УДК 531.38; 531.39

©2017. **Г.В. Горр, А.В. Мазнев**

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННОГО МОДУЛЯ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Рассмотрена задача о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, в потенциальном силовом поле. Полагается, что уравнения движения допускают инвариантное соотношение, которое характеризуется постоянством модуля момента количества движения. Указано четыре новых класса решений уравнений движения динамически симметричного тела.

Ключевые слова: *твердое тело, момент количества движения, инвариантное соотношение.*

Введение. Неинтегрируемость в общем случае уравнений динамики твердого тела (уравнений Эйлера–Пуассона [1], уравнений Кирхгофа–Пуассона [2] и других) обосновывает построение частных решений рассматриваемых уравнений [3, 4]. Обзор результатов, полученных в классической задаче о движении тяжелого твердого тела, приведен в монографиях [3, 5]; в задаче о движении гиростата в различных силовых полях – в монографиях [6, 7].

Постановка задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в потенциальном силовом поле дана Д.Н. Горячевым [8]. Количество построенных решений в этой задаче значительно меньше количества решений классических задач [3, 5] и задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которые описываются уравнениями класса Эйлера–Пуассона и Кирхгофа–Пуассона.

В данной статье получены новые классы решений уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, в потенциальном силовом поле в случае постоянного модуля кинетического момента. Метод построения решения состоит в задании трех инвариантных соотношений, которые определяют зависимость компонент вектора угловой скорости от компонент единичного вектора оси симметрии силового поля. Для всех выбранных классов инвариантных соотношений выполнено интегрирование уравнений Пуассона. На заключительном этапе построения решения системы уравнений движения исследована задача об интегрировании динамического уравнения. Найденные классы решений в замкнутом виде отвечают случаю динамически симметричного твердого тела, имеющего неподвижную точку.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении твердого тела с неподвижной точкой в поле потенциальных сил. Уравнения движения запишем в векторном виде [8]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times a\mathbf{x} + \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \times \boldsymbol{\nu}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения тела; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силового поля; $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – силовая функция; $a = (a_{ij})$ – гирационный тензор; точка над переменными обозначает дифференцирование по времени t.

Уравнения (1) имеют первые интегралы

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \qquad \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \qquad \mathbf{x} \cdot a\mathbf{x} - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2E, \tag{2}$$

где k и E – произвольные постоянные.

Если в уравнении (1) положить $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}$, где $\mathbf{s}$ – постоянный вектор, то получим уравнения Эйлера–Пуассона задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

В статье [9] для случая $U = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}$ ($\mathbf{s}$ – постоянный вектор) показано, что, когда постоянен модуль момента количества движения,

$$\mathbf{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2, \tag{3}$$

уравнение Пуассона из (1) нельзя заменять первыми интегралами (2), поскольку существуют решения динамического уравнения из (1), которые удовлетворяют первым интегралам (2), но не удовлетворяют уравнению Пуассона из (1). Эти решения в [9] названы особыми. Особые решения уравнений Эйлера–Пуассона полностью изучены [10]. В данной статье исследованы особые решения для уравнений (1).

2. Редукция уравнений (1) на инвариантном соотношении (3). Так как в рассматриваемом случае уравнение Пуассона

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x} \tag{4}$$

заменять первыми интегралами (2) нельзя, то при решении динамического уравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times a\mathbf{x} + \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \times \boldsymbol{\nu} \tag{5}$$

будем привлекать интегралы (2). Если умножить обе части уравнения (5) скалярно на векторы $\boldsymbol{\nu}, a\mathbf{x}$, то получим два последних интеграла из (2), а при умножении на вектор $\boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}$ имеем

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}) = k(a\mathbf{x})^2 + (\boldsymbol{\nu} \cdot a\mathbf{x}) \Big[\frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \cdot \boldsymbol{\nu} - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) - 2E \Big] - \\ - \Big[a\mathbf{x} \cdot \frac{\partial U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \Big]. \tag{6}$$

При получении скалярных уравнений, вытекающих из (5), можно использовать другой базис векторов. В случае существования инвариантного соотношения (3) целесообразно в базис включить вектор $\mathbf{x}$. Здесь примем следующий базис: $\boldsymbol{\nu}$, $a\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}$ и потребуем выполнения условия некомпланарности базисных векторов, т. е. $\mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}) \neq 0$.

Справедливы утверждения:

1. Если выполнено условие $\mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}) \neq 0$, то в задаче интегрирования уравнений (1) на соотношении (3) достаточно рассматривать только уравнение (4), соотношение (3) и интегралы (2), т. е.

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}^2 = c^2, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \quad \mathbf{x} \cdot a\mathbf{x} - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2E. \quad (7)$$

Динамическое уравнение из (1) на найденном решении уравнений Пуассона будет выполняться автоматически.

2. Если выполняется условие $\mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}) = 0$, или в скалярной форме при выборе $a = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$ равенство

$$(a_2 - a_3)\nu_1 x_2 x_3 + (a_3 - a_1)\nu_2 x_3 x_1 + (a_1 - a_2)\nu_3 x_1 x_2 = 0, \quad (8)$$

то, кроме (7), необходимо рассматривать и уравнения (6), (8).

Интегрирование уравнения Пуассона (4) с учетом (7) будем проводить в главной системе координат: $A = a^{-1} = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$. Будем использовать компоненты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ вектора угловой скорости, при этом $\omega_i = a_i x_i$, $x_i = A_i \omega_i \quad (i = \overline{1,3})$.

Запишем (4) в скалярной форме

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3 \nu_2 - \omega_2 \nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1 \nu_3 - \omega_3 \nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2 \nu_1 - \omega_1 \nu_2. \quad (9)$$

Инвариантное соотношение (3) и интегралы из (7) представим в виде

$$\begin{gathered} A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2 + A_3^2\omega_3^2 = c^2, \qquad A_1\omega_1\nu_1 + A_2\omega_2\nu_2 + A_3\omega_3\nu_3 = k, \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \qquad A_1\omega_1^2 + A_2\omega_1^2 + A_3\omega_1^2 - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2E. \end{gathered} \quad (10)$$

Данные равенства рассматриваем при условии $A\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}) \neq \mathbf{0}$:

$$(A_1 - A_2)\omega_1\omega_2\nu_3 + (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3\nu_1 + (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1\nu_2 \neq 0.$$

Сформулируем более подробно постановку задачи. Заданы, кроме (3), три инвариантных соотношения

$$\omega_i = \omega_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \quad (i = \overline{1,3}). \quad (11)$$

Требуется выполнить интегрирование уравнений (9) и потребовать, чтобы первое и второе соотношения из системы (10) были тождествами по ν_3 на полученном решении уравнений Пуассона. Тогда четвертое равенство из (10) будет служить для определения функции $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, соответствующей полученному решению уравнений (9).

3. Первый класс особых решений. Зададим три инвариантных соотношения (ИС) (11) в виде

$$\omega_1 = \beta_1 g(\nu_3), \quad \omega_2 = \beta_2 g(\nu_3), \quad \omega_3 = h(\nu_3), \tag{12}$$

где β_1, β_2 – параметры, $g(\nu_3), h(\nu_3)$ – дифференцируемые функции переменной ν_3. Подставим (12) в уравнения (9)

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= \nu_2 h(\nu_3) - \beta_2 \nu_3 g(\nu_3), \\ \dot{\nu}_2 &= -\nu_1 h(\nu_3) + \beta_1 \nu_3 g(\nu_3), \\ \dot{\nu}_3 &= g(\nu_3)(\beta_2 \nu_1 - \beta_1 \nu_2). \end{aligned} \tag{13}$$

Уравнения (13) имеют первый интеграл с фиксированной постоянной

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1 \tag{14}$$

и интегральное соотношение

$$\beta_1 \nu_1 + \beta_2 \nu_2 + \int \frac{h(\nu_3)}{g(\nu_3)} d\nu_3 = c_1, \tag{15}$$

где c_1 – произвольная постоянная. Предполагаем, что функции $h(\nu_3), g(\nu_3)$ таковы, что интеграл в (15) имеет первообразную в классе элементарных функций. Для нахождения решения уравнений (13), интеграл (14) параметризуем так

$$\nu_1 = \sqrt{1-\nu_3^2}\sin\varphi, \qquad \nu_2 = \sqrt{1-\nu_3^2}\cos\varphi. \tag{16}$$

В силу (16) из (15) получим

$$\chi_0 \sqrt{1-\nu_3^2}\sin(\varphi + \beta_0) = F(\nu_3), \tag{17}$$

где

$$\chi_0 = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}, \qquad \beta_0 = \operatorname{arctg}\frac{\beta_2}{\beta_1}, \qquad F(\nu_3) = c_1 - \int \frac{h(\nu_3)}{g(\nu_3)} d\nu_3. \tag{18}$$

На основании (17), (18) из третьего уравнения системы (13) имеем

$$\int\limits_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{g(\nu_3)\sqrt{\chi_0^2(1-\nu_3^2) - F^2(\nu_3)}} = t_0 - t. \tag{19}$$

Из (19) определяется функция $\nu_3 = \nu_3(t)$. Переменные ν_1, ν_2 найдем из (16), учтя (17),

$$\begin{aligned} \nu_1 = \nu_1(\nu_3) &= \sqrt{1-\nu_3^2}\sin\Big(\arcsin\frac{F(\nu_3)}{\chi_0\sqrt{1-\nu_3^2}} - \beta_0\Big), \\ \nu_2 = \nu_2(\nu_3) &= \sqrt{1-\nu_3^2}\cos\Big(\arcsin\frac{F(\nu_3)}{\chi_0\sqrt{1-\nu_3^2}} - \beta_0\Big). \end{aligned} \tag{20}$$

Подставим значения ω_i $(i=\overline{1,3})$ из (12) в равенства (10)

$$\begin{aligned}
&g^2(\nu_3)(A_1^2\beta_1^2+A_2^2\beta_2^2)+A_3^2h^2(\nu_3)=c^2,\\
&g(\nu_3)(A_1\beta_1\nu_1(\nu_3)+A_2\beta_2\nu_2(\nu_3))+A_3\nu_3h(\nu_3)=k,\\
&g^2(\nu_3)(A_1\beta_1^2+A_2\beta_2^2)+A_3h^2(\nu_3)-2E=2U(\nu_3).
\end{aligned}\tag{21}$$

Из последнего соотношения системы (21) следует, что функция $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ зависит только от ν_3.

Если функции $h(\nu_3), g(\nu_3)$ заданы, то после нахождения функций (20) и подстановки их в первые два равенства из (21) получим соотношения, которые должны быть тождествами по ν_3 и определять значения коэффициентов β_1, β_2 из ИС (11).

В общем случае интегрирование в (15) затруднительно, поэтому приведем пример разрешимости данной задачи. Для этой цели положим $k=0, A_1=A_2$. Тогда второе равенство из (21) представимо в виде

$$\beta_1\nu_1+\beta_2\nu_2=-\frac{A_3\nu_3}{A_1}\psi(\nu_3)\quad\Big(\psi(\nu_3)=\frac{h(\nu_3)}{g(\nu_3)}\Big).\tag{22}$$

Запишем интегральное представление (15) в силу (22)

$$\psi(\nu_3)d\nu_3-\frac{A_3\nu_3}{A_1}\psi(\nu_3)=c_1.\tag{23}$$

Из (23) после дифференцирования по ν_3 следует уравнение с разделяющимися переменными:

$$\psi'(\nu_3)=\frac{A_1-A_3}{A_3\nu_3}\psi(\nu_3).\tag{24}$$

Проинтегрируем (24) с учетом обозначения для функции $\psi(\nu_3)$ из (22). Тогда

$$h(\nu_3)=c_2g(\nu_3){\nu_3}^{\sigma_0}\quad\Big(\sigma_0=\frac{A_1-A_3}{A_3}\Big),\tag{25}$$

где c_2 – произвольная постоянная. Подставив (25) в первое равенство системы (21), найдем

$$g^2(\nu_3)=\frac{c^2}{A_1^2\chi_0^2+c_2^2A_3^2{\nu_3}^{2\sigma_0}},\tag{26}$$

значит, найдем и функцию $h(\nu_3)$ из (25). Силовая функция $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ на решении (25), (26) определяется из третьего равенства системы (21). Для рассматриваемого решения (12), (20), с учетом (25), (26), условие (8) не выполняется, поэтому дополнительных исследований не требуется.

4. Второй класс решений. Усложним выбор ИС, задав их в виде

$$\omega_1 = \beta_0\nu_2 + \beta_1 g(\nu_3), \qquad \omega_2 = \beta_0\nu_1 + \beta_2 g(\nu_3), \qquad \omega_3 = h(\nu_3), \tag{27}$$

где $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ – постоянные. Внесем выражения (27) в уравнения (9):

$$\begin{gathered}\dot\nu_1 = \nu_2(h(\nu_3) - \beta_0\nu_3) - \beta_2\nu_3 g(\nu_3), \quad \dot\nu_2 = -\nu_1(h(\nu_3) - \beta_0\nu_3) + \beta_1\nu_3 g(\nu_3),\\ \dot\nu_3 = g(\nu_3)(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2).\end{gathered} \tag{28}$$

Для уравнений (28) имеет место интегральное соотношение

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 + \int \frac{h(\nu_3) - \beta_0\nu_3}{g(\nu_3)} d\nu_3 = c_3. \tag{29}$$

Будем, по-прежнему, предполагать, что $A_1 = A_2$. Первое, второе и четвертое соотношения из (10) с учетом (27) примут вид

$$\begin{aligned}&A_1^2\big[\beta_0^2(\nu_1^2+\nu_2^2) + 2\beta_0 g(\nu_3)(\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2) + \chi_0 g^2(\nu_3)\big] + A_3^2 h^2(\nu_3) = c^2,\\ &A_1\big[\beta_0(\nu_1^2+\nu_2^2) + g(\nu_3)(\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2)\big] + A_3\nu_3 h(\nu_3) = k,\\ &U(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = U(\nu_3) = \frac{1}{A_1}\big[A_3(A_3 - A_1)h^2(\nu_3) - 2EA_1 + c^2\big].\end{aligned} \tag{30}$$

Из второго равенства системы (30) на сфере Пуассона $\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2 = 1$ имеем

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 = \frac{1}{A_1 g(\nu_3)}(k_0 - \nu_3 H(\nu_3)), \tag{31}$$

где

$$k_0 = k - A_1\beta_0, \qquad H(\nu_3) = A_3 h(\nu_3) - A_1\beta_0\nu_3. \tag{32}$$

Подставим выражение (31) в первое уравнение системы (30). Тогда

$$g(\nu_3) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sqrt{\mu_0^2 - H^2(\nu_3)}, \tag{33}$$

где

$$\varepsilon_0 = A_1\chi_0, \qquad \mu_0^2 = c^2 + A_1\beta_0(A_1\beta_0 - 2k). \tag{34}$$

В силу (33) произвольные постоянные c и k связаны условием положительности правой части выражения для μ_0^2 из (34).

Продифференцировав (29) по ν_3 и учтя (31), (33), получим

$$A_3[\mu_0^2\nu_3 - k_0 H(\nu_3)]H'(\nu_3) = (A_1 - A_3)[\mu_0^2 - H^2(\nu_3)][H(\nu_3) + A_1\beta_0\nu_3]. \tag{35}$$

Таким образом, функция $H(\nu_3)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению (35).

Приведем пример разрешимости уравнения (35). Положим

$$H(\nu_3) + A_1\beta_0\nu_3 = \alpha_0(\mu_0^2\nu_3 - k_0 H(\nu_3)), \tag{36}$$

где α_0 – постоянная.

Будем полагать, что равенство (36) выполняется для любых ν_3. Тогда получим условия

$$\alpha_0 = -\frac{1}{k_0}, \qquad k_0 A_1 \beta_0 + \mu_0^2 = 0. \tag{37}$$

Учитывая в (37) значение μ_0^2 из (34), найдем условие на постоянную c^2: $c^2 = A_1\beta_0(k_0 + A_1\beta_0)$. При данном значении c^2 величина $\mu_0^2 = -A_1\beta_0 k_0 > 0$ $(-A_1\beta_0^2 < \beta_0 k_0 < 0)$. На основании (36) и указанного значения μ_0^2 уравнение (35) интегрируется в квадратурах:

$$H(\nu_3) = \sqrt{-A_1\beta_0 k_0}\,\frac{1 + e^{(\nu_3 - \nu_3^{(0)})\gamma_0}}{1 - e^{(\nu_3 - \nu_3^{(0)})\gamma_0}} \qquad \Big(\gamma_0 = \frac{2\sqrt{-A_1\beta_0 k_0}(A_3 - A_1)}{A_3}\Big), \tag{38}$$

где $\nu_3^{(0)}$ – произвольная постоянная. Интегрирование системы (28) проводится так же, как и в случае первого решения (16)–(20). При этом изменяется только функция $F(\nu_3)$; ее необходимо заменить на функцию

$$F^*(\nu_3) = c_3 - \int \frac{H(\nu_3) + \beta_0(A_1 - A_3)}{g(\nu_3)} d\nu_3,$$

где $g(\nu_3)$ выражается по формуле (26). Здесь интеграл вычисляется в виде элементарных функций переменной ν_3. Значение $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ на данном решении находится из третьего соотношения системы (30), в котором $h(\nu_3) = A_3^{-1}(H(\nu_3) + A_1\beta_0\nu_3)$, а $H(\nu_3)$ определено в (38). Нетрудно убедиться в том, что для указанного решения условие $\mathbf{x}\cdot(\boldsymbol{\nu}\times a\mathbf{x}) = 0$ не выполняется, т. е. уравнение (6) можно не рассматривать.

5. Третий класс решений. Третий класс решений зададим в виде

$$\omega_1 = \nu_1\varepsilon(\nu_3) + \beta_1 g(\nu_3), \quad \omega_2 = \nu_2\varepsilon(\nu_3) + \beta_2 g(\nu_3), \quad \omega_3 = h(\nu_3). \tag{39}$$

Уравнения (9) на ИС (39) таковы

$$\begin{gathered} \dot\nu_1 = \nu_2\big(h(\nu_3) - \nu_3\varepsilon(\nu_3)\big) - \beta_2\nu_3 g(\nu_3), \\ \dot\nu_2 = -\nu_1\big(h(\nu_3) - \nu_3\varepsilon(\nu_3)\big) + \beta_1\nu_3 g(\nu_3), \quad \dot\nu_3 = g(\nu_3)(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2). \end{gathered} \tag{40}$$

Запишем соотношение, вытекающее из (40):

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 + \int \frac{h(\nu_3) - \nu_3\varepsilon(\nu_3)}{g(\nu_3)} d\nu_3 = c_5, \tag{41}$$

где c_5 – постоянная.

Положим $A_1 = A_2 \neq A_3$. Подставим (39) в уравнения (10). После некоторых преобразований имеем

$$A_1^2\big[\varepsilon^2(\nu_3)(1 - \nu_3^2) + (\beta_1^2 + \beta_2^2)g^2(\nu_3) + 2\varepsilon(\nu_3)g(\nu_3)(\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2)\big] + A_3^2 h^2(\nu_3) = c^2, \tag{42}$$

$$(\beta_1\nu_1+\beta_2\nu_2)=\frac{1}{A_1g(\nu_3)}\big[k+A_1\varepsilon(\nu_3)(\nu_3^2-1)-A_3\nu_3h(\nu_3)\big], \tag{43}$$

$$2U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=\frac{1}{A_1}\big[A_3(A_1-A_3)h^2(\nu_3)-2EA_1+c^2\big]. \tag{44}$$

Отметим, что уравнение (44) записано как линейная комбинация первого и четвертого уравнений системы (10).

Проведем исследование соотношений (42)–(44). Введем обозначения

$$H(\nu_3)=A_3h(\nu_3)-A_1\nu_3\varepsilon(\nu_3), \quad L(\nu_3)=A_1\varepsilon(\nu_3)-k. \tag{45}$$

Продифференцировав уравнение (41), получим

$$\big(\beta_1\nu_1(\nu_3)+\beta_2\nu_2(\nu_3)\big)'+\frac{h(\nu_3)-\nu_3\varepsilon(\nu_3)}{g(\nu_3)}=0, \tag{46}$$

где штрихом обозначена производная по переменной ν_3.

Подставим выражение $\beta_1\nu_1+\beta_2\nu_2$ из (43) в (46). Учитывая обозначения (45), получим дифференциальное уравнение на функции $H(\nu_3)$, $L(\nu_3)$, $g(\nu_3)$ следующего вида:

$$\begin{gathered}A_3\nu_3g(\nu_3)H'(\nu_3)+A_3g(\nu_3)L'(\nu_3)-A_3g'(\nu_3)\big[\nu_3H(\nu_3)+L(\nu_3)\big]-\\-(A_1-A_3)g(\nu_3)(H(\nu_3)+\nu_3L(\nu_3)+k\nu_3)=0.\end{gathered} \tag{47}$$

Внесем $\beta_1\nu_1(\nu_3)+\beta_2\nu_2(\nu_3)$ из (43) в уравнение (42):

$$H^2(\nu_3)+\sigma_0^2g^2(\nu_3)=C+L^2(\nu_3) \quad \big(C=c^2-k^2,\ \sigma_0=A_1\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}\,\big). \tag{48}$$

Исключим в уравнении (47) функцию $g(\nu_3)$ с помощью (48):

$$\begin{gathered}A_3H'(\nu_3)\big[C\nu_3+\nu_3L^2(\nu_3)+L(\nu_3)H(\nu_3)\big]+A_3L'(\nu_3)\big[C-H^2(\nu_3)-\nu_3L(\nu_3)H(\nu_3)\big]+\\+(A_3-A_1)\big[C+L^2(\nu_3)-H^2(\nu_3)\big]\big[H(\nu_3)+\nu_3(L(\nu_3)+k)\big]=0.\end{gathered} \tag{49}$$

После нахождения из (49) функций $H(\nu_3)$, $L(\nu_3)$ из (48) определим

$$g(\nu_3)=\frac{1}{\sigma_0}\sqrt{C+L^2(\nu_3)-H^2(\nu_3)}, \tag{50}$$

а функции $h(\nu_3)$ и $\varepsilon(\nu_3)$ получим из (45):

$$h(\nu_3)=\frac{1}{A_3}\big[H(\nu_3)+\nu_3(L(\nu_3)+k)\big], \quad \varepsilon(\nu_3)=\frac{L(\nu_3)+k}{A_1}. \tag{51}$$

При $\varepsilon(\nu_3)=\beta_0=\mathrm{const}$ уравнение (49) преобразуется к уравнению (35).

Рассмотрим случай $h(\nu_3)=0$. Тогда из (51) найдем

$$H(\nu_3)=-\nu_3[L(\nu_3)+k]. \tag{52}$$

Подставим выражение (52) в уравнение (49)

$$L'(\nu_3)(C - c^2\nu_3^2) - \nu_3 L(\nu_3)(C - kL(\nu_3)) = 0. \tag{53}$$

Уравнение (53) интегрируется явно

$$L(\nu_3) = \frac{C\psi(\nu_3)}{k\psi(\nu_3)+1}, \qquad \psi(\nu_3) = c_*(C - c^2\nu_3^2)^{-\frac{C}{2c^2}}, \tag{54}$$

где c_* – произвольная постоянная.

Если параметр $k = 0$, то из (53) следует

$$L(\nu_3) = c^2\psi(\nu_3), \qquad \psi(\nu_3) = \frac{c_*}{c\sqrt{1-\nu_3^2}}. \tag{55}$$

На основании (48), (52) при $k = 0$ для функции $g(\nu_3)$ получим постоянное значение g_0. ИС (39) упрощаются:

$$\omega_1 = \nu_1\frac{L(\nu_3)}{A_1} + \beta_1 g_0, \qquad \omega_2 = \nu_2\frac{L(\nu_3)}{A_1} + \beta_2 g_0, \qquad \omega_3 = 0. \tag{56}$$

Значение функции $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ получим из (44) на решении (56), в котором

$$\nu_1 = \sin\theta\sin\varphi, \qquad \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \nu_3 = \cos\theta,$$

$$\begin{gathered}\dot\theta = -\frac{1}{2A_1g_0}\sqrt{4A_1^2\chi_0^2\sin^2\theta - (2A_1g_0c^* + cc_*\sin\theta)^2},\\ \varphi = \arcsin\frac{2A_1g_0c^* - cc_*\sin\theta}{2A_1g_0\sin\theta} + \operatorname{arctg}\frac{\beta_2}{\beta_1}.\end{gathered} \tag{57}$$

Случай $h(\nu_3) = \nu_3\varepsilon(\nu_3),\ k = 0$**.** Он представляет интерес в силу того, что уравнения (40) допускают линейный интеграл, следующий из (46):

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 = c_5. \tag{58}$$

В этом случае ИС (39) принимают вид

$$\omega_1 = \nu_1\varepsilon(\nu_3) + \beta_1 g(\nu_3), \qquad \omega_2 = \nu_2\varepsilon(\nu_3) + \beta_2 g(\nu_3), \qquad \omega_3 = \nu_3\varepsilon(\nu_3).$$

Рассмотрим уравнение (49) с учетом (48). Полагая в (49) на основании принятых ограничений

$$H(\nu_3) = \frac{\nu_3(A_3 - A_1)}{A_1}L(\nu_3), \qquad k = 0, \tag{59}$$

получим уравнение

$$\begin{gathered}CA_1^2\big[A_1 + (A_3 - A_1)\nu_3^2\big]L'(\nu_3) + (A_3 - A_1)\nu_3 L(\nu_3)\big\{2CA_1^2 +\\ + \big[A_1(A_1 + A_3) - A_3(A_3 - A_1)\nu_3^2\big]L^2(\nu_3)\big\} = 0.\end{gathered} \tag{60}$$

Для интегрирования уравнения (60) необходимо выполнить две замены:

$$u = L^2(\nu_3), \qquad v = \frac{1}{u}. \tag{61}$$

Тогда получим линейное уравнение относительно v:

$$\begin{gathered} CA_1^2\big[A_1 + (A_3 - A_1)\nu_3^2\big]v'(\nu_3) - 4CA_1^2(A_3 - A_1)\nu_3 v(\nu_3) = \\ = 2(A_3 - A_1)\nu_3\big[A_1(A_1 + A_3) - A_3(A_3 - A_1)\nu_3^2\big]. \end{gathered} \tag{62}$$

Общее решение уравнения (62) таково

$$v(\nu_3) = \frac{1}{CA_1^2}\Big[A_3\varphi(\nu_3) + b\varphi^2(\nu_3) - \frac{1}{2}A_1^2(A_1 + 2A_3)\Big], \tag{63}$$

где b – произвольная постоянная, а $\varphi(\nu_3) = A_1 + (A_3 - A_1)\nu_3^2$. Следовательно, в силу (59), (61)

$$H(\nu_3) = \frac{\nu_3(A_3 - A_1)}{A_1\sqrt{v(\nu_3)}}, \qquad L(\nu_3) = \frac{1}{\sqrt{v(\nu_3)}}, \tag{64}$$

$v(\nu_3)$ определена в (63).

Введем для ν_1, ν_2 соотношения (16), подстановка которых в геометрический интеграл дает тождество.

Запишем значение $g(\nu_3)$ из (50) в силу (59):

$$g(\nu_3) = \frac{1}{\sigma_0 A_1}\sqrt{c^2A_1^2 + L^2(\nu_3)[A_1^2 - \nu_3^2(A_3 - A_1)^2]}. \tag{65}$$

Здесь $L(\nu_3)$ имеет вид из (64). Подставим (16) в интеграл (58)

$$\chi_0\sqrt{1 - \nu_3^2}\sin(\varphi + \beta_0) = c_5 \tag{66}$$

и в третье уравнение системы (40):

$$\dot\nu_3 = -\chi_0 g(\nu_3)\sqrt{1 - \nu_3}\cos(\varphi + \beta_0). \tag{67}$$

Значения χ_0 и β_0 указаны в (18). Тогда с учетом (66) уравнение (67) принимает вид

$$\dot\nu_3 = -g(\nu_3)\sqrt{(\chi_0^2 - c_5^2) - \nu_3^2\chi_0^2}. \tag{68}$$

То есть $\nu_3(t)$ получим обращением интеграла из (68)

$$\int\limits_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{g(\nu_3)\sqrt{(\chi_0^2 - c_5^2) - \nu_3^2\chi_0^2}} = -(t - t_0). \tag{69}$$

Здесь $g(\nu_3)$ можно получить из (65), (64), (63) на решении (39), (64). Значение функции $h(\nu_3)$ таково

$$h(\nu_3) = \frac{\nu_3}{A_1\sqrt{v(\nu_3)}}. \tag{70}$$

Переменную $\varphi(\nu_3)$ получим из равенства (66)

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{\beta_2}{\beta_1} + \arcsin\frac{c_5}{\chi_0\sqrt{1-\nu_3^2}}, \tag{71}$$

где $\nu_3(t)$ определяется из (69).

Таким образом, приведены примеры разрешимости в квадратурах уравнений движения тела в потенциальном силовом поле, которые допускают три инвариантных соотношения (39). При этом модуль момента количества движения тела постоянен. Для построенных примеров условие $\mathbf{x}\cdot(\boldsymbol{\nu}\times a\mathbf{x}) = 0$ не выполняется, т. е. дополнительных исследований не требуется.

1. *Зиглин С.Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела // Тр. Москов. мат. о-ва. – 1980. – **41**. – С. 287–303.
2. *Козлов В.В., Онищенко Д.А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Докл. АН СССР. – 1982. – **266**, № 6. – С. 1298–1300.
3. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
4. *Харламов П.В.* Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 1–12.
5. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 2012. – 400 с.
6. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
7. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
8. *Горячев Д.Н.* Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. – Варшава, 1910. – 62 с.
9. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Харламова Е.И.* Об особых решениях одной формы уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 3–9.
10. *Горр Г.В., Илюхин А.А.* Случаи постоянства модуля момента количества движения гиростата // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 9–15.

G.V. Gorr, A.V. Maznev

On solutions of the equations of motion of a rigid body in the potential force field in the case of constant modulus of the kinetic moment

The article considers the problem of motion of a rigid body with a fixed point in the potential force field. It is assumed that the equations of motion admit an invariant relationship, which is characterized by the constancy of the module of the angular momentum. The details of four new classes of solutions of the equations of motion of the dynamically symmetric body are indicated.

Keywords: *rigid body, angular momentum, invariant relation.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк Получено 12.09.17
gvgorr@gmail.com