Український математичний вісник
Том 13 **(2016)**, № 1, 68 – 75

Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей

Александр К. Бахтин, Людмила В. Выговская, Ирина В. Денега

(Представлена В.Я. Гутлянским)

Аннотация. В данной работе изучается одна из классических проблем геометрической теории функций об экстремальном разбиении комплексной плоскости.

2010 MSC. 30C75.

Ключевые слова и фразы. Внутренний радиус области, непересекающиеся области, лучевые системы точек, разделяющее преобразование, квадратичный дифференциал, функция Грина.

1. Введение

Экстремальные задачи о неналегающих областях составляют известное классическое направление геометрической теории функций комплексного переменного [1–9]. Многие задачи такого плана сводятся к определению максимума произведения внутренних радиусов на системах попарно неналегающих областей, удовлетворяющих определенным условиям. Первоначальным толчком к развитию данной тематики послужила работа [7], в которой впервые решена задача о максимуме произведения конформных радиусов двух непересекающихся односвязных областей. Следует отметить, что большое значение при решении таких задач имеет теория квадратичных дифференциалов, в частности результаты, описывающие локальную и глобальную структуру их траекторий [9]. В последнее время большой интерес вызывают экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами. Разработанный в [1–3] метод разделяющего преобразования позволил значительно расширить область исследования. Подробнее с историей данного вопроса можно ознакомиться в работах [1–9].

Статья поступила в редакцию 15.03.2016

ISSN 1810 – 3200.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множество натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Пусть $r(B, a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ (см., например, [1–4]). Внутренний радиус области B связан с обобщенной функцией Грина $g_B(z, a)$ области B соотношениями

$$g_B(z, a) = -\ln|z - a| + \ln r(B, a) + o(1), \quad z \to a,$$

$$g_B(z, \infty) = \ln|z| + \ln r(B, a) + o(1), \quad z \to \infty.$$

Системой непересекающихся областей называется конечный набор произвольных областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ таких, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k, m = \overline{1, n}$.

Введем обозначения $P_k = P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi} \arg \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$.

Целью данной работы является получение точных оценок сверху для функционала следующего вида

$$J_n(\gamma) = r^\gamma\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right),$$

где $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $|a_k| = 1$, $a_0 = 0$, $\{B_k\}_{k=0}^n$ — система неналегающих областей таких, что $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{0, n}$.

2. Результаты и доказательства

Следующая теорема усиливает основной результат работы [5].

Теорема 2.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$, а $\gamma_n = 0,12\, n^2$ при $n \geqslant 9$. Тогда для любых различных точек единичной окружности $|a_k| = 1$ таких, что $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$ и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство*

$$r^\gamma\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \qquad (2.1)$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и B_k, $k = \overline{0, n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

Доказательство. Рассмотрим систему функций $\zeta = \pi_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k=\overline{1,n}$. Семейство функций $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$ называется допустимим для разделяющего преобразования областей B_k, $k=\overline{0,n}$ относительно углов $\{P_k\}_{k=1}^n$. Пусть $\Omega_k^{(1)}$, $k=\overline{1,n}$, обозначает область плоскости ζ, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_k\bigcap\overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_k)$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. В свою очередь, через $\Omega_k^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, обозначаем область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_{k+1}\bigcap\overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_{k+1})$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси, $B_{n+1}:=B_1$, $\pi_n(a_{n+1}):=\pi_n(a_1)$. Кроме того, $\Omega_k^{(0)}$ будет обозначать область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_0\bigcap\overline{P}_k)$, содержащей точку $\zeta=0$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. Обозначим

$$\pi_k(a_k):=\omega_k^{(1)},\quad \pi_k(a_{k+1}):=\omega_k^{(2)},\quad k=\overline{1,n},\quad \pi_n(a_{n+1}):=\omega_n^{(2)}.$$

Из определения функций π_k вытекает, что

$$|\pi_k(w)-\omega_k^{(1)}|\sim\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot|w-a_k|,\quad w\to a_k,\quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)-\omega_k^{(2)}|\sim\frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot|w-a_{k+1}|,\quad w\to a_{k+1},\quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)|\sim|w|^{\frac{1}{\alpha_k}},\quad w\to 0,\quad w\in\overline{P_k}.$$

Далее, используя соответствующие результаты работ [1, 2], имеем неравенства

$$r\left(B_k,a_k\right)\leqslant\left[\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_{k-1}^{(2)},\omega_{k-1}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot\frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}},\quad k=\overline{1,n},\tag{2.2}$$

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}}.\tag{2.3}$$

Из неравенств (2.2) и (2.3), получаем соотношение

$$J_n(\gamma)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left[r\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{r\left(\Omega_{k-1}^{(2)},\omega_{k-1}^{(2)}\right)r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)}{\frac{1}{\alpha_{k-1}\cdot\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}\cdot|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma \alpha_k^2} \left(\Omega_k^{(0)}, 0 \right) r \left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)} \right) r \left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Используя методику развитую в [4, с. 269–274], имеем

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2 \gamma} \left(G_k^{(0)}, 0 \right) r \left(G_k^{(1)}, -i \right) r \left(G_k^{(2)}, i \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.4)$$

где $G_k^{(0)}$, $G_k^{(1)}$, $G_k^{(2)}$ — круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4 - \alpha_k^2 \gamma) w^2 - \alpha_k^2 \gamma}{w^2 (w^2 + 1)^2} \, dw^2$$

$(0 \in G_k^{(0)}, -i \in G_k^{(1)}, i \in G_k^{(2)})$. Пусть

$$S(\sigma) = 2^{\sigma^2 + 6} \cdot \sigma^{\sigma^2} \cdot (2 - \sigma)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma)^2} \cdot (2 + \sigma)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma)^2}, \quad \sigma \in [0, 2].$$

Тогда из неравенства (2.4) согласно [1, 2], получаем оценку

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \left[\prod_{k=1}^{n} S\left(\alpha_k \sqrt{\gamma} \right) \right]^{1/2} = \gamma^{-n/2} \left[\prod_{k=1}^{n} P\left(\alpha_k \sqrt{\gamma} \right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$P(x) = 2^{x^2 + 6} \cdot x^{x^2 + 2} \cdot (2 - x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2} \cdot (2 + x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}, \quad x \in [0, 2].$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\prod_{k=1}^{n} P(x_k) \longrightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{\gamma},$$

$$x_k = \alpha_k \sqrt{\gamma}, \quad 0 < x_k \leqslant 2.$$

Пусть $F(x) = \ln(P(x))$ и $X^{(0)} = \left\{ x_k^{(0)} \right\}_{k=1}^{n}$ — произвольная экстремальная точка выше указанной задачи.

Повторяя рассуждения работы [5] получаем утверждение: если $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)} < 2$, $k \neq j$, тогда имеет место следующее соотношение

$$F'(x_k^{(0)}) = F'(x_j^{(0)}),$$

и если некоторое $x_j^{(0)} = 2$, тогда для произвольного $x_k^{(0)} < 2$,

$$F'(x_k^{(0)}) \leqslant F'(x_j^{(0)}) = F'(2) = 1,$$

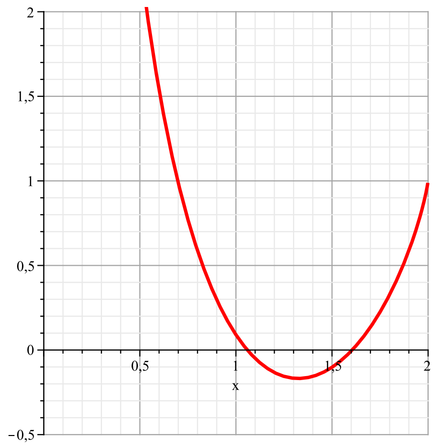

Рис. 1: График функции $F'(x)$

где $k, j = \overline{1, n}$, $k \neq j$, $F'(x) = 2x \ln 2x + (2-x)\ln(2-x) - (2+x)\ln(2+x) + \frac{2}{x}$ (см. Рис. 1).

Убедимся, что при выше принятых соотношениях будет выполняться условие

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}.$$

Пусть $F'(x) = t$, $y_0 \leqslant t \leqslant 1$, $y_0 \approx -0,17$. Рассмотрим следующие значения t: $t_1 = 1$, $t_2 = 0,95$, $t_3 = 0,9$, $t_4 = 0,85$, $\cdots$, $t_{23} = -0,15$, $t_{24} = -0,17$. Найдем решение уравнения $F'(x) = t_k$, $k = \overline{1, 24}$. Для $\forall t_k \in [y_0, 1)$ уравнение имеет два решения: $x_1(t) \in (0, x_0]$, $x_2(t) \in (x_0, 2]$, $x_0 \approx 1,324683$. Непосредственные вычисления представлены в таблице, приведенной ниже.

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_k)$	$3x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$	$4x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$	$5x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$	$6x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$	$7x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$
1	1,00	0,697331	2,000000					
2	0,95	0,708144	1,992640	4,084633	4,781964	5,479295	6,176626	6,873957
3	0,90	0,719344	1,983233	4,107666	4,815810	5,523955	6,232099	6,940244
4	0,85	0,730957	1,972549	4,130581	4,849925	5,569269	6,288613	7,007957
5	0,80	0,743014	1,960786	4,153657	4,884614	5,615571	6,346528	7,077485
6	0,75	0,755550	1,948028	4,177071	4,920085	5,663099	6,406113	7,149127
7	0,70	0,768602	1,934315	4,200964	4,956513	5,712063	6,467612	7,223162
8	0,65	0,782217	1,919654	4,225462	4,994064	5,762667	6,531269	7,299871
9	0,60	0,796446	1,904035	4,250687	5,032904	5,815122	6,597339	7,379556
10	0,55	0,811347	1,887429	4,276766	5,073211	5,869657	6,666102	7,462548
11	0,50	0,826991	1,869791	4,303831	5,115178	5,926525	6,737872	7,549218
12	0,45	0,843462	1,851059	4,332032	5,159023	5,986014	6,813005	7,639996
13	0,40	0,860858	1,831149	4,361534	5,204996	6,048457	6,891919	7,735381
14	0,35	0,879304	1,809955	4,392531	5,253389	6,114248	6,975106	7,835965
15	0,30	0,898950	1,787338	4,425249	5,304553	6,183857	7,063161	7,942464
16	0,25	0,919989	1,763115	4,459964	5,358914	6,257863	7,156813	8,055762
17	0,20	0,942675	1,737044	4,497012	5,417001	6,336991	7,256980	8,176969
18	0,15	0,967348	1,708794	4,536819	5,479494	6,422169	7,364844	8,307520
19	0,10	0,994487	1,677892	4,579935	5,547283	6,514631	7,481978	8,449326
20	0,00	1,059462	1,604865	4,588325	5,582811	6,577298	7,571784	8,566271
21	-0,05	1,100561	1,559491	4,737878	5,797340	6,856802	7,916265	8,975727
22	-0,10	1,152868	1,502748	4,804430	5,904991	7,005552	8,106113	9,206673
23	-0,15	1,234855	1,416172	4,874775	6,027642	7,180510	8,333378	9,486245
24	-0,17	1,324683	1,324683	5,029248	6,264103	7,498958	8,733814	9,968669

Учитывая свойства функции $F'(x)$ и условия теоремы, из таблицы, соответственно для $n = \overline{4, 8}$, получаем неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(t) > (n-1)x_1(t_k) + x_2(t_{k+1}) \geqslant 2\sqrt{\gamma_n},$$

где $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$, $k = \overline{1, 23}$. Таким образом, имеем, что для экстремального набора $X^{(0)}$ возможен только случай, когда $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n} \in (0,\, x_0]$, $x_0 \approx 1,324683$, $n = \overline{4, 8}$, и, следовательно, $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \cdots = x_n^{(0)}$.

Опираясь на метод, разработанный в [5], имеем, что для функции $F'(x)$ всегда выполняется соотношение $(x_1 - 0,69)\, n + (x_2 - x_1) > 0$ для $n \geqslant 9$. Отсюда $nx_1 + (x_2 - x_1) > 0,69\, n$. И, окончательно, получаем

$$(n-1)x_1 + x_2 > 2\sqrt{\gamma_n}, \quad \gamma_n = 0,12\, n^2, \quad n \geqslant 9.$$

Таким образом, в случае $n \geqslant 9$ набор точек $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ не может быть экстремальным при условии $x_n^{(0)} \in (x_0;\, 2]$. Следовательно, для экстремального набора $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ возможен только случай, когда $x_k^{(0)} \in (0,\, x_0]$, $k = \overline{1, n}$, и $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$. Для всех $\gamma < \gamma_n$, $n \geqslant 9$, все предыдущие рассуждения сохраняются. Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. $\square$

Из теоремы 2.1 получаем следующие результаты.

Следствие 1. ([5]) Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$, $\gamma \in (0,\, \gamma_n]$, $\gamma_n = n$. Тогда для любых различных точек единичной окружности $|a_k| = 1$ таких, что $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$ и произвольной системы взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, справедливо неравенство (2.1). Знак равенства достигается при тех же условиях что и в теоремы 2.1.

Следствие 2. ([6]) Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0,\, \gamma_n]$, $\gamma_n = n$. Тогда для любых различных точек единичной окружности $|a_k| = 1$ таких, что $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$ и произвольной системы взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, справедливо неравенство (2.1). Знак равенства достигается при тех же условиях что и в теоремы 2.1.

Литература

[1] В. Н. Дубинин, *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук, **49** (1994), № 1 (295), 3–76.

[2] В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР, **168**, (1988), 48–66.

[3] V. N. Dubinin, *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*, Birkhäuser, Springer, Basel, 2014, 344 p.

[4] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе* // Праці ін-ту мат-ки НАН України, 2008, 308 с.

[5] Л. В. Ковалев, *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности* // Дальневосточный матем. сборник, **2** (1996), 96–98.

[6] A.K. Bakhtin, I.V. Denega, *Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane* // Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź, Recherches sur les déformations, **LXII** (2012), № 2, 83–92.

[7] М. А. Лаврентьев, *К теории конформных отображений* // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР, **5** (1934), 159–245.

[8] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, М., Наука, 1966, 628 с.

[9] Дж. А. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, М., Издательство иностр.лит., 1962, 256 с.

Сведения об авторах

Александр Константинович Бахтин,

Людмила Вячеславовна Выговская,

Ирина Викторовна Денега

Институт математики НАН Украины,
Киев, Украина
E-Mail: `alexander.bahtin@yandex.ru`,
`lyudmilavlv@ukr.net`,
`iradenega@yandex.ru`