УДК 531.38

©2017. **М.Е. Лесина, Я.В. Зиновьева**

# НОВОЕ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ПО ИНЕРЦИИ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА

В задаче о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных сферическим шарниром, найдено решение, в котором момент количества движения системы тел перпендикулярен плоскости движения шарнира. Для этого решения получены уравнения подвижных и неподвижных аксоидов для каждого из тел системы.

**Ключевые слова:** *система гироскопов Лагранжа, сферический шарнир, подвижный и неподвижный аксоиды тел.*

Постановка задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных сферическим шарниром, дана в монографии [1], там же получен ряд точных решений. В работах [2–7] получены новые решения. Алгоритм построения подвижных и неподвижных аксоидов для каждого из тел системы указан в [1].

**1. Исходные соотношения.** Для задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа $S_0, S$, соединенных сферическим шарниром, получено несколько форм уравнений движения [1]. Приведем одну из них:

$$\dot{G}_1 = \omega_3 G_2 - \omega_2 G_3, \quad \dot{G}_2 = \omega_1 G_3 - \omega_3 G_1, \quad \dot{G}_3 = \omega_2 G_1 - \omega_1 G_2, \tag{1}$$

здесь $\boldsymbol{g} = G_1\mathbf{e}_1 + G_2\mathbf{e}_2 + G_3\mathbf{e}_3$ – момент количества движения системы тел, $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$ – угловая скорость полуподвижного базиса, связанная с $S$.

$$\begin{aligned} G_1 &= (A - N\cos\theta)\omega_1 + (A_0 - N\cos\theta)\Omega_1, \\ G_2 &= (A - N\cos\theta)\omega_2 + (A_0\cos\theta - N)\Omega_2 - n_0\sin\theta, \\ G_3 &= (A_0\Omega_2 - N\omega_2)\sin\theta + n + n_0\cos\theta, \end{aligned} \tag{2}$$

$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1\mathbf{e}_1 + \Omega_2\mathbf{e}_2^0 + \Omega_3\mathbf{e}_3^0$ – угловая скорость полуподвижного базиса $\mathbf{Oe}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$, который повернут на угол $\theta$ относительно $\mathbf{Oe}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ ($\mathbf{O}$ – точка пересечения $\mathbf{Oe}_3$ и $\mathbf{Oe}_3^0$ – осей динамической симметрии тел $S$ и $S_0$);

$$\mathbf{e}_2^0 = \mathbf{e}_2\cos\theta + \mathbf{e}_3\sin\theta, \quad \mathbf{e}_3^0 = -\mathbf{e}_2\sin\theta + \mathbf{e}_3\cos\theta. \tag{3}$$

Величины $\Omega_i$ и $\omega_i$ связаны соотношениями

$$\Omega_1 = \omega_1 + \dot{\theta}, \tag{4}$$

$$\Omega_2 = \omega_2\cos\theta + \omega_3\sin\theta, \qquad \Omega_3 = -\omega_2\sin\theta + \omega_3\cos\theta. \tag{5}$$

Угловые скорости тел $S$ и $S_0$ таковы:

$$\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + (\omega_3 + \dot{\varphi})\mathbf{e}_3, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_* = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2^0 + (\Omega_3 + \dot{\Phi})\mathbf{e}_3^0, \tag{7}$$

$\dot{\varphi}$, $\dot{\Phi}$ – скорости собственных вращений тел вокруг их осей динамической симметрии $\mathbf{O}e_3$ и $\mathbf{O}e_3^0$.

В этой задаче в [1] получены циклические интегралы

$$I(\omega_3 + \dot{\varphi}) = n, \qquad I_0(\Omega_3 + \dot{\Phi}) = n_0,$$

выражающие постоянство модуля момента количества движения системы

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = g^2, \tag{8}$$

и интеграл сохранения энергии

$$A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + A_0(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - 2N(\Omega_1\omega_1\cos\theta + \Omega_2\omega_2) + 2\Pi(\theta) = 2h. \tag{9}$$

Здесь $I$, $I_0$ – осевые моменты инерции гироскопов $S$ и $S_0$; $A = B + \dfrac{mm_0}{m+m_0}l^2$, $A_0 = B_0 + \dfrac{mm_0}{m+m_0}l_0^2$; $B$, $B_0$ – экваториальные моменты инерции; $N = mm_0 ll_0/(m+m_0)$; $m, m_0$ – массы тел; $l, l_0$ – расстояния от центра сферического шарнира $O$ до центров масс $C, C_0$ тел; $n, n_0, g, h$ – постоянные интегралов; $\Pi(\theta)$ – потенциальная энергия упругого элемента шарнира.

**2. Инвариантные соотношения.** Зададим инвариантное соотношение в виде $G_3 = 0$. Тогда из (8) при $G_3 = 0$ следует

$$G_1 = g\cos\alpha, \qquad G_2 = g\sin\alpha. \tag{10}$$

Подставив эти значения в (1), находим

$$\dot{\alpha} = -\omega_3, \qquad g(\omega_2\cos\alpha - \omega_1\sin\alpha) = 0. \tag{11}$$

Вариант $g = 0$ изучен в монографии [1]. Полагая $g \neq 0$, из (11) находим

$$\omega_1 = \sigma\cos\alpha, \qquad \omega_2 = \sigma\sin\alpha, \qquad \omega_3 = -\dot{\alpha}. \tag{12}$$

Учитывая (11), (12), запишем компоненты (4), (5) так

$$\Omega_1 = \sigma\cos\alpha + \dot{\theta}, \tag{13}$$

$$\Omega_2 = \sigma\sin\alpha\cos\theta - \dot{\alpha}\sin\theta, \quad \Omega_3 = -\sigma\sin\alpha\sin\theta - \dot{\alpha}\cos\theta. \tag{14}$$

Внесем (10), (12) – (14) в (2) и получим систему для определения $\sigma$, $\dot{\alpha}, \dot{\theta}$:

$$(A + A_0 - 2N\cos\theta)\sigma\cos\alpha + (A_0 - N\cos\theta)\dot{\theta} = g\cos\alpha, \tag{15}$$

$$[A+(A_0\cos\theta-2N)\cos\theta]\sigma\sin\alpha-(A_0\cos\theta-N)\dot\alpha\sin\theta=n_0\sin\theta+g\sin\alpha, \quad (16)$$

$$(A_0\cos\theta-N)\sigma\sin\alpha\sin\theta-A_0\dot\alpha\sin^2\theta=-n-n_0\cos\theta. \quad (17)$$

Из уравнений (15)–(17) определим $\sigma$, $\dot\alpha, \dot\theta$:

$$\sigma\Delta=-\big[A_0g\sin\theta\sin\alpha+(A_0\cos\theta-N)n+(A_0-N\cos\theta)n_0\big]\sin\theta, \quad (18)$$

$$\begin{gathered}\dot\alpha\Delta=-\big[(A_0\cos\theta-N)g\sin\theta\sin\alpha+(A+A_0\cos^2\theta-2N\cos\theta)n+\\ +(A\cos\theta+A_0\cos\theta-N-N\cos^2\theta)n_0\big]\sin\alpha,\end{gathered} \quad (19)$$

$$\dot\theta=\frac{g-(A+A_0-2N\cos\theta)\sigma}{(A_0-N\cos\theta)}\cos\alpha, \quad (20)$$

где

$$\Delta=-(AA_0-N^2)\sin^2\theta\sin\alpha. \quad (21)$$

В уравнении (19) перейдем от дифференцирования по $t$ к дифференцированию по $\theta$:

$$\frac{d\alpha}{d\theta}=\frac{P}{F}, \quad (22)$$

$$\begin{gathered}P=(A_0-N\cos\theta)\big[(A_0\cos\theta-N)g\sin\theta\sin\alpha+\\ +(A+A_0-2N\cos\theta)(n+n_0\cos\theta)-(A_0n+Nn_0)\sin^2\theta\big],\\ F=(AA_0-N^2)\big[g-(A+A_0-2N\cos\theta)\sigma\big]\sin^2\theta\cos\alpha.\end{gathered}$$

Заменой

$$\chi=\sin\theta\sin\alpha \quad (23)$$

преобразуем уравнение (22) так

$$\begin{gathered}\frac{d\chi}{d\theta}=\\ =\chi\sin\theta\frac{A_0Ng\chi-(A-N\cos\theta)A_0n+(A_0-N\cos\theta)Nn_0}{(A_0^2-2A_0N\cos\theta+N^2)g\chi+(A+A_0-2N\cos\theta)[(A_0\cos\theta-N)n+(A-N\cos\theta)n_0]},\end{gathered}$$

вместо $\theta$ введем переменную

$$u=\cos\theta \quad (24)$$

и перейдем от дифференцирования по $\theta$ к дифференцированию по $u$:

$$\frac{d\chi}{du}=-\chi\frac{A_0Ng\chi-(A-Nu)A_0n+(A_0-Nu)Nn_0}{(A_0^2-2A_0Nu+N^2)g\chi+(A+A_0-2Nu)[(A_0u-N)n+(A_0-Nu)n_0]}. \quad (25)$$

Это – уравнение Абеля второго рода.

Выделим частный случай, когда одно из тел, $S_0$, закреплено в центре масс, $N=0$. При этом условии уравнение (25) принимает вид

$$\frac{d\chi}{du}=\frac{An\chi}{A_0g\chi+(A+A_0)(nu+n_0)}. \quad (26)$$

Если вместо $u$ введем новую переменную

$$y = u + \frac{n_0}{n}, \tag{27}$$

тогда $\dfrac{d\chi}{dy} = \dfrac{An\chi}{A_0 g\chi + (A + A_0)ny}$ есть однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Его общий интеграл имеет вид $\left(\dfrac{g\chi + ny}{g\chi}\right)^{\frac{A}{A_0}} = c\chi$, который после подстановки (27), (23), (24) представим так: $\left(1 + \dfrac{n_0 + n\cos\theta}{g\sin\theta\sin\alpha}\right)^{k_*} = c\sin\theta\sin\alpha$, где $k_* = \dfrac{A}{A_0} > 0$.

Если $n = 0$ (угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_*$ тела $S$ перпендикулярна оси динамической симметрии $\mathbf{Oe}_3$), то, как следует из (26), $\chi = C = \mathrm{const}$, а из (23) –

$$\sin\alpha = \frac{C}{\sin\theta}. \tag{28}$$

Так как $\sin\alpha\sin\theta = C$, то $|C| \le 1$.

Подробно рассмотрим этот случай:

$$N = 0, \qquad n = 0, \tag{29}$$

при этом $\alpha$ определено соотношением (28). Подставим (29), (28) в (18)–(21), получим

$$\sigma = \frac{Cg + n_0}{AC}, \tag{30}$$

$$\dot{\alpha} = \frac{Ck_1\cos\theta}{\sin^2\theta}, \qquad \dot{\theta} = -k_1\sqrt{1 - \frac{C^2}{\sin^2\theta}}, \tag{31}$$

где

$$k_1 = \frac{A_0 Cg + (A + A_0)n_0}{AA_0C}. \tag{32}$$

Запишем основные переменные задачи $\omega_i, \Omega_i, G_i$, подставив условия (29), значения (31) и обозначение (32) в (12)–(14) и в (5), (10):

$$\omega_1 = \sigma\sqrt{1 - \frac{C^2}{\sin^2\theta}}, \qquad \omega_2 = \frac{\sigma C}{\sin\theta}, \tag{33}$$

$$\omega_3 = \frac{-\,Ck_1\cos\theta}{\sin^2\theta}, \tag{34}$$

$$\Omega_1 = (\sigma - k_1)\sqrt{1 - \frac{C^2}{\sin^2\theta}}, \qquad \Omega_2 = (\sigma - k_1)C\,\mathrm{ctg}\,\theta, \tag{35}$$

$$\Omega_3 = -C(\sigma + k_1\,\mathrm{ctg}^2\,\theta), \tag{36}$$

$$G_1 = g\sqrt{1-\frac{C^2}{\sin^2\theta}}, \qquad G_2 = \frac{gC}{\sin\theta}, \qquad G_3 = 0.$$

Найдем компоненты угловых скоростей (6), (7) тел $S, S_0$ в неизменно связанных с ними базисах:

$$\omega_1^* = \omega_1\cos\varphi + \omega_2\sin\varphi, \qquad \omega_2^* = -\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi, \qquad \omega_3^* = \omega_3 + \dot\varphi = \frac{n}{I}, \tag{37}$$

$$\Omega_1^* = \Omega_1\cos\Phi + \Omega_2\sin\Phi, \quad \Omega_2^* = -\Omega_1\sin\Phi + \Omega_2\cos\Phi, \quad \Omega_3^* = \Omega_3 + \dot\Phi = \frac{n_0}{I_0}. \tag{38}$$

Из (37) с учетом (29), (10) имеем $\dot\varphi - \dot\alpha = 0$, или

$$\varphi = \alpha. \tag{39}$$

Теперь из (29), (12) получим

$$\omega_1^* = \sigma, \qquad \omega_2^* = 0, \qquad \omega_3^* = 0. \tag{40}$$

Аналогично находим компоненты вектора $\mathbf{g} = G_1^*\mathbf{e}_1^* + G_2^*\mathbf{e}_2^* + G_3\mathbf{e}_3$:

$$G_1^* = g, \qquad G_2^* = 0, \qquad G_3^* = 0.$$

Так как $\mathbf{g}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{\omega}_*$, то угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_*$ тела $S$ сохраняет направление в пространстве. Из уравнения (31) определим зависимость угла $\theta$ от времени $t$:

$$\cos\theta = \sqrt{1-C^2}\sin(k_1 t). \tag{41}$$

Представим компоненты векторов $\boldsymbol{\omega}_*(t)$, $\mathbf{g}(t)$ в полуподвижном базисе $\mathbf{Oe}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, а $\boldsymbol{\Omega}_*(t)$ в базисе $\mathbf{Oe}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$, как явные функции времени $t$. Для этого подставим (41) в (33)–(36):

$$\omega_1(t) = \frac{\sigma\sqrt{1-C^2}\cos(k_1 t)}{\Lambda(t)}, \tag{42}$$

$$\omega_2(t) = \frac{\sigma C}{\Lambda(t)}, \tag{43}$$

$$\Omega_1(t) = \frac{-n_0\sqrt{1-C^2}\cos(k_1 t)}{A_0 C\Lambda(t)}, \tag{44}$$

$$\Omega_2(t) = \frac{-n_0\sqrt{1-C^2}\sin(k_1 t)}{A_0 C\Lambda(t)}, \tag{45}$$

$$G_1(t) = \frac{g\sqrt{1-C^2}\cos(k_1 t)}{\Lambda(t)}, \qquad G_2(t) = \frac{gC}{\Lambda(t)}, \qquad G_3(t) = 0,$$

где $\Lambda(t) = \sqrt{\cos^2(k_1 t) + C^2\sin^2(k_1 t)}$.

Завершает построение нового решения определение потенциальной энергии упругого элемента $\Pi(\theta)$ из интеграла энергии (9). Подставив в него соотношения (33), (35), (29), находим $2\Pi(\theta) = 2h - A\sigma^2 - A_0(\sigma - k_1)^2(1-$ $-C^2) = \text{const}$, т. е. пружина не напряжена.

Таким образом, при значении параметров (29), (32) соотношениями (42)–(45) определено новое решение задачи о движении двух гироскопов Лагранжа.

**3. Аксоиды тела S.** Подвижный аксоид [1] тела $S$

$$\boldsymbol{\xi} = \mu\frac{\boldsymbol{\omega}_*}{\omega_*} + \frac{\boldsymbol{\omega}_* \times \mathbf{v}}{{\omega_*}^2} \tag{46}$$

представим сначала в полуподвижном базисе:

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \xi_3\mathbf{e}_3.$$

Величину $N = (mm_0ll_0)/(m + m_0)$ представим в виде $N = (m + m_0)aa_0$, $a = (ml)/(m + m_0)$, $a_0 = (m_0l_0)/(m + m_0)$ и условие (29) запишем так: $(m + m_0)aa_0 = 0$. Из двух вариантов: $a = 0$ или $a_0 = 0$ выбираем второй

$$a_0 = 0 \tag{47}$$

(центр масс тела $S_0$ совпадает с точкой $O$ – центром сферического шарнира).

Для вектора $\mathbf{r}_* = C_*O$ ($C_*$ – центр масс системы тел) получено в [1] выражение $\mathbf{r}_* = -a\mathbf{e}_3 - a_0\mathbf{e}_3^0$, которое, вследствие (47), таково:

$$\mathbf{r}_* = -a\mathbf{e}_3. \tag{48}$$

Скорость и ускорение точки $O$ с учетом условия (47) имеют вид

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_* = -a(\omega_2\mathbf{e}_1 - \omega_1\mathbf{e}_2), \tag{49}$$

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = a\big[-(\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1)\mathbf{e}_1 + (\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3)\mathbf{e}_2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\mathbf{e}_3\big]. \tag{50}$$

Внесем (49), (33) в (46), получим

$$\boldsymbol{\xi} = \mu\frac{\boldsymbol{\omega}_*}{\omega_*} + a\mathbf{e}_3. \tag{51}$$

Теперь представим подвижный аксоид тела $S$ в неизменно связанном с ним базисе $\mathbf{O}\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3$, для этого внесем в уравнение (51) угловую скорость (40):

$$\boldsymbol{\xi} = \mu\mathbf{e}_1^* + a\mathbf{e}_3. \tag{52}$$

Зная скорость (49) и ускорение (50) точки $O$, найдем кривизну и кручение [8] траектории точки $O$. Бинормаль $\mathbf{B} = \mathbf{v}\times\mathbf{w} = B_1\mathbf{e}_1 + B_2\mathbf{e}_2 + B_3\mathbf{e}_3$, как следует из (49), (50), (12), (29), такова

$$\mathbf{B} = a^2\sigma^3(\mathbf{e}_1\cos a + \mathbf{e}_2\sin a) \tag{53}$$

(вектор $\mathbf{B}$ коллинеарен $\mathbf{g}$, следовательно, сохраняет направление в пространстве).

Кривизна траектории точки $O$ $\boldsymbol{\varkappa} = \mathbf{B}/v^3$ с учетом (53), (49) равна

$$\boldsymbol{\varkappa} = 1/a. \tag{54}$$

Отметим, что, вследствие (12), (37), ускорение $\mathbf{w} = a\sigma^2\mathbf{e}_3$. Теперь находим вектор

$$\dot{\mathbf{w}} = a\sigma^3(\mathbf{e}_1 \sin a - \mathbf{e}_2 \cos a). \tag{55}$$

Для определения кручения траектории точки $O$

$$\varkappa^0 = (\dot{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{B})\big/B^2 \tag{56}$$

подставим (55), (53) в (56), получим $\varkappa^0 = 0$, а это означает, что траектория точки $O$ – плоская кривая, которая, с учетом постоянства кривизны (54), является окружностью радиуса $a$ с центром в точке $C_*$, перпендикулярной бинормали $\mathbf{B}$.

Выберем неподвижный базис $\mathbf{C}_*\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ с вершиной в центре масс системы. Вектор $\mathbf{E}_3$ направлен по бинормали. Введем угол $\psi$ между $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{r}_* = C_*O$. Тогда

$$\mathbf{r}_* = a(\mathbf{E}_1 \cos\psi + \mathbf{E}_2 \sin\psi), \tag{57}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_* = a\dot{\psi}(-\mathbf{E}_1 \sin\psi + \mathbf{E}_2 \cos\psi), \tag{58}$$

$$\mathbf{B} = B\mathbf{E}_3.$$

Для определения $\dot{\psi}$ используем соотношения (58), (49), $\dot{\psi} = \sigma$, тогда $\psi = \sigma t$, т. е.

$$\mathbf{v} = a\sigma(-\mathbf{E}_1 \sin\psi + \mathbf{E}_2 \cos\psi). \tag{59}$$

Для установления связи между полуподвижным $C_*\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и неподвижным $\mathbf{C}_*\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ базисами представим орты векторов $\mathbf{r}_*$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$ в обоих базисах:

$$-\mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_1 \cos\psi + \mathbf{E}_2 \sin\psi,$$

$$-\mathbf{e}_1 \sin\alpha + \mathbf{e}_2 \cos\alpha = -\mathbf{E}_1 \sin\psi + \mathbf{E}_2 \cos\psi,$$

$$\mathbf{e}_1 \cos\alpha + \mathbf{e}_2 \sin\alpha = \mathbf{E}_3.$$

Отсюда получим

$$\begin{gathered}
\mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_1 \sin\alpha \sin\psi - \mathbf{E}_2 \sin\alpha \cos\psi + \mathbf{E}_3 \cos\alpha, \\
\mathbf{e}_2 = -\mathbf{E}_1 \cos\alpha \sin\psi + \mathbf{E}_2 \cos\alpha \cos\psi + \mathbf{E}_3 \sin\alpha, \\
\mathbf{e}_3 = -\mathbf{E}_1 \cos\psi - \mathbf{E}_2 \sin\psi.
\end{gathered} \tag{60}$$

Неподвижный аксоид [1] тела $S$

$$\boldsymbol{\zeta}(t,\mu) = \mathbf{r}_*(t) + \frac{\mu\boldsymbol{\omega}_*(t)}{\omega_*} + \frac{\boldsymbol{\omega}_*(t) \times \mathbf{v}(t)}{\omega_*^2} \tag{61}$$

необходимо записать в неподвижном базисе $\mathbf{C}_*\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$. Запишем (61) с учетом (46):

$$\boldsymbol{\zeta}(t,\mu) = \mathbf{r}_*(t) + \boldsymbol{\xi}(t,\mu)$$

и воспользуемся соотношениями (52), (48): $\boldsymbol{\zeta}(\mu) = \mu\mathbf{e}_1^*$. Так как $\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1\cos\varphi + \mathbf{e}_2\sin\varphi$, с учетом (39), (60) имеем $\mathbf{e}_1^* = \mathbf{E}_3$, следовательно

$$\boldsymbol{\omega}_* = \sigma\mathbf{E}_3. \tag{62}$$

Поэтому неподвижный аксоид имеет вид

$$\boldsymbol{\zeta}(\mu) = \mu\mathbf{E}_3. \tag{63}$$

При движении тела $S$ его подвижный аксоид (52) катится по неподвижному аксоиду (63). Скорость скольжения $v_C = \boldsymbol{\omega}_*\cdot\mathbf{v}/\omega_*$, как следует из (62) и (59), равна нулю.

**4. Аксоиды тела $\mathbf{S_0}$.** Подвижный аксоид тела $S_0$

$$\boldsymbol{\zeta}^0(t,\mu) = \mu\frac{\boldsymbol{\Omega}_*(t)}{\Omega_*(t)} + \frac{\boldsymbol{\Omega}_*(t)\times\mathbf{v}(t)}{\Omega_*^2(t)} \tag{64}$$

представим в базисе $O\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^0$, неизменно связанным с телом $S_0$:

$$\boldsymbol{\zeta}^0(t,\mu) = \zeta_1^0(t,\mu)\mathbf{e}_1^{0*} + \zeta_2^0(t,\mu)\mathbf{e}_2^{0*} + \zeta_3^0(t,\mu)\mathbf{e}_3^0. \tag{65}$$

Для этого необходимо представить векторы $\boldsymbol{\Omega}_*, \mathbf{v}$ в этом базисе.

Из (38) находим угол собственного вращения тела $S_0$:

$$\Phi - \Phi_0 = \int\limits_{t_0}^{t}\Big(\frac{n_0}{t_0} - \Omega_3(t)\Big)dt, \tag{66}$$

а $\Omega_3(t)$ получим из (36) с учетом (41):

$$\Omega_3(t) = \frac{C\sigma - k_1(1-C^2)\sin^2(k_1t)}{1-(1-C^2)\sin^2(k_1t)}. \tag{67}$$

Внесем (67) в (66), тогда

$$\Phi(t) = k_2t + \operatorname{arctg}(C\ \operatorname{tg}(k_1t)),\quad \Phi_0(t) = k_2t_0 + \operatorname{arctg}(C\ \operatorname{tg}(k_1t_0)), \tag{68}$$

где $k_2 = \Big(\dfrac{1}{I_0} - \dfrac{1}{A_0}\Big)n_0$.

Из (68) имеем

$$\operatorname{tg}\Phi(t) = \frac{C\ \operatorname{tg}k_1t + \operatorname{tg}k_2t}{1 - C\ \operatorname{tg}k_1t + \operatorname{tg}k_2t}. \tag{69}$$

Теперь, используя формулы перехода от полуподвижного базиса $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ к неизменно связанному с телом $S_0$ базису $O\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{e}_1^{0*} = \mathbf{e}_1 \cos\Phi + \mathbf{e}_2^0 \sin\Phi, \qquad \mathbf{e}_2^{0*} = -\mathbf{e}_1 \sin\Phi + \mathbf{e}_2^0 \cos\Phi, \tag{70}$$

получим компоненты угловой скорости $\mathbf{\Omega}_*$ тела $S_0$ в этом базисе:

$$\Omega_1^* = \Omega_1 \cos\Phi + \Omega_2 \sin\Phi, \quad \Omega_2^* = -\Omega_1 \sin\Phi + \Omega_2 \cos\Phi, \quad \Omega_3^* = \frac{n_0}{I_0}. \tag{71}$$

Подставив (44), (45), (69) в (71), находим

$$\Omega_1^*(t) = (\sigma - k_1)\sqrt{1-C^2}\cos k_2 t, \quad \Omega_2^* = -(\sigma - k_1)\sqrt{1-C^2}\sin k_2 t, \quad \Omega_3^*(t) = \frac{n_0}{l_0}. \tag{72}$$

Выразим скорость шарнира сначала в базисе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$, подставив (3) в (49):

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2^0\mathbf{e}_2^0 + v_3^0\mathbf{e}_3^0,$$

где

$$v_1 = -\frac{a\sigma C}{\Lambda(t)}, \qquad v_2^0 = \frac{a\sigma(1-C^2)\sin(k_1 t)\cos(k_1 t)}{\Lambda(t)},$$
$$v_3^0 = -a\sigma\sqrt{1-C^2}\,\cos(k_1 t). \tag{73}$$

Используя формулы перехода (70), получим вектор $\mathbf{v}$ в базисе $\mathbf{O}\ \mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^0$:

$$\mathbf{v} = v_1^{0*}\mathbf{e}_1^{0*} + v_2^{0*}\mathbf{e}_2^{0*} + v_3^0\mathbf{e}_3^0,$$

где

$$v_1^{0*} = v_1 \cos\Phi + v_2^0 \sin\Phi, \quad v_2^0 = -v_1 \sin\Phi + v_2^0 \cos\Phi. \tag{74}$$

Внесем (73), (69) в (74), получим

$$v_1^{0*}(t) = a\sigma\big[-C\cos(k_1 t)\cos(k_2 t) + \sin(k_1 t)\sin(k_2 t)\big],$$
$$v_2^{0*}(t) = a\sigma\big[C\cos(k_1 t)\sin(k_2 t) + \sin(k_1 t)\cos(k_2 t)\big], \tag{75}$$
$$v_3^0(t) = -a\sigma\sqrt{1-C^2}\cos(k_1 t).$$

С учетом (72), (75) получим компоненты подвижного аксоида (65) в виде

$$\zeta_1^{0*}(t,\mu) = -M_1(t,\mu)\cos(k_2 t) - L_1(t,\mu)\sin(k_2 t),$$
$$\zeta_2^{0*}(t,\mu) = M_1(t,\mu)\sin(k_2 t) - L_1(t,\mu)\cos(k_2 t), \tag{76}$$
$$\zeta_3^0(t,\mu) = \frac{\mu}{b} - \frac{a\sigma I_0\sqrt{1-C^2}}{A_0 b^2 C n_0}\sin(k_1 t),$$

где

$$M_1(t,\mu) = \frac{\mu I_0\sqrt{1-C^2}}{A_0 bC} + \frac{a\sigma I_0}{b^2 n_0}\sin(k_1 t),$$
$$L_1(t,\mu) = \frac{a\sigma I_0}{b^2 n_0}\Big[\frac{I_0(1-C^2)}{A_0 C} + C\Big]\cos(k_1 t), \tag{77}$$
$$b = \frac{I_0}{n_0}\Omega_*(t).$$

Подвижный аксоид тела $S_0$ определен соотношениями (76) с обозначениями (77).

Так как неподвижный базис $C_*\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ уже введен, поэтому можем записать уравнения неподвижного аксоида тела $S_0$ :

$$\boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{0}}(t,\mu) = \mathbf{r}_*(t) + \frac{\mu\boldsymbol{\Omega}_*(t)}{\Omega_*(t)} + \frac{\boldsymbol{\Omega}_*(t)\times\mathbf{v}(t)}{\Omega_*^2(t)}. \tag{78}$$

В этом базисе $\boldsymbol{\zeta}^{\mathbf{0}}(t) = \zeta_1^0(t)\mathbf{E}_1 + \zeta_2^0(t)\mathbf{E}_2 + \zeta_3^0(t)\mathbf{E}_3$.

Векторы $\mathbf{r}_*$ и $\mathbf{v}$ в неподвижном базисе уже заданы соотношениями (57), (59), поэтому достаточно записать вектор $\boldsymbol{\Omega}_*$ в этом базисе: $\boldsymbol{\Omega}_* = q_1\mathbf{E}_1 + q_2\mathbf{E}_2 + q_3\mathbf{E}_3$. Для этого воспользуемся вначале соотношениями (3), а затем формулами перехода (60). В результате получаем

$$q_1(t) = L_2(t)\cos\psi - M_2(t)\sin\psi, \quad q_2(t) = L_2(t)\sin\psi + M_2(t)\cos\psi, \quad q_3(t) = q_3^0, \tag{79}$$

где $L_2(t) = -k_2\sqrt{1-C^2}\sin(k_1 t), \quad M_2(t) = -k_2\sqrt{1-C^2}\cos(k_1 t)$.

Подставив (57), (59), (79) в (78), получаем компоненты $\zeta_i^0$ в виде

$$\zeta_1^0(t,\mu) = L_3\cos(\sigma,t) - M_3\sin(\sigma,t), \quad \zeta_2^0(t,\mu) = L_3\sin(\sigma,t) + M_3\cos(\sigma,t),$$
$$\zeta_3^0(t,\mu) = \frac{\mu I_0}{n_0 b}q_3^0 + \frac{a\sigma I_0^2}{n_0^2 b^2}L_2(t), \tag{80}$$

где $L_3 = a + \dfrac{\mu I_0 L_2(t)}{n_0 b} - \dfrac{a\sigma I_0^2 q_3^0}{n_0^2 b^2}, \quad M_3 = \dfrac{\mu I_0}{n_0 b}M_2(t).$

При движении тела $S_0$ его подвижный аксоид (76) катится по неподвижному (80). Это движение сопровождается скольжением со скоростью $v_C^0 = \dfrac{\boldsymbol{\Omega}_*\cdot\mathbf{v}}{\Omega_*}$, которая после подстановки (59), (79) равна

$$v_C^0 = \frac{-k_2\sqrt{1-C^2}a\sigma I_0}{n_0 b}\cos(k_1 t). \tag{81}$$

Таким образом, получено новое решение, в котором угловые скорости тел и момент количества движения системы таковы:

$$\boldsymbol{\omega}_* = \sigma\mathbf{e}_1^*,\ \boldsymbol{\Omega}_* = (\sigma-k_1)\sqrt{1-C^2}\Big[\mathbf{e}_1^{0*}\cos k_2 t + \mathbf{e}_2^{0*}\sin k_2 t + \mathbf{e}_3\frac{n_0}{I_0}\Big],\ \mathbf{g} = g\mathbf{e}_1^* = g\mathbf{E}_3.$$

В этом движении шарнир **O** движется по окружности радиуса $a$ в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{g}$. При этом движение тела $S$ представляет собой качение без скольжения неподвижного аксоида (63) по подвижному аксоиду (52), а движение тела $S_0$ – качение со скольжением (81) подвижного аксоида (76) по неподвижному аксоиду (80).

1. *Лесина М.Е.* Точные решения двух новых задач аналитической динамики систем сочлененных тел. – Донецк: ДонГТУ, 1996. – 238 с.
2. *Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.* Решение уравнения Абеля на инвариантном соотношении специального вида // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 58—62.
3. *Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.* Новое точное решение задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных упругим сферическим шарниром // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 41—50.
4. *Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.* Редукция системы двух уравнений с переменными коэффициентами к уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами и построение нового решения задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа // Сб. научн. тр. НГУ. – 2007. – Вып. 29. – С. 120–129.
5. *Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.* Частное решение уравнения Абеля для случая, когда одно из тел закреплено в центре масс // Сб. науч.-метод. работ. – Донецк: ДонНТУ, 2006. – Вып. 4. – С. 80–91.
6. *Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.* Частное решение задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа // Сб. науч.-метод. работ. – Донецк: ДонНТУ, 2007. – Вып. 5. – С. 32–42.
7. *Лесина М.Е., Зиновьева Я.В.* Частное решение уравнений движения системы двух гироскопов Лагранжа при одном условии, связывающем циклические постоянные // Сб. науч.-метод. работ. – Донецк: ДонНТУ, 2007. – Вып. 5. – С. 42–64.
8. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 428 с.

**M.E. Lesina, Ya.V. Zinovjeva**

**New exact solution in of the problem of motion on the inertia of two gyroscopes of Lagrange**

The problem of motion of two gyroscopes of Lagrange which are connected by spherical hinge is considered. The solution where the angular momentum of the system of rigid bodies is perpendicular to the plane of the center of mass of the body movement is found. The equations of movable and of immovable cone for each of the rigid bodies systems were received for this solution.

**Keywords:** *system of gyroscopes of Lagrange, spherical hinge, movable and immovable axoids of bodies.*

*ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк;*
*ГОУ ВПО "Донецкий национальный техн. ун-т"*

Получено 06.02.17

zinovjevayana@gmail.com