно, $M_l=M_{l+1}=\ldots=N$.

Рассмотрим тогда разности между соседними множествами $M_0\setminus M_1$, $M_1\setminus M_2$, $\ldots$, $M_{l-1}\setminus M_l$ и множество N. Построенное семейство множеств образует разбиение области определения системы (1) на подмножества, которые, по аналогии с [5], будем называть слоями области $X\times I$ относительно инвариантного соотношения $\varphi = 0$. В соответствии с [5], соотношение $\varphi = 0$, которое порождает l функционально независимых членов цепочки производных (2), называют $(l-1)$-слойным, подразумевая, что из множества M, определяемого инвариантным соотношением, следует исключить $l-1$ слой для выделения инвариантного множества N.

Лемма 2. *Пусть задано $(l-1)$-слойное инвариантное соотношение φ, а N – инвариантное множесво, определяемое им. Тогда для каждой точки $(x_*, t_*) \in M \setminus N$ найдется $1 \le k \le l$ такое, что $D_f^k \varphi(x_*, t_*) \ne 0$, а для всех $0 \le i < k$ выполнено $D_f^i \varphi(x_*, t_*) = 0$.*

Из определения слоев следует, что значение k для каждой точки (x_*, t_*) из множества $M \setminus N$ определяется номером слоя инвариантного соотношения, в котором лежит эта точка.

2. Дополнительные функции и их свойства. При достаточно общих предположениях на правые части неавтономной системы (1) для нее может быть построена функция $V(x,t)$ с отрицательно постоянной производной $\dot V(x,t)$. Если при этом сама функция $V(x,t)$ оказывается положительно определенной (в смысле существования функции Хана $a(||x||)$, оценивающей снизу функцию $V(x,t)$), то по теореме Ляпунова [1] нулевое решение системы (1) будет устойчивым (но не обязательно асимптотически).

В теоремах Ляпунова об асимптотической устойчивости и о неустойчивости существенно используется, что функция $\dot V(x,t)$ не может обращаться в нуль, за исключением начала координат.

Метод дополнительных функций [3,4,9] предназначен для максимального уменьшения множества M обращения в нуль производной $\dot V(x,t)$. Дополнительная функция V_a строится таким образом, чтобы ее производная была положительной всюду на множестве M, за исключением инвариантного множества N, содержащегося в M. При этом ее добавление к исходной функции V с некоторыми коэффициентами и показателями обеспечивает сохранение свойств функций $\dot V(x,t)$ и $V(x,t)$ в оставшейся части области определения системы (1) (прежде всего это касается знакопостоянства $\dot V$ и знакоопределенности V, если это свойство изначально имело место для нее).

Итак, пусть задана функция V, производная которой в силу системы (1) обращается в нуль на множестве M. Пусть M представляет собой объединение s многообразий M_i, проходящих через начало координат и задающихся соотношениями $\varphi_i(x,t) = 0$ (при этом φ_i может быть вектор-функцией). Тогда дополнительная функция для соотношения $\varphi_i = 0$ из объединения соотношений $\{\varphi_j = 0\}$ $(j = \overline{1,s})$ определяется формулой

$$V_{a\varphi_i}(x,t) = \Big\langle D\varphi_i(x,t), D\varphi_i(x,t)\Big\rangle^m \Big\langle D\varphi_i(x,t), \varphi_i(x,t)\Big\rangle \prod_{j \ne i} \Big\langle \varphi_j(x,t), \varphi_j(x,t)\Big\rangle. \tag{5}$$

В [4] такая функция названа дополнительной функцией второго типа. Дополнительная функция первого типа является частным случаем дополнительной функции второго типа для объединения, состоящего всего из одного соотношения.

Лемма 3. *Пусть* $\varphi_i(x,t)$ $(i = \overline{1,s})$ *— некоторые заданные функции,* M_i *— множество, определенное соотношением* $\varphi_i(x,t) = 0$*,* N_i *— множество, определяемое двумя соотношениями* $\varphi_i(x,t) = 0$*,* $D_f\varphi_i(x,t) = 0$*,* M_{i-} *— объединение всех множеств* M_j*, за исключением* M_i*, а функция* $V_{a\varphi_i}(x,t)$ *задана формулой* (5)*. Тогда производная функции* $V_{a\varphi_i}(x,t)$ *в силу системы* (1) *принимает на множестве* $M_i \setminus (M_{i-} \bigcup N_i)$ *строго положительные значения, а на множествах* N_i *и* M_{i-} *обращается в нуль.*

Доказательство. Вычислим производную функции (5):

$$\dot{V}_{a\varphi_i}(x,t) = \Big(\langle\dot{\varphi}_i,\dot{\varphi}_i\rangle^{m+1} + 2m\langle\dot{\varphi}_i,\dot{\varphi}_i\rangle^{m-1}\langle\dot{\varphi}_i,\ddot{\varphi}_i\rangle\langle\dot{\varphi}_i,\varphi_i\rangle + \langle\dot{\varphi}_i,\dot{\varphi}_i\rangle^{m}\langle\ddot{\varphi}_i,\varphi_i\rangle\Big)\times$$
$$\times\prod_{j\neq i}\langle\varphi_j,\varphi_j\rangle + 2\langle\dot{\varphi}_i,\dot{\varphi}_i\rangle^{m}\langle\dot{\varphi}_i,\varphi_i\rangle\sum_{k\neq i}\left(\langle\dot{\varphi}_k,\varphi_k\rangle\prod_{j\neq i,j\neq k}\langle\varphi_j,\varphi_j\rangle\right).$$

На множестве M_i имеет место соотношение $\varphi_i = 0$, поэтому на нем справедливо равенство

$$\dot{V}_{a\varphi_i}\Big|_{(x,t)\in M_i} = \langle\dot{\varphi}_i,\dot{\varphi}_i\rangle^{m+1}\prod_{j\neq i}\langle\varphi_j,\varphi_j\rangle. \tag{6}$$

Если $(x,t) \in M_i \setminus (M_{i-}\bigcup N_i)$, то значения φ_j отличны от нуля для всех j и, кроме того, значение производной $\dot{\varphi}_i$ не равно нулю. Из того, что полученное выражение для производной является произведением квадратов указанных ненулевых значений, следует, что $\dot{V}_{a\varphi_i}$ на множестве $M_i \setminus (M_{i-}\bigcup N_i)$ принимает строго положительные значения.

Рассмотрим точку (x,t) из множества N_i, которое является подмножеством M_i. В этих точках, в нуль обращается не только функция φ_i, но и ее производная $\dot{\varphi}_i$. Подстановка $\dot{\varphi}_i = 0$ в формулу (6) дает нулевое значение производной $\dot{V}_{a\varphi_i}$ дополнительно функции второго типа.

Наконец, определим значение $\dot{V}_{a\varphi_i}$ на множествах M_l, где $l \neq i$. Тогда обнуляются значения $\langle\varphi_l,\varphi_l\rangle$ и $\langle\dot{\varphi}_l,\varphi_l\rangle$. Поскольку в каждое из выражений $\prod\limits_{j\neq i}\langle\varphi_j,\varphi_j\rangle$ и $\langle\dot{\varphi}_k,\varphi_k\rangle\prod\limits_{j\neq i,j\neq k}\langle\varphi_j,\varphi_j\rangle$ входит множителем одно из этих значений, то каждое из этих выражений обнуляется на множестве M_l. Подстановка нулевых значений вместо этих выражений в формулу для $\dot{V}_{a\varphi_i}$, где они входят как множители, показывает, что производная дополнительной функции второго типа принимает значение нуль на каждом множестве M_l $(l \neq i)$, а, значит, и на их объединении M_{i-}. Лемма полностью доказана. □

В лемме 3 не делается никаких предположений о свойствах инвариантности множеств M_i и N_i, поэтому она справедлива для любых множеств. Однако в случае, когда N_i не является инвариантным, потребуется построить также дополнительную функцию для того же объединения соотношений, в котором соотношение $\varphi_i = 0$ будет заменено системой соотношений $\{\varphi_i = 0, \dot{\varphi}_i = 0\}$.

Также следует отметить, что все построенные дополнительные функции $\dot{V}_{a\varphi_i}$ ($i = \overline{1,n}$) имеют нулевое значение производных на пересечениях нескольких множеств. Если какое-то пересечение (например, $M_{i_1} \bigcap \cdots \bigcap M_{i_k}$) не является инвариантным множеством, то следует построить дополнительную функцию для объединения соотношений, которое получается из исходного объединения следующим образом: из объединения исключаются все соотношения $\varphi_{i_1} = 0, \ldots, \varphi_{i_k} = 0$ и вместо них добавляется одно векторное соотношение $\{\varphi_{i_1} = 0, \ldots, \varphi_{i_k} = 0\}$. При этом важно обеспечить, чтобы показатель у соответствующей дополнительной функции для пересечения был выше, чем у любой из уже построенных дополнительных функций для множеств, которые содержат это пересечение.

Таким образом, в худшем случае (если каждое из возможных пересечений представляет собой нетривиальный случай) может потребоваться рассмотрение $2^s - 1$ различных объединений и построение для каждого из них до n (в зависимости от количества слоев у соотношения, определяющего соответствующее пересечение) дополнительных функций.

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть задана система* (1) *и функция V с отрицательно-постоянной производной $\dot{V}$ в силу системы* (1). *Пусть множество обращения в нуль производной $\dot{V}$ является объединением s многообразий. Тогда добавлением к V не более $(2^s - 1)n$ дополнительных функций вида* (5), *домноженных на некоторые отрицательные коэффициенты, может быть получена функция V^*, производная которой будет также отрицательно-постоянной. При этом множество обращения в нуль производной $\dot{V}^*$ будет инвариантным множеством для системы* (1).

3. Исследование устойчивости с помощью дополнительных функций. Теорема 2 позволяет максимально сузить множество обращения в нуль производной функции V, допуская нулевые значения лишь на инвариантном множестве N. Всюду в этом разделе будем считать, что N является (по крайней мере в окрестности начала координат) многообразием.

Для дальнейшего анализа выполним замену переменных в системе (1) таким образом, чтобы N в новых координатах записывалось максимально простым образом.

Пусть инвариантное множество N задается системой уравнений $\varphi_1(x,t) = 0, \ldots, \varphi_k(x,t) = 0$. Учитывая, что траектория нулевого решения должна лежать в множестве N, для любого i должно быть выполнено $\varphi_i(0,t) = 0$. Выберем еще $n-k$ функций $\psi_j(x,t)$ таким образом, чтобы выполнялось условие $\psi_j(0,t) = 0$ и матрица Якоби системы функций (φ, ψ) по переменным x была невырожденной в каждый момент времени t, а ее определитель был равномерно ограничен по t. Тогда определим новые переменные (y, z) формулами

$$\begin{cases} y_i = \varphi_i(x,t), & i = \overline{1,k}, \\ z_j = \psi_j(x,t), & j = \overline{1,n-k}. \end{cases} \tag{7}$$

Заметим, что для случая, когда N состоит только из нулевого решения, имеем $k = n$. Это означает, что переменных z не будет, а y будет совпадать с фазовым вектором x. Следующая теорема показывает, что при положительно определенной функции Ляпунова асимптотическая устойчивость нулевого решения возможна лишь в случае $k = n$.

Теорема 3. *Пусть $V(x,t)$ — положительно определенная функция (равномерно ограниченная снизу и сверху автономными положительно определенными функциями $a(\|x\|)$ и $b(\|x\|)$ соответственно), а ее производная $\dot{V}(x,t)$ в силу системы* (1) *— функция отрицательно постоянная и обращается в нуль на множестве $M = \{(x,t) : \varphi(x,t) = 0\}$. Функции V, f и φ являются гладкими (имеют непрерывные производные сколь угодно большого порядка) и градиент φ отличен от нуля. Если соотношение $\varphi = 0$ является $(l-1)$-слойным ($l < n$), то нулевое решение $x = 0$ системы* (1) *является неасимптотически устойчивым.*

Доказательство. Заметим, что в условиях теоремы выполняются требования теоремы Ляпунова об устойчивости. Откуда следует, что решение $x = 0$ является устойчивым. Таким образом, остается показать, что решение $x = 0$ не является притягивающим.

Построим дополнительные функции для соотношений, опеределяющих множества M_1, M_2, ... M_{l-1}. Теорема 2 гарантирует, что это возможно сделать таким образом, чтобы производная функции $V^* = V + \alpha_1 V_{aM_1} + \ldots + \alpha_{l-1} V_{aM_{l-1}}$ была по-прежнему знакопостоянной, но обращалась в нуль только на множестве $M_l = N$. При этом за счет выбора показателя дополнительных функций (он должен быть выше порядка функции V) можно обеспечить сохранение знака V^* по крайней мере в некоторой окрестности нуля.

Пусть задано произвольное $\delta > 0$. Поскольку $l < n$, инвариантное многообразие будет иметь размерность не менее двух. Учитывая, что точки нулевого решения $(0,t)$ принадлежат множеству N, одна из этих размерностей будет обязательно использована для t, а другая позволит при каждом t получать различные точки в окрестности начала координат. Возьмем некоторую точку $(x_0, t_0) \in N \bigcap (B_\delta \times I)$, при этом t_0 может быть выбрано сколь угодно большим. Пусть $v_0 = V(x_0, t_0)$. Тогда в силу положительной определенности функции V, имеем $v_0 > 0$. Из условия инвариантности множества N и того, что $\dot{V} = 0$ всюду на N, имеем, что функция V будет иметь постоянное значение на любом решении с начальным условием из N, в том числе на решении $x(t; x_0, t_0)$, удовлетворяющем условию $x(t_0; x_0, t_0) = x_0$. То есть, $V(x(t; x_0, t_0), t) \equiv v_0$.

Положительно определенная функция $b(\|x\|)$ должна возрастать в точке $\|x\| = 0$, откуда следует, что локально существует обратная функция b^{-1}. Положим $\varepsilon = b^{-1}(v_0)$. Из ограниченности сверху функции V следует, что внутри окрестности B_ε значения функции $V(x,t)$ при любом t будут строго меньше v_0. Это означает, что траектория $x(t; x_0, t_0)$ не может попасть в окрестность B_ε ни при каких значениях t.

Таким образом, для любого δ и t_0 найдутся такие ε и точка $x_0 \in B_\delta$, что для любого значения t точка $x(t; x_0, t_0)$ лежит вне окрестности B_ε. Следовательно, нулевое решение не является притягивающим. □

Итак, невозможно добиться асимптотической устойчивости нулевого решения по всем переменным, если после применения метода дополнительных функций осталось нетривиальное инвариантное множество. Тем не менее при определенных условиях можно выделить часть переменных, по которым нулевое решение будет асимптотически устойчивым. Это будут переменные y, определяемые формулой (7).

Теорема 4. *Пусть $V(x,t)$ — положительно определенная функция (равномерно ограниченная снизу автономной положительно определенной функцией $a(\|x\|)$), а ее производная $\dot{V}(x,t)$ в силу системы (1) — функция отрицательно постоянная и обращается в нуль на множестве $M = \{(x,t) : \varphi(x,t) = 0\}$. Функции V, f и φ являются гладкими (имеют непрерывные производные сколь угодно большого порядка) и градиент φ отличен от нуля. Тогда, если производная каждой дополнительной функции V_{aj} допускает оценку снизу автономной положительно определенной относительно $D \setminus N_j$ функцией c_j, то нулевое решение является асимптотически устойчивым по части переменных y.*

Доказательство. Пусть разложение $a(||x||)$ начинается членом порядка малости 2β. Тогда воспользуемся теоремой (2) для построения дополнительных функций, при этом показатели выберем таким образом, чтобы было выполнено $m_k > m_{k-1} > \ldots > m_1 \geq \beta$. Тогда величина V_{aM_i} будет иметь порядок малости не ниже $2m_i + 2 > 2\beta$. Отсюда следует, что существует некоторая окрестность начала координат, в которой $V^* = V + \alpha_1 V_{aM_1} + \ldots + \alpha_{l-1} V_{aM_{l-1}}$ будет сохранять знак $V(x,t)$. Рассмотрим теперь производную $\dot{V}_f$. Поскольку вне M выполнено $V < 0$, а функции V_{aM_i} имеют больший порядок малости, то по крайней мере в некоторой окрестности $\dot{V}^*$ будет отрицательной. Поскольку $\dot{V} = 0$, $\dot{V}_{aM_j} = 0$ при $j < i$ и $\dot{V}_{aM_i} > 0$ во всех точках i-го слоя $M_i \setminus M_{i+1}$, то при $\alpha_i < 0$ для всех точек этого слоя будет выполнено $\dot{V}^* > 0$.

Для автономного случая этого результата уже было бы достаточно для заключения о частичной асимптотической устойчивости. Однако для неавтономной системы необходимо получить равномерную по времени оценку для производной. Она строится отдельно для каждого из слоев.

Для слоя $M_i \setminus M_{i+1}$ (где будем считать $y_1, \ldots, y_i$ равными нулю, а переменную y_{i+1} отличной от нуля) значения $\dot{V}$, а также $\dot{V}_{aM_j}$ при $j < i$ обращаются в нуль. А для остальных производных в силу наличия оценок, указанных в условии теоремы, имеет место неравенство $\dot{V}_{aM_j} > c_j \left(\sqrt{y_{i+1}^2 + \ldots + y_k^2}\right)$. Так как показатели дополнительных функций выбирались так, чтобы обеспечить их возрастание при увеличении номера слоя, то в определенной окрестности начала координат может быть обеспечено выполнение оценки $\dot{V}^* \geq (1 - \varepsilon) c_j(\|y\|)$.

Выбрав $c(\|y\|) = (1 - \varepsilon) \min\limits_{j=\overline{0,k}} \{|\alpha_j| c_j(\|y\|)\}$, получим, что для любого x выполнено $\dot{V}^*(x,t) \leq -c(\|y\|)$. Данная оценка позволяет применить теорему

Румянцева о частичной асимптотической устойчивости и завершить доказательство теоремы 4. □

Заключение. В работе получил развитие метод построения дополнительных функций в неавтономном случае. С его помощью доказана теорема о возможности построения функции со знакопостоянной производной, обнуляющейся лишь на инвариантном множестве. Показана возможность применения такой функции для исследования асимптотической и неасимптотической устойчивости неавтономных систем дифференциальных уравнений.

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.
2. *Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.* Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. – 1952. – **86**, №3. – С. 453-456.
3. *Ковалев А.М.* Построение функции Ляпунова со знакоопределенной производной для систем, удовлетворяющих теореме Барбашина–Красовского // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, вып. 2. – С. 266-272.
4. *Ковалев А.М., Суйков А.С.* Функции Ляпунова для систем, удовлетворяющих условиям теоремы Барбашина–Красовского // Докл. НАН Украины. – 2008. – № 12. – С. 22-27.
5. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15-24.
6. *Ковалев А.М.* Решение задач устойчивости для нелинейных систем с известной функцией со знакопостоянной производной // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 3-28.
7. *Ковалев А.М.* Инвариантность и неустойчивость // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 3-11.
8. *Ковалев А.М., Горр Г.В., Неспирный В.Н.* Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений с приложением в механике // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 3-19.
9. *Ковалев А.М., Неспирный В.Н.* Метод дополнительных функций в теории устойчивости неавтономных систем дифференциальных уравнений // Докл. НАН Украины. – 2014. – № 8. – С. 20-27.

A.M. Kovalev, V.N. Nespirnyy

The application of the method of additional functions for an investigation of stability and instability of non-autonomous systems of ordinary differential equations

For a wide class of nonautonomous systems of ordinary differential equations, functions of state variables and time can be constructed, which have non-positive time derivative by virtue of the system. The method of additional functions has been developed to construct a function, having sign-definite time derivative, by adding special function summands to the initial function. In the article, some techniques are proposed for constructing additional functions in the case of complicated geometric structure of the invariant set, generated by the time derivative of a Lyapunov function, and also in the case when this invariant set is defined by three or more terms of the time derivatives chain for some invariant relation. Sufficient conditions, under which application of these additional functions ensures asymptotic stability or non-asymptotic stability, are obtained.

Keywords: *nonautonomous systems, stability, Lyapunov function, method of additional functions.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк
Получено 16.10.17
kovalev@iamm.su, vetal_n@mail.ru