УДК 531.36

©2017. **А.М. Ковалев**

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНЫХ И НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Рассматриваются вопросы, связанные с решением задач устойчивости для систем с известной знакоопределенной функцией со знакопостоянной производной. Для решения используются функции Ляпунова и дополнительные функции. Введено понятие координатной устойчивости динамических систем, а также метод инвариантных соотношений применен к неавтономным системам дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *инвариантные соотношения, дополнительные функции, координатный подход, неавтономные системы.*

Введение. Наибольшие успехи в решении задач устойчивости движения связаны с методом функций Ляпунова [1]. Опыт применения этого метода показал, что основную роль в успешном решении задачи играет построение функции, производная которой в силу системы является знакоопределенной, либо знакопостоянной. Случай, когда производная является знакоопределенной функцией, полностью решается второй и третьей теоремами Ляпунова. Движение при этом может быть асимптотически устойчивым, либо неустойчивым. Намного сложнее и не решенным в полной мере является случай, когда производная является функцией знакопостоянной.

Дальнейшее развитие задачи устойчивости для систем со знакопостоянной производной связано с получением дополнительных функций [2]. При получении этих функций использован метод инвариантных соотношений. Применение дополнительных функций в общей ситуации, когда сама функция не является знакоопределенной, позволило получить новые результаты по неустойчивости [3], устойчивости [4] и частичной устойчивости [5].

С течением времени теория устойчивости нашла широкое применение в космонавтике, машиностроении и других отраслях, связанных с движением (как изделий, так и оборудования). Возникла необходимость (и потребность) введения математических методов в науку и практику. Появились новые задачи, связанные с теорией устойчивости. Решение этих задач привело к созданию нового раздела и нового термина, получившего название "координатная устойчивость". Первые результаты по формированию координатной устойчивости представлены в статье [6].

Следующей важной областью применения методов теории устойчивости являются неавтономные системы дифференциальных уравнений. Метод инвариантных соотношений обобщен на случай неавтономных дифференциальных уравнений. Получены первые результаты [7], формирующие теорию устойчивости неавтономных систем, опирающиеся на приведенные выше подходы. Приведем краткое изложение современного состояния теории устойчивости и направлений ее дальнейшего развития.

1. Постановка задачи. Рассматривается устойчивость нулевого решения системы

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0; \quad x \in D \subset R^n, \quad t \in [t_0, \infty), \tag{1}$$

где D – некоторая окрестность нуля; функция $f(x)$ предполагается непрерывно дифференцируемой достаточное число раз для $x \in D$. Точка означает дифференцирование по времени t зависимой переменной x, а также функции $v(x)$ в силу системы (1): $\dot{v}(x) = \langle \nabla v(x), f(x) \rangle$. Здесь ∇ – оператор дифференцирования, символ $\langle , \rangle$ означает скалярное произведение.

С целью более детальной характеристики движений в окрестности нулевого решения воспользуемся подходом, принятым в частичной устойчивости [8], и введем понятия устойчивых, асимптотически устойчивых и неустойчивых переменных.

Определение 1. Переменная $y = g(x) \quad (y \in R^1, \; y(0) = 0)$ называется устойчивой, асимптотически устойчивой, неустойчивой, если нулевое решение системы (1) является, соответственно, устойчивым, асимптотически устойчивым, неустойчивым относительно этой переменной. Отметим, что устойчивые переменные (по определению) при неограниченном возрастании времени не стремятся к нулю, оставаясь все время в заданной ограниченной области.

Сформулируем следующие задачи, решение которых направлено на создание конструктивных методов теории устойчивости.

Задача 1. Выделить устойчивые, асимптотически устойчивые и неустойчивые переменные для системы (1).

Для теории и практики представляет интерес решение задачи 1 в двух вариантах. В первом варианте необходимо разделить заданные переменные на указанные три группы. Во втором варианте требуется получить три группы переменных $y_i = g_i(x)$ таким образом, чтобы количество устойчивых y_1, асимптотически устойчивых y_2 и неустойчивых y_3 координат соответствовало наперед заданным числам.

Задача 1 составляет основу координатного подхода в теории устойчивости, результаты которого важны для качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости, а также для теории управления при разработке специальных алгоритмов управления и стабилизации процессов самой различной природы.

Решение задачи 1 во втором варианте порождает понятие координатной устойчивости, связанное со следующей задачей.

Задача 2. Для системы с известными свойствами переменных (относительно их устойчивости) ввести новые переменные с заданными свойствами, как функции исходных переменных.

2. Дополнительные функции. Вопрос о наличии целых полутраекторий системы (1) в некотором множестве зависит от свойства инвариантности. В качественной теории дифференциальных уравнений со свойством инвариантности связаны два следующих понятия: инвариантное множество и инвариантное соотношение.

Определение 2. Множество $G \subset D$ называется инвариантным множеством системы (1), если всякое ее решение $x(t)$, имеющее с G общую точку $x(t^*) \in G$, целиком принадлежит этому множеству: $x(t) \in G$, $t \in [t_0, \infty)$.

Определение 3. Соотношение $\varphi(x) = 0$ называется инвариантным соотношением системы (1), если определяемое им множество содержит инвариантное множество системы (1).

Удобный инструмент для проверки, является ли заданное соотношение инвариантным соотношением системы (1), дает следующая теорема [9].

Теорема 1. *Порождаемое инвариантным соотношением* $\varphi(x) = 0$ *инвариантное множество* G *системы* (1) *определяется уравнениями*

$$\varphi^{(i)}(x) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots l-1), \tag{2}$$

где l *– число независимых функций в последовательности*

$$\varphi(x), \dot{\varphi}(x), \ddot{\varphi}(x), \ldots, \tag{3}$$

при этом $\nabla\varphi(x) \neq 0$ *для* $x(t) \in G$.

Данная теорема дала возможность получить [2–5] дополнительные функции $V_a(x)$, добавление которых к исходной функции Ляпунова $V(x)$ при выполнении условий теоремы Барбашина–Красовского последовательно сужает множество обращения в нуль ее производной, начиная с исходного множества M и до нулевой точки, сохраняя знакоопределенность самой функции и ее производной в остальных точках.

Для построения дополнительных функций важное значение имеет структура множества M, определяемая его геометрическими и дифференциальными особенностями. Во-первых (геометрическая особенность), множество M может быть суммой подмножеств: $M = \bigcup\limits_{i=1}^{s} M_i$, $M_i = \{x : \varphi_i(x) = 0,$ $\nabla\varphi_i(x) \neq 0\}$. Кроме того, попарные пересечения $M_k \bigcap M_m$ могут содержать ненулевые точки для некоторых k, m, что также необходимо учитывать. Во-вторых (дифференциальные особенности), для некоторых множеств M_i вопрос о существовании инвариантного множества может не решаться первыми двумя членами последовательности (3), т. е. в теореме 1 для точек $x \in M_i$ имеем $i > 1$.

Приведем два типа дополнительных функций, с использованием которых строится функция Ляпунова со знакоопределенной производной. В простейшем случае, когда множество M обращения в нуль производной $\dot{V}(x)$ описывается одной функцией $\varphi(x)$: $M = \{x : \varphi(x) = 0,\ \nabla\varphi(x) \neq 0\}$ и задача существования инвариантного множества решается первыми двумя членами последовательности (3), в качестве дополнительной функции принимается функция

$$V_a(x) = \langle \nabla\varphi(x), f(x)\rangle^{2m} \big\langle \langle \nabla\varphi(x), f(x)\rangle, \varphi(x)\big\rangle. \tag{4}$$

Функция типа

$$V_{ai} = \langle \nabla\varphi_i(x), f(x)\rangle^{2m} \big\langle \langle \nabla\varphi_i(x), f(x)\rangle, \varphi_i(x)\big\rangle \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{s} \varphi_j^2(x) \tag{5}$$

принимается в качестве дополнительной функции для множества M_i в случае, когда множество M состоит из нескольких множеств: $M = \bigcup\limits_{i=1}^{s} M_i$, для каждого из которых задача существования инвариантного множества решается первыми двумя членами последовательности (3).

С целью рассмотрения всего круга задач устойчивости (включая и неустойчивость) поставим вопрос о максимальном расширении области знакоопределенности производной для известной функции со знакопостоянной производной, не обращая при этом внимания на значения самой функции. Используя метод дополнительных функций, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть для системы* (1) *известна функция* $V(x)$ *со знакопостоянной производной* $\dot V(x)$. *Тогда добавлением конечного числа дополнительных функций строится функция* $V_f(x)$, *производная которой* $\dot V_f(x)$ *является знакопостоянной функцией, при этом множество ее обращения в нуль является инвариантным множеством.*

Воспользуемся методом дополнительных функций и теоремой 2 для получения основных теорем об устойчивости и неустойчивости.

3. Две теоремы. Используя дополнительную функцию (2), доказывается следующая теорема [2].

Теорема 3. *Пусть для системы* (1) *существует функция* $V(x)$, *производная которой в силу системы* (1) *является знакопостоянной, знака противоположного* $V(x)$. *Множество* $M = \{x : \dot V(x) = 0\}$ *представляется суммой множеств* $M = \bigcup\limits_{i=j=1}^{s,s_i} M_{ij}$, *описываемых формулами (17). Предполагаем, что* $V(x)$, $\varphi_i(x)$ *– функции, дифференцируемые достаточное число раз; знакоопределенность функции* $V(x)$ *определяется формой конечного порядка; знакопостоянство* $\dot V(x)$ *и неравенства* $\varphi_i^{(j)}(x) \neq 0$ *определяются членами разложения в окрестности нуля конечного порядка. Тогда существуют числа* m_{ij}, α_{ij} *такие, что функция (18) будет знакоопределенной, а ее производная* $\dot V_f(x)$ *будет y-знакоопределенной, знака противоположного* $V_f(x)$, *и нулевое решение системы* (1) *будет устойчиво по всем переменным и асимптотически y-устойчиво. (Формулы (17), (18) представлены в статье [2]).*

Перейдем к изучению неустойчивых движений. В дополнение к теоремам Ляпунова и Четаева о неустойчивости движения метод дополнительных функций позволяет доказать следующую теорему [2].

Теорема 4. *Пусть для системы* (1) *существует функция* $V(x)$, *производная которой является функцией знакопостоянной и представима в форме знакоопределенной функции* $\dot{V}(y)$ *меньшего числа переменных* $y_1, ..., y_k$ $(k < n)$, *причем множество* $M = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ *– инвариантно. При этом в сколь угодно малой окрестности* B *нуля существуют точки* $x \in B \setminus M$, *в которых функция* $V(x)$ *принимает значения того же знака, что и* $\dot{V}(x)$. *Тогда нулевое решение неустойчиво.*

Замечание. Теорема 4 обобщает первую теорему Ляпунова о неустойчивости на случай знакопостоянной производной, совпадая с ней, когда производная является знакоопределенной.

4. Координатный подход. Формирование понятия координатной устойчивости начнем с рассмотрения вопросов частичной устойчивости. Одной из задач частичной устойчивости является задача y-неустойчивости. Для описания y-неустойчивости движений воспользуемся следующим определением.

Определение 4 [8]. Движение $x = 0$ называется y-неустойчивым, если существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдутся точка x_* с $\|x_*\| < \delta$ и момент времени $t_* > t_0$, для которых $\|y(t_*;\, t_0, x_*\| \geq \varepsilon_0$. Здесь y является подвектором вектора $x^T = (y^T, z^T)$.

Применив определение частичной устойчивости к одной координате, приходим к понятиям устойчивых, асимптотически устойчивых и неустойчивых координат. Это приводит к формулировке задач 1, 2, решение которых продемонстрируем на следующих примерах.

Пример 1. Исследуем устойчивость нулевого решения системы

$$\dot{x}_1 = 2x_1, \quad \dot{x}_2 = 5x_1 - 3x_2, \quad \dot{x}_3 = 6x_1 - 4x_3. \tag{6}$$

Функция Ляпунова $V = x_1^2$ имеет производную $\dot{V} = 4x_1^2$ и удовлетворяет теореме 4. На основании этого нулевое решение системы (6) неустойчиво и, более того, переменная x_1 – неустойчива. Сделать заключение относительно переменных x_2, x_3 с использованием функций Ляпунова довольно сложно ввиду трудности их построения. Однако, воспользовавшись формулой общего решения

$$x_1 = c_1 e^{2t}, \quad x_2 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}, \quad x_3 = c_1 e^{2t} + c_3 e^{-4t},$$

получаем, что все переменные x_1, x_2, x_3 являются неустойчивыми. Этот факт кажется удивительным, имея ввиду собственные числа системы (6): $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -4$. Разрешение этой ситуации состоит в том, что это заключение получено при решении задачи 1 в первом варианте, а собственные числа сыграют свою роль при рассмотрении второго варианта решения.

Сделаем в системе (6) замену переменных

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 - x_1, \quad y_3 = x_3 - x_1. \tag{7}$$

В переменных (7) система (6) принимает вид

$$\dot{y}_1 = 2y_1, \quad \dot{y}_2 = -3y_2, \quad \dot{y}_3 = -4y_3. \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что переменная y_1 является неустойчивой, переменные y_2, y_3 являются асимптотически устойчивыми. В системе (6) сделаем еще одну замену, которая является нелинейной:

$$z_1 = y_1 y_2^2, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3. \tag{9}$$

Получаем

$$\dot{z}_1 = -4z_1, \quad \dot{z}_2 = -3z_2, \quad \dot{z}_3 = -4z_3. \tag{10}$$

Очевидно, что все переменные z_1, z_2, z_3 системы (10) являются асимптотически устойчивыми. Изучая поведение системы (6) при заменах (7), (9), отмечаем, что переменные x_i, y_i, z_i сильно меняются: все переменные x_i – неустойчивые; переменные y_2, y_3 – асимптотически устойчивые, переменная y_1 – неустойчивая; все переменные z_i – асимптотически устойчивые. Это есть решение задачи 1 во втором варианте и фактически решение задачи 2. Таким образом, Пример 1 демонстрирует свойства координатной устойчивости и возникающие ее новые качества.

Пример 2. Для системы (6) необходимо построить две системы, переменные одной из них являются асимптотически устойчивыми, а другие переменные являются неустойчивыми.

Решение задачи начнем с того, что систему (6) с помощью замены (7) приведем к виду (8). С помощью замены (9) получаем систему (10), все переменные этой системы асимптотически устойчивые. Для получения неустойчивых переменных сделаем замену

$$v_1 = x_1, \quad v_2 = x_2 - x_1, \quad v_3 = x_3 + x_1. \tag{11}$$

Система (6) в переменных (11) принимает вид

$$\dot{v}_1 = 2x_1, \quad \dot{v}_2 = -3v_2, \quad \dot{v}_3 = -4v_3 + 12v_1. \tag{12}$$

Сделаем еще одну замену

$$w_1 = v_1, \quad w_2 = v_2 v_1^2, \quad w_3 = v_3 v_1. \tag{13}$$

В переменных (13) система (12) имеет вид

$$\dot{w}_1 = 2v_1, \quad \dot{w}_2 = w_2, \quad \dot{w}_3 = 12w_1^3. \tag{14}$$

Все переменные (13) системы (14), описывающей систему (12) и исходную систему (6), являются неустойчивыми, как и переменные системы (6).

Таким образом, решение поставленной задачи получено. При этом для неустойчивых переменных имеются два решения: решение в переменных x, а также решение в переменных (13).

5. Применение к неавтономным системам. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t), \quad i = \overline{1, n}, \tag{15}$$

где t – независимая переменная, $x_1, \ldots, x_n$ – неизвестные функции этой переменной, а X_i – функции от $n+1$ переменных, заданные на некотором открытом множестве U пространства размерности $n+1$, в котором координатами являются компоненты вектора $(x_1, \ldots, x_n, t)$. Будем предполагать, что функции $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$, $i = \overline{1, n}$, имеют непрерывные частные производные любого порядка.

При рассмотрении неавтономной системы (15) целесообразно преобразовать ее к автономному виду. Следуя [10], положим $t = x_{n+1}$. Тогда уравнения (15) можно записать в виде

$$\dot{u}_i = Y_i(u_1, \ldots, u_{n+1}), \quad i = \overline{1, n+1}, \tag{16}$$

где $Y_i \equiv X_i$, $i = \overline{1, n}$, $Y_{n+1} \equiv 1$. Решению уравнений (15) с начальными условиями $x_i(t_0) = x_i^{(0)}$ будет соответствовать решение уравнений (16) с начальными условиями

$$u_i(0) = x_i^{(0)}, \quad i = \overline{1, n}, \qquad u_{n+1}(0) = t_0. \tag{17}$$

Это соответствие определяется зависимостью $x_i(t) = u_i(t - t_0)$, $i = \overline{1, n}$.

Определение 5. Непустое множество $M \subseteq U$ называется инвариантным по отношению к (16), если для любой точки $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t_0)$ из M решение уравнения (16) с начальными условиями (17) удовлетворяет условию $(u_1(t), \ldots, u_{n+1}(t)) \in M$ при $t \in (t_1 - t_0, t_2 - t_0)$, где (t_1, t_2) – интервал существования соответствующего решения системы (15).

Рассмотрим уравнение

$$f(u_1, \ldots, u_{n+1}) = 0. \tag{18}$$

Предположим, что функция $f(u_1, \ldots, u_{n+1})$ дифференцируема по всем переменным до произвольного порядка, в частности до порядка $n+1$, и

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_{n+1}}\right) \neq 0 \tag{19}$$

в рассматриваемой области U.

Определение 6. Соотношение (18) называется инвариантным соотношением (ИС) системы (16), если множество G точек, удовлетворяющих этому соотношению, содержит некоторое инвариантное множество.

Поскольку инвариантное множество по определению не может быть пустым, то должна существовать по крайней мере одна точка, для которой (18) выполнено. Поставим задачу об исследовании условий существования ИС (18) у системы (16).

Для функции (18) построим последовательность функций

$$f^{(1)}(u_1,\ \dots,\ u_{n+1}) = f(u_1,\ \dots,\ u_{n+1}), \tag{20}$$

$$f^{(l)}(u_1,\ \dots,\ u_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial f^{(l-1)}(u_1,\ \dots,\ u_{n+1})}{\partial u_j} Y_j(u_1,\ \dots,\ u_{n+1}), \quad l = 2, 3,\ \dots,$$

члены которой являются производными от соответствующих функций в силу уравнений (16).

Лемма 1. *Пусть для уравнений* (16) *соотношение* (18) *– инвариантное и множество G, определяемое им, содержит инвариантное множество M. Тогда для точек множества M должны выполняться уравнения*

$$\begin{array}{c} f^{(1)}(u_1,\ \dots,\ u_{n+1}) = 0, \\ f^{(2)}(u_1,\ \dots,\ u_{n+1}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(l)}(u_1,\ \dots,\ u_{n+1}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \tag{21}$$

Доказательство. Рассмотрим множество M. Выберем произвольную точку $(x_1^{(0)},\ \dots,\ x_n^{(0)}, t_0)$ этого множества (обозначим ее $u^{(0)}$) и возьмем решение $u_i = u_i(t)$, удовлетворяющее начальным условиям (17). Поскольку $M \subseteq G$, то в силу определения ИС при подстановке решения в уравнение (18) получим тождество по t:

$$f^{(1)}(u_1(t),\ \dots,\ u_{n+1}(t)) = 0. \tag{22}$$

Многократно дифференцируя это тождество по t, получим

$$\begin{array}{c} f^{(2)}(u_1(t),\ \dots,\ u_{n+1}(t)) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(l)}(u_1(t),\ \dots,\ u_{n+1}(t)) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \tag{23}$$

Поскольку тождества (22) и (23) справедливы для всех t, то они верны и при $t = 0$, а значит, и для точки $u^{(0)}$. В силу же произвольности $u^{(0)}$ получаем, что соотношения (21) выполнены всюду на M.

Отметим, что в общем случае для составления цепочки производных необходимо потребовать бесконечную дифференцируемость функции $f(u_1,\ \dots,\ u_{n+1})$.

Теорема 5. *Если в последовательности* (20) *существует* k *независимых членов, то независимыми будут и первые* k *членов последовательности* (20).

Доказательство. Доказательство будем проводить методом от противного. Предположим, что первые k членов последовательности (20) зависимы. Найдем такое наименьшее такое число k^*, что первые k^* членов последовательности (20) зависимы. Тогда функции $f^{(1)},..., f^{(k^*-1)}$ независимы, а функции $f^{(1)},..., f^{(k^*)}$ зависимы в области U, причем $k^* \leq k$. Тогда на основании утверждения [10, с. 307] можно записать

$$f^{(k^*)}(u_1, \ldots, u_{n+1}) = W(f^{(1)}(u_1, \ldots, u_{n+1}), \ldots, f^{(k^*-1)}(u_1, \ldots, u_{n+1})). \quad (24)$$

Функция (24) определена и дифференцируема на множестве U и зависит только от функций $f^{(1)},..., f^{(k^*-1)}$. Вычислим производную от левой и правой частей выражения (24) с учетом уравнений (16):

$$f^{(k^*+1)}(u_1, \ldots, u_{n+1}) = \sum_{j=1}^{k^*-1} \frac{\partial W(f^{(1)}, \ldots, f^{(k^*-1)})}{\partial f^{(j)}} f^{(j+1)}(u_1, \ldots, u_{n+1}),$$

т. е. функция $f^{(k^*+1)}$ так же, как и функция $f^{(k^*)}$, оказывается зависимой от первых $k^* - 1$ функций. Аналогично доказывается, что остальные члены последовательности (20) являются зависимыми от $f^{(1)}, \ldots, f^{(k^*-1)}$. Однако, поскольку все члены последовательности зависят от k^*-1 функции, то любые k^* (и тем более k) членов будут обязательно зависимыми, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие означает справедливость данной теоремы.

Следствие 1. *Если существует непустое множество* M*, определяемое уравнениями* (21)*, то система* (21) *равносильна своим первым* k *уравнениям, где* k *– максимальное количество независимых функций в последовательности* (20).

Доказательство. Так как функции $f^{(i)}$, $i > k$, функционально зависят от первых k функций последовательности, то при фиксированных значениях $f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}$ каждый член последовательности может принимать лишь одно значение. Поскольку система (21) определяет непустое множество M, то она совместна и существует по крайней мере одна точка, для которой все равенства $f^{(i)} = 0$, $i = 1, 2, ...$, выполнены. Это и означает, что из соотношений $f^{(i)} = 0$, $i = \overline{1, k}$, следует, что с необходимостью выполнены равенства $f^{(i)} = 0$ для всех $i > k$.

Пусть поставлена задача о нахождении уравнений, определяющих множество M при заданном ИС (18). Согласно доказанной выше теореме, необходимо построить цепочку производных (20). Затем нужно поэтапно провести исследование зависимости входящих в (21) уравнений. То есть на первом этапе следует провести исследование зависимости производной $f^{(2)}(u_1, \ldots, u_{n+1})$ от соотношения (18). Если будут найдены условия, при выполнении которых

$$f^{(2)}(u_1, \ldots, u_{n+1})\Big|_{f^{(1)}(u_1,\ldots,u_{n+1})=0} \equiv 0,$$

то множество G является инвариантным.

Очевидно, что при дальнейшем изучении системы (21) необходимо рассмотреть случаи

$$f^{(l)}(u_1, \ldots, u_{n+1})\Big|_{f^{(1)}(u_1,\ldots,u_{n+1})=0,\ldots,f^{(l-1)}(u_1,\ldots,u_{n+1})=0} \equiv 0. \qquad (25)$$

В формуле (25) предусмотрены все варианты исследования системы (21). При выполнении (25) получим систему уравнений, которая задает инвариантное множество M.

Полученные выше результаты применены в [7] в задаче об условиях существования равномерных вращений гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием силы тяжести.

Заключение. 1. Достижения последних лет, связанные с введением в теорию устойчивости дополнительных функций и координатного подхода, привели к необходимости нового построения теории устойчивости. Предлагается выделить в теории устойчивости три части, причем в каждой из них серьезное значение имеют дополнительные функции (первая часть), координатный подход (вторая часть) и координатная устойчивость (третья часть).

2. Рождается новый подход к изучению свойств устойчивости: оказалось, что устойчивость существенно зависит от переменных, описывающих поведение изучаемой системы, особенно в случае, когда замена переменных является нелинейной. Возникает (пока не доказанная автором) теорема о существовании таких переменных для изучаемой системы, которые удовлетворяют любым наперед заданным свойствам их устойчивости. Возможны некоторые исключения.

3. В связи с п. 1 (вышестоящим) необходимо отметить, что и в третьей части происходит деление вопросов устойчивости на два направления: 1) координатный подход приводит к разделению переменных по свойству их устойчивости и неустойчивости; 2) координатная устойчивость порождает задачу построения системы с заданными свойствами, что связано с практическими требованиями и с появлением нового подхода к изучению дифференциальных уравнений при использовании замены переменных, особенно в нелинейном случае.

4. Особое внимание привлекают новые исследования неавтономных систем. В работе [11] приведены неустойчивые движения, вызванные неавтономностью изучаемых систем. В настоящей работе использовано предложение Л.С. Понтрягина о переводе неавтономной системы в автономную путем приравнивания временной переменной (времени) с пространственными переменными, что повышает размерность системы на единицу и требует отдельно-

го рассмотрения временной переменной. Выполнение исследований в данном направлении наверняка приведет к новым достижениям высокого уровня.

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.; *Ляпунов А.М.* Собр. соч. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – 476 с.
2. *Ковалев А.М.* Решение задач устойчивости для нелинейных систем с известной функцией со знакопостоянной производной // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 3–28.
3. *Ковалев А.М.* Решение задач неустойчивости с использованием метода дополнительных функций // Докл. НАН Украины. – 2009, № 11. – С. 21–27.
4. *Ковалев А.М.* Выделение устойчивых переменных нелинейных систем с использованием метода дополнительных функций // Докл. НАН Украины. – 2010, № 2. – С. 11–16.
5. *Ковалев А.М.* Метод дополнительных функций в задачах частичной устойчивости // Докл. НАН Украины. – 2009, № 7. – С. 17–23.
6. *Ковалев А.М.* Координатная устойчивость динамических систем // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 3–10.
7. *Ковалев А.М., Горр Г.В., Неспирный В.Н.* Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений с приложением в механике // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 3–18.
8. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
9. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
10. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Наука, 1970. – 331 с.
11. *Ковалев А.М.* Теория неустойчивости: от Ляпунова к Четаеву и до наших дней // Аналит. механика, устойчивость и управление: 10 междунар. Четаев. конф. (Казань, 12–16 июня 2012 г.). – Казань, 2012. – Т. 5: Пленар. докл. – С. 26–39.

A.M. Kovalev

Method of invariant relations in the stability theory

The questions, about the resolution of the problems of stability for the systems with a known fixed-sign function with constant sign derivative, are considered. The Lyapunov's functions and additional functions are used for the solution. The notion of coordinate stability of the dynamical systems is introduced, as well as the method of invariant relations is applied to the nonautonomous systems of the differential equations.

Keywords: *invariant relations, additional functions, coordinate approach, nonautonomous systems.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк Получено 16.05.17

kovalev@iamm.su