Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 4, 457 – 471

Локальный принцип больших уклонений для решений стохастических уравнений Ито с быстрым сносом

Артём В. Логачёв

(*Представлена С. Я. Махно*)

Аннотация. В работе рассматривается решение стохастического уравнения $X(t) = x_0 + b\int_0^t \operatorname{sign}(X(s))|X(s)|^\gamma ds + w(t)$, где $w(t)$ — винеровский процесс, константа $b \neq 0$, $\gamma \in (0,1]$. Доказан локальный принцип больших уклонений для последовательности процессов $X_n(t) = \frac{X(nt)}{n^\alpha}$, где $\alpha > 1/2$. Найден вид функционала уклонений (действия).

2010 MSC. 60F10, 60H10, 60J60.

Ключевые слова и фразы. Принцип больших уклонений, локальный принцип больших уклонений, стохастические дифференциальные уравнения.

Введение

Рассмотрим, заданное на стохастическом базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$ решение стохастического уравнения Ито

$$X(t) = x_0 + b\int_0^t \operatorname{sign}(X(s))|X(s)|^\gamma ds + w(t), \tag{1}$$

где $t \geq 0$, $w(t)$ — $\mathfrak{F}_t$-согласованный винеровский процесс, константа $b \neq 0$, $\gamma \in (0,1]$,

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ \ \ 1, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Из Proposition 1.11 [1] или теоремы 5.53 цикла работ [2] следует, что уравнение (1) имеет единственное сильное решение.

Статья поступила в редакцию 22.01.2016

Нас будет интересовать локальный принцип больших уклонений (л.п.б.у.) для последовательности процессов

$$X_n(t) = \frac{X(nt)}{n^\alpha},$$

где $t \in [0,1]$, $\alpha > 1/2$, $n > 0$.

Статьи посвященные принципу больших уклонений (п.б.у.) для решений стохастических уравнений Ито можно разделить на две группы:

1) работы в которых ослабляются, по сравнению с монографией [3], условия на коэффициенты сноса и диффузии (допускаются разрывы у коэффициентов, вырожденность коэффициента диффузии, уравнения содержат локальное время) [5–9];

2) статьи в которых коэффициенты сноса и диффузии зависят от параметра (периодические коэффициенты, коэффициенты имеют интегральные средние, диффузия в случайной среде) [10–14]. При этом в работах из второй группы требуется в какой-то форме сходимость коэффициентов сноса и диффузии.

Последовательность $X_n(t)$ совпадает по распределению с последовательностью решений стохастических уравнений Ито

$$y_n(t) = \frac{x_0}{n^\alpha} + bn^{1-\alpha(1-\gamma)} \int_0^t \operatorname{sign}(y_n(s))|y_n(s)|^\gamma ds + \frac{1}{n^{\alpha-1/2}} w(t).$$

Очевидно, что если $\alpha < \frac{1}{1-\gamma}$, то коэффициент сноса $bn^{1-\alpha(1-\gamma)} \times$ $\times \operatorname{sign}(y)|y|^\gamma$ не удовлетворяет условиям перечисленных выше работ. При этом тут есть два принципиально разных случая:

1) $b < 0$, в этом случае если винеровский шум “выбивает” решение из окрестности нуля, то снос “возвращает” траекторию обратно;

2) $b > 0$, в этом случае если винеровский шум “выбивает” решение из окрестности нуля, то снос “уносит” траекторию на бесконечность.

В обоих случаях, как будет показано, вероятность попасть в окрестность фиксированной непрерывной функции “гораздо” меньше чем для случаев, когда есть сходимость коэффициента сноса. При этом для обоих случаев эта вероятность имеет одинаковую грубую экспоненциальную асимптотику.

Статья построена по следующему плану: во введении введены основные обозначения и сделан обзор известных результатов; в первом разделе получен л.п.б.у. для последовательности X_n; во втором разделе доказан л.п.б.у. для последовательности y_n, а также в качестве примера получен л.п.б.у. для процесса Орнштейна–Уленбека.

Введем обозначения. Пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций обозначим $\mathbb{C}[0,1]$, через $\mathbb{C}_0$ обозначим множество функций

$\{f \in \mathbb{C}[0,1] : f(0) = 0\}$. Через $\mathbb{AC}_0$ обозначим множество абсолютно непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, которые в нуле равны нулю, обозначим $\mathcal{X}\{\cdot\}$ индикатор множества.

На пространстве $\mathbb{C}[0,1]$ зададим равномерную метрику

$$\rho(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|.$$

Борелевскую σ-алгебру подмножеств метрического пространства (м.п.) $(\mathbb{C}[0,1],\rho)$ обозначим $\mathfrak{B}_{(\mathbb{C}[0,1],\rho)}$.

Для борелевского множества B из м.п. $(\mathbb{C}[0,1],\rho)$, через $(B), [B]$ будем обозначать внутренность и замыкание множества B, соответственно.

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность случайных процессов η_n удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}[0,1],\rho)$ с функционалом уклонений $I = I(f) : \mathbb{C}[0,1] \to [0,\infty]$ и нормирующей функцией $\psi(n) : \lim\limits_{n\to\infty} \psi(n) = \infty$, если для любого $c \geq 0$ множество $\{f \in \mathbb{C}[0,1] : I(f) \leq c\}$ является компактом в м.п. $(\mathbb{C}[0,1],\rho)$ и для любого множества $B \in \mathfrak{B}_{(\mathbb{C}[0,1],\rho)}$ выполнены неравенства*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\,\eta_n \in B\,) \leq -I([B]),$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\,\eta_n \in B\,) \geq -I((B)),$$

где $I(A) = \inf\limits_{y\in A} I(y)$ для $A \in \mathfrak{B}_{(\mathbb{C}[0,1],\rho)}$.

Определение 2. *Последовательность случайных процессов η_n удовлетворяет л.п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}[0,1],\rho)$ с функционалом уклонений $I = I(f) : \mathbb{C}[0,1] \to [0,\infty]$ и нормирующей функцией $\psi(n) : \lim\limits_{n\to\infty} \psi(n) = \infty$, если для любой функции $f \in \mathbb{C}[0,1]$ выполнены неравенства*

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(X_n(t) \in U_\varepsilon(f))\\ =\ &\lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(X_n(t) \in U_\varepsilon(f)) = -I(f),\end{aligned}$$

где $U_\varepsilon(f) = \{g \in \mathbb{C} : \ \rho(f,g) < \varepsilon\}$.

Более подробно о понятии л.п.б.у. см. [15, 16].

Заметим, что метод, который будет использоваться при доказательстве основного результата аналогичен методу, который был применен в работе [17].

1. Л.п.б.у. для последовательности процессов X_n

Прежде чем формулировать основной результат докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha > 1/2$, *тогда последовательность случайных процессов*

$$w_n(t) = \frac{x_0 + w(nt)}{n^\alpha}, \quad t \in [0,1]$$

удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}[0,1], \rho)$ *с нормирующей функцией* $n^{2\alpha-1}$ *и функционалом уклонений*

$$\tilde{I}(f) := \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^1 \dot{f}^2(s)ds, & \text{если } f \in \mathbb{AC}_0, \\ \infty, & \text{если } f \notin \mathbb{AC}_0. \end{cases}$$

Доказательство. Используя свойство автомодельности винеровского процесса, получаем

$$\frac{w(nt)}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1/2}} \frac{w(nt)}{n^{1/2}} = \frac{1}{n^{\alpha-1/2}} \tilde{w}_n(t),$$

где $\tilde{w}_n(t)$ — винеровский процесс при каждом n.

Например, из монографии [3] следует, что последовательность $\frac{1}{n^{\alpha-1/2}}\tilde{w}_n(t)$ удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}[0,1], \rho)$ с нормирующей функцией $n^{2\alpha-1}$ и функционалом уклонений $\tilde{I}$, поэтому этому же п.б.у. удовлетворяет и $\frac{w(nt)}{n^\alpha}$.

Так как для любого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2\alpha-1}} \ln \mathbf{P}\left(\rho\left(w_n(t), \frac{w(nt)}{n^\alpha}\right) > \varepsilon\right) = -\infty,$$

то по теореме 4.2.13 [4] последовательности $w_n(t)$ и $\frac{w(nt)}{n^\alpha}$ удовлетворяют одинаковому п.б.у. □

Лемма 2. *Пусть* $|x| \leq C$ *и* $|y| \leq C$, *тогда для любого* $\gamma \in (0,1]$ *выполнено неравенство*

$$|sign(x)|x|^\gamma - sign(y)|y|^\gamma| \leq l(\gamma, C)|x-y|^{\frac{\gamma}{2}},$$

где $l(\gamma, C) = \gamma \left|\frac{4-2\gamma}{\gamma} C^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}\right|^{\frac{2-\gamma}{2}}$.

Доказательство. Используя неравенство Гельдера, получаем

$$
\begin{aligned}
&|\mathrm{sign}(x)|x|^\gamma - \mathrm{sign}(y)|y|^\gamma| = \gamma\left|\int_x^y |t|^{\gamma-1}dt\right| \\
\leq\ & \gamma\left|\int_x^y |t|^{\frac{2\gamma-2}{2-\gamma}}dt\right|^{\frac{2-\gamma}{2}}|x-y|^{\frac{\gamma}{2}} \\
\leq\ & |x-y|^{\frac{\gamma}{2}}\gamma\left|\frac{2-\gamma}{\gamma}\mathrm{sign}(t)|t|^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}\Big|_x^y\right|^{\frac{2-\gamma}{2}} \leq |x-y|^{\frac{\gamma}{2}}\gamma\left|\frac{4-2\gamma}{\gamma}C^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}\right|^{\frac{2-\gamma}{2}}.
\end{aligned}
$$

□

На пространстве $\mathbb{C}[0,1]$ определим функционал $I : \mathbb{C}[0,1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$
I(f) := \begin{cases} \frac{b^2}{2}\int_0^1 |f(s)|^{2\gamma}ds, & \text{если } f \in \mathbb{C}_0, \\ \infty, & \text{если } f \notin \mathbb{C}_0. \end{cases}
$$

Теорема 1. *Пусть* $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{1-\gamma}$, *тогда для любой функции* $f \in \mathbb{C}[0,1]$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+2\alpha\gamma}}\ln \mathbf{P}(X_n(t) \in U_\varepsilon(f)) \\
=\ & \lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+2\alpha\gamma}}\ln \mathbf{P}(X_n(t) \in U_\varepsilon(f)) = -I(f),
\end{aligned}
$$

где

$$
U_\varepsilon(f) = \{g \in \mathbb{C} :\ \rho(f,g) < \varepsilon\}.
$$

Доказательство. Чтобы доказать теорему достаточно установить справедливость следующих неравенств

$$
\limsup_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+2\alpha\gamma}}\ln \mathbf{P}(X_n(t) \in U_\varepsilon(f)) \leq -I(f), \tag{2}
$$

$$
\liminf_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+2\alpha\gamma}}\ln \mathbf{P}(X_n(t) \in U_\varepsilon(f)) \geq -I(f). \tag{3}
$$

Обозначим $\tilde{b}(x) := b \cdot \mathrm{sign}(x)|x|^\gamma$.

Из теоремы Гирсанова следует, что для любого фиксированного $n > 0$ на стохастическом базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \widetilde{\mathbf{P}})$, при $t \in [0,n]$ случайный процесс $X(t)$ будет иметь вид $x_0 + B(t)$, где $B(t)$ — винеровский процесс на стохастическом базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \widetilde{\mathbf{P}})$ и

$$
\frac{d\widetilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = \exp\left\{-\int_0^n \tilde{b}(X(s))dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^n \tilde{b}^2(X(s))ds\right\}.
$$

Пусть $f \in \mathbb{C}_0$, тогда

$$\mathbf{P}(X_n \in U_\varepsilon(f)) = \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |X(nt) - n^\alpha f(t)| < n^\alpha \varepsilon\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,n]} |X(t) - n^\alpha f(t/n)| < n^\alpha \varepsilon\right) \\
&= \widetilde{\mathbf{E}} \exp\left\{\int_0^n \tilde{b}(x_0 + B(s))dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^n \tilde{b}^2(x_0 + B(s))ds\right\} \\
&\times \mathcal{X}\left\{\sup_{t\in[0,n]} |x_0 + B(t) - n^\alpha f(t/n)| < n^\alpha \varepsilon\right\},
\end{aligned}$$

где $\widetilde{\mathbf{E}}$ — математическое ожидание по мере $\widetilde{\mathbf{P}}$.

Обозначим

$$B_n(t) = \frac{x_0 + B(nt)}{n^\alpha}.$$

Будем иметь

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(X_n \in U_\varepsilon(f)) \\
= \ &\widetilde{\mathbf{E}} \exp\left\{\int_0^n \tilde{b}(x_0 + B(s))dB(s) - \frac{n^{1+2\alpha\gamma}b^2}{2}\int_0^1 \left|\frac{x_0 + B(ns)}{n^\alpha}\right|^{2\gamma} ds\right\} \\
&\times \mathcal{X}\left\{B_n \in U_\varepsilon(f)\right\}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Оценим сомножители равенства (4).

$$\begin{aligned}
&\exp\left\{-\frac{n^{1+2\alpha\gamma}b^2}{2}\int_0^1 \left|\frac{x_0 + B(ns)}{n^\alpha}\right|^{2\gamma} ds\right\} \mathcal{X}\left\{B_n \in U_\varepsilon(f)\right\} \\
= \ &\exp\left\{-\frac{n^{1+2\alpha\gamma}b^2}{2}\int_0^1 |B_n(s)|^{2\gamma} \mathcal{X}\left\{B_n(s) \in [f(s) - \varepsilon, f(s) + \varepsilon]\right\} ds\right\} \\
\times \ &\mathcal{X}\left\{B_n \in U_\varepsilon(f)\right\}.
\end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned}
&\exp\left\{-\frac{n^{1+2\alpha\gamma}b^2}{2}\int_0^1 \left(f^2(s) + 2C\varepsilon + \varepsilon^2\right)^\gamma ds\right\}\mathcal{X}\left\{B_n \in U_\varepsilon(f)\right\} \\
\le \ &\exp\left\{-\frac{n^{1+2\alpha\gamma}b^2}{2}\int_0^1 \left|\frac{x_0 + B(ns)}{n^\alpha}\right|^{2\gamma} ds\right\} \mathcal{X}\left\{B_n \in U_\varepsilon(f)\right\} \\
\le \ &\exp\left\{-\frac{n^{1+2\alpha\gamma}b^2}{2}\int_0^1 \left(f^2(s) - 2C\varepsilon\right)^\gamma \mathcal{X}\left\{f^2(s) \ge 2C\varepsilon\right\} ds\right\} \\
&\times \mathcal{X}\left\{B_n \in U_\varepsilon(f)\right\}, \qquad (5)
\end{aligned}$$

где $C = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

Так как функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, то она на нем равномерно непрерывна, поэтому найдется $\delta_\varepsilon : \forall\, t,s \in [0,1] : |t-s| < \delta_\varepsilon$ будет выполнено $|f(t)-f(s)| < \varepsilon$.

Обозначим через $g_\varepsilon(t)$ ломанную с узлами в точках $(0,0)$, $(\delta_\varepsilon, \sqrt[r]{f(\delta_\varepsilon)})$, $(2\delta_\varepsilon, \sqrt[r]{f(2\delta_\varepsilon)})\ \ldots,\ (1, \sqrt[r]{f(1)})$, где нечетное $r \geq 1/\gamma$.

Тогда значения функции $d_\varepsilon(t) = (g_\varepsilon(t))^r$ будут совпадать со значениями функции $f(t)$ при $t \in \{0, \delta_\varepsilon, 2\delta_\varepsilon, \ldots, 1\}$, а для остальных $t \in [0,1]$ будет выполнено неравенство $|f(t) - d_\varepsilon(t)| < \varepsilon$.

Будем иметь

$$\begin{aligned}
&\int_0^n \tilde{b}(x_0+B(s))dB(s) = b\int_0^n \operatorname{sign}(x_0+B(s))|x_0+B(s)|^\gamma dB(s)\\
= \quad & bn^{\alpha\gamma}\int_0^1 \operatorname{sign}(B_n(s))|B_n(s)|^\gamma dB(ns)\\
= \quad & bn^{\alpha\gamma}\int_0^1 \big(\operatorname{sign}(B_n(s))|B_n(s)|^\gamma - \operatorname{sign}(d_\varepsilon(s))|d_\varepsilon(s)|^\gamma\big)dB(ns)\\
+ \quad & bn^{\alpha\gamma}\int_0^1 \operatorname{sign}(d_\varepsilon(s))|d_\varepsilon(s)|^\gamma dB(ns) := M_1 + M_2.
\end{aligned}$$

Применяя формулу Ито к функции $\operatorname{sign}\left(d_\varepsilon\left(\frac{s}{n}\right)\right)\left|d_\varepsilon\left(\frac{s}{n}\right)\right|^\gamma B(s)$, получаем

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sign}(d_\varepsilon(1))|d_\varepsilon(1)|^\gamma B(n) = \operatorname{sign}(g_\varepsilon(1))|g_\varepsilon(1)|^{r\gamma}B(n)\\
= \quad & \frac{r\gamma}{n}\int_0^n \left|g_\varepsilon\left(\frac{s}{n}\right)\right|^{r\gamma-1}\dot{g}_\varepsilon\left(\frac{s}{n}\right)B(s)ds\\
+ \quad & \int_0^n \operatorname{sign}\left(d_\varepsilon\left(\frac{s}{n}\right)\right)\left|d_\varepsilon\left(\frac{s}{n}\right)\right|^\gamma dB(s)\\
= \quad & r\gamma\int_0^1 |g_\varepsilon(s)|^{r\gamma-1}\dot{g}_\varepsilon(s)B(ns)ds + \int_0^1 \operatorname{sign}(d_\varepsilon(s))|d_\varepsilon(s)|^\gamma dB(ns).
\end{aligned}$$

Поэтому будем иметь

$$M_2 = bn^{\alpha\gamma}\operatorname{sign}(g_\varepsilon(1))|g_\varepsilon(1)|^{r\gamma}B(n) - bn^{\alpha\gamma}r\gamma\int_0^1 |g_\varepsilon(s)|^{r\gamma-1}\dot{g}_\varepsilon(s)B(ns)ds.$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} & |b|n^{\alpha\gamma}(C+\varepsilon)^{\gamma}\sup_{t\in[0,1]}|B(nt)| \\ + \; & |b|n^{\alpha\gamma}r\gamma\sup_{t\in[0,1]}|B(nt)|(C+\varepsilon)^{\gamma-1/r}\frac{2\sqrt[r]{C}}{\delta_\varepsilon} \geq M_2 \\ \geq \; & -|b|n^{\alpha\gamma}(C+\varepsilon)^{\gamma}\sup_{t\in[0,1]}|B(nt)| \\ - \; & |b|n^{\alpha\gamma}r\gamma\sup_{t\in[0,1]}|B(nt)|(C+\varepsilon)^{\gamma-1/r}\frac{2\sqrt[r]{C}}{\delta_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Обозначим $K(\varepsilon) := |b|(C+\varepsilon)^{\gamma} + \frac{2\sqrt[r]{C}|b|r\gamma}{\delta_\varepsilon}(C+\varepsilon)^{\gamma-1/r}$.

Тогда справедливо неравенство

$$n^{\alpha\gamma}\sup_{t\in[0,1]}|B(nt)|K(\varepsilon) \geq M_2 \geq -n^{\alpha\gamma}\sup_{t\in[0,1]}|B(nt)|K(\varepsilon). \qquad (6)$$

Оценим сверху $\mathbf{P}(X_n \in U_\varepsilon(f))$. Используя неравенства (5), (6), получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X_n \in U_\varepsilon(f)) \\ \leq \; & \exp\left\{-\frac{n^{1+2\alpha\gamma}b^2}{2}\int_0^1 \left(f^2(s)-2C\varepsilon\right)^{\gamma}\mathcal{X}\left\{f^2(s)\geq 2C\varepsilon\right\}ds\right\} \\ \times \; & \widetilde{\mathbf{E}}\exp\left\{n^{\alpha\gamma}\sup_{t\in[0,1]}|B(nt)|K(\varepsilon)+M_1\right\}\mathcal{X}\left\{B_n\in U_\varepsilon(f)\right\} \\ \leq \; & \exp\left\{-\frac{n^{1+2\alpha\gamma}b^2}{2}\int_0^1 \left(f^2(s)-2C\varepsilon\right)^{\gamma}\mathcal{X}\left\{f^2(s)\geq 2C\varepsilon\right\}ds\right\} \\ \times \; & \widetilde{\mathbf{E}}\exp\left\{n^{\alpha+\alpha\gamma}(C+\varepsilon+|x_0|)K(\varepsilon)+M_1\right\}\mathcal{X}\left\{B_n\in U_\varepsilon(f)\right\} \\ = \; & \exp\left\{-\frac{n^{1+2\alpha\gamma}b^2}{2}\int_0^1 \left(f^2(s)-2C\varepsilon\right)^{\gamma}\mathcal{X}\left\{f^2(s)\geq 2C\varepsilon\right\}ds\right. \\ & \left. +n^{\alpha+\alpha\gamma}\tilde{K}(\varepsilon)\right\}\widetilde{\mathbf{E}}\exp\{M_1\}\mathcal{X}\left\{B_n\in U_\varepsilon(f)\right\}, \end{aligned} \qquad (7)$$

где $\tilde{K}(\varepsilon) = (C+\varepsilon+|x_0|)K(\varepsilon)$.

Обозначим $z_\varepsilon(s) := \mathrm{sign}(B_n(s))|B_n(s)|^{\gamma} - \mathrm{sign}(d_\varepsilon(s))|d_\varepsilon(s)|^{\gamma}$. Будем иметь

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbf{E}}\exp\{M_1\}\mathcal{X}\left\{B_n \in U_\varepsilon(f)\right\}\\
= \;& \widetilde{\mathbf{E}}\exp\left\{bn^{\alpha\gamma}\int_0^1 z_\varepsilon(s)dB(ns)\right\}\mathcal{X}\left\{B_n \in U_\varepsilon(f)\right\}\\
\leq \;& \widetilde{\mathbf{E}}\exp\left\{bn^{\alpha\gamma}\int_0^1 z_\varepsilon(s)\mathcal{X}\left\{B_n(s)\in[f(s)-\varepsilon, f(s)+\varepsilon]\right\}dB(ns)\right\}\\
= \;& \widetilde{\mathbf{E}}\exp\left\{bn^{1/2+\alpha\gamma}\int_0^1 z_\varepsilon(s)\mathcal{X}\left\{B_n(s)\in[f(s)-\varepsilon, f(s)+\varepsilon]\right\}d\tilde{B}_n(s)\right\},
\end{aligned}$$

где $\tilde{B}_n(t) = \frac{B(nt)}{\sqrt{n}}$ — винеровский процесс.

Обозначим $\tilde{z}_\varepsilon(t) = z_\varepsilon(t)\mathcal{X}\left\{B_n(t)\in[f(t)-\varepsilon, f(t)+\varepsilon]\right\}$.

Используя лемму 2, получаем

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbf{E}}\exp\left\{bn^{1/2+\alpha\gamma}\int_0^1 \tilde{z}_\varepsilon(s)d\tilde{B}_n(s)\right\}\\
= \;& \widetilde{\mathbf{E}}\exp\left\{bn^{1/2+\alpha\gamma}\int_0^1 \tilde{z}_\varepsilon(s)d\tilde{B}_n(s) - \frac{b^2n^{1+2\alpha\gamma}}{2}\int_0^1 \tilde{z}^2_\varepsilon(s)ds\right\}\\
\times \;& \exp\left\{\frac{b^2n^{1+2\alpha\gamma}}{2}\int_0^1 \tilde{z}^2_\varepsilon(s)ds\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq \;& \exp\left\{\frac{b^2n^{1+2\alpha\gamma}}{2}l^2(\gamma, C+\varepsilon)(2\varepsilon)^\gamma\right\}\widetilde{\mathbf{E}}\\
\times \;& \exp\left\{bn^{1/2+\alpha\gamma}\int_0^1 \tilde{z}_\varepsilon(s)d\tilde{B}_n(s) - \frac{b^2n^{1+2\alpha\gamma}}{2}\int_0^1 \tilde{z}^2_\varepsilon(s)ds\right\}\\
&= \exp\left\{\frac{b^2n^{1+2\alpha\gamma}}{2}l^2(\gamma, C+\varepsilon)(2\varepsilon)^\gamma\right\}. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Из (7), (8) следует, что

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(X_n \in U_\varepsilon(f))\\
\leq \;& \exp\left\{-\frac{n^{1+2\alpha\gamma}b^2}{2}\int_0^1 \left(f^2(s)-2C\varepsilon\right)^\gamma \mathcal{X}\left\{f^2(s)\geq 2C\varepsilon\right\}ds\right\}\\
\times \;& \exp\left\{n^{\alpha+\alpha\gamma}\tilde{K}(\varepsilon) + \frac{b^2n^{1+2\alpha\gamma}}{2}l^2(\gamma, C+\varepsilon)(2\varepsilon)^\gamma\right\}
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+2\alpha\gamma}}\ln\mathbf{P}(X_n(t)\in U_\varepsilon(f))\\ \le\ & -\frac{b^2}{2}\int_0^1\left(f^2(s)-2C\varepsilon\right)^\gamma\mathcal{X}\left\{f^2(s)\ge 2C\varepsilon\right\}ds+\frac{b^2}{2}l^2(\gamma,C+\varepsilon)(2\varepsilon)^\gamma.\end{aligned}$$

Перейдя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим неравенство (2).

Оценим снизу $\mathbf{P}(X_n\in U_\varepsilon(f))$. Используя равенство (4) и неравенства (5), (6), получаем

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(X_n\in U_\varepsilon(f))\ge\exp\Big\{-\frac{n^{1+2\alpha\gamma}b^2}{2}\int_0^1\left(f^2(s)+2C\varepsilon+\varepsilon^2\right)^\gamma ds\Big\}\\ \times\ &\widetilde{\mathbf{E}}\exp\left\{-n^{\alpha\gamma}\sup_{t\in[0,1]}|B(nt)|K(\varepsilon)+M_1\right\}\mathcal{X}\left\{B_n\in U_\varepsilon(f)\right\}\\ \ge\ &\exp\Big\{-\frac{n^{1+2\alpha\gamma}b^2}{2}\int_0^1\left(f^2(s)+2C\varepsilon+\varepsilon^2\right)^\gamma ds-n^{\alpha+\alpha\gamma}\tilde{K}(\varepsilon)\Big\}\end{aligned}$$

$$\times\widetilde{\mathbf{E}}\exp\left\{M_1\right\}\mathcal{X}\left\{B_n\in U_\varepsilon(f)\right\}. \tag{9}$$

Обозначим $M_3:=bn^{1/2+\alpha\gamma}\int_0^1\tilde{z}_\varepsilon(s)d\tilde{B}_n(s)$. Тогда

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathbf{E}}\exp\left\{M_1\right\}\mathcal{X}\left\{B_n\in U_\varepsilon(f)\right\}\\ =\ &\widetilde{\mathbf{E}}\exp\left\{bn^{\alpha\gamma}\int_0^1 z_\varepsilon(s)dB(ns)\right\}\mathcal{X}\left\{B_n\in U_\varepsilon(f)\right\}\\ =\ &\widetilde{\mathbf{E}}\exp\left\{bn^{\alpha\gamma}\int_0^1 \tilde{z}_\varepsilon(s)dB(ns)\right\}\mathcal{X}\left\{B_n\in U_\varepsilon(f)\right\}\\ =\ &\widetilde{\mathbf{E}}\exp\left\{M_3\right\}\mathcal{X}\left\{B_n\in U_\varepsilon(f)\right\}\\ \ge\ &\exp\left\{-b^2n^{1+2\alpha\gamma}l^2(\gamma,C+\varepsilon)(2\varepsilon)^\gamma\right\}\widetilde{\mathbf{E}}\mathcal{X}\left\{B_n\in U_\varepsilon(f)\right\}\\ \times\ &\mathcal{X}\left\{M_3\ge -b^2n^{1+2\alpha\gamma}l^2(\gamma,C+\varepsilon)(2\varepsilon)^\gamma\right\}\end{aligned}$$

$$=\exp\{-b^2n^{1+2\alpha\gamma}l^2(\gamma,C+\varepsilon)(2\varepsilon)^\gamma\}\tilde{\mathbf{P}}(A\cap G), \tag{10}$$

где $A:=\{\omega:M_3\ge -b^2n^{1+2\alpha\gamma}l^2(\gamma,C+\varepsilon)(2\varepsilon)^\gamma\}$, $G:=\{\omega:B_n\in U_\varepsilon(f)\}$.

Применяя неравенство Чебышева и лемму 2, получаем

$$\begin{aligned}
&\quad \tilde{\mathbf{P}}(A) = \tilde{\mathbf{P}}(-M_3 \le b^2 n^{1+2\alpha\gamma} l^2(\gamma, C+\varepsilon)(2\varepsilon)^\gamma) \\
&= \quad \tilde{\mathbf{P}}\left(\exp\{-M_3\} \le \exp\{b^2 n^{1+2\alpha\gamma} l^2(\gamma, C+\varepsilon)(2\varepsilon)^\gamma\}\right) \\
&= \quad 1 - \tilde{\mathbf{P}}\left(\exp\{-M_3\} > \exp\{b^2 n^{1+2\alpha\gamma} l^2(\gamma, C+\varepsilon)(2\varepsilon)^\gamma\}\right) \\
&= \quad 1 - \tilde{\mathbf{P}}\Bigg(\exp\left\{-M_3 - \frac{b^2 n^{1+2\alpha\gamma}}{2}\int_0^1 \tilde{z}_\varepsilon^2(s)ds\right\} \\
&> \quad \exp\left\{b^2 n^{1+2\alpha\gamma} l^2(\gamma, C+\varepsilon)(2\varepsilon)^\gamma - \frac{b^2 n^{1+2\alpha\gamma}}{2}\int_0^1 \tilde{z}_\varepsilon^2(s)ds\right\}\Bigg) \\
&\ge \quad 1 - \tilde{\mathbf{P}}\Bigg(\exp\left\{-M_3 - \frac{b^2 n^{1+2\alpha\gamma}}{2}\int_0^1 \tilde{z}_\varepsilon^2(s)ds\right\} \\
&> \quad \exp\left\{\frac{b^2 n^{1+2\alpha\gamma} l^2(\gamma, C+\varepsilon)(2\varepsilon)^\gamma}{2}\right\}\Bigg) \\
&\ge \quad 1 - \frac{\widetilde{\mathbf{E}} \exp\left\{-M_3 - \frac{b^2 n^{1+2\alpha\gamma}}{2}\int_0^1 \tilde{z}_\varepsilon^2(s)ds\right\}}{\exp\left\{\frac{b^2 n^{1+2\alpha\gamma} l^2(\gamma, C+\varepsilon)(2\varepsilon)^\gamma}{2}\right\}} \\
&\qquad = 1 - \exp\left\{-\frac{b^2 n^{1+2\alpha\gamma} l^2(\gamma, C+\varepsilon)(2\varepsilon)^\gamma}{2}\right\}. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Так как функция $f(t)$ непрерывна, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывно дифференцируемая функция $h_\varepsilon(t) \in U_\varepsilon(f)$. Обозначим $H_\varepsilon = \sup\limits_{t\in[0,1]} h'_\varepsilon(t)$. Тогда из леммы 1 следует, что

$$\tilde{\mathbf{P}}(G) \ge \exp\left\{-\frac{H_\varepsilon^2}{2} n^{2\alpha-1} + o(n^{2\alpha-1})\right\}. \qquad (12)$$

Используя оценки (11), (12), неравенство $\tilde{\mathbf{P}}(A \cap G) \ge \tilde{\mathbf{P}}(A) + \tilde{\mathbf{P}}(G) - 1$ и условие $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{1-\gamma}$, при достаточно больших n получаем

$$\tilde{\mathbf{P}}(A \cap G) \ge \exp\left\{-H_\varepsilon^2 n^{2\alpha-1} + o(n^{2\alpha-1})\right\}. \qquad (13)$$

Применяя оценки (9), (10), (13), получаем

$$\begin{aligned}
&\quad \mathbf{P}(X_n \in U_\varepsilon(f)) \\
&\ge \quad \exp\left\{-\frac{n^{1+2\alpha\gamma} b^2}{2}\int_0^1 \left(f^2(s) + 2C\varepsilon + \varepsilon^2\right)^\gamma ds - n^{\alpha+\alpha\gamma}\tilde{K}(\varepsilon)\right\} \\
&\times \quad \exp\left\{-b^2 n^{1+2\alpha\gamma} l^2(\gamma, C+\varepsilon)(2\varepsilon)^\gamma\right\} \exp\left\{-H_\varepsilon^2 n^{2\alpha-1} + o(n^{2\alpha-1})\right\}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\quad \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1+2\alpha\gamma}} \ln \mathbf{P}(X_n(t) \in U_\varepsilon(f)) \\
&\ge \quad -\frac{b^2}{2}\int_0^1 \left(f^2(s) + 2C\varepsilon + \varepsilon^2\right)^\gamma ds - \frac{b^2}{2} l^2(\gamma, C+\varepsilon)(2\varepsilon)^\gamma.
\end{aligned}$$

Перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство (3).

Если $f \notin \mathbb{C}_0$, то $\tilde{\mathbf{P}}(B_n \in U_\varepsilon(f)) = 0$ для всех достаточно малых ε, откуда следует, что

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+2\alpha\gamma}}\ln \mathbf{P}(X_n(t)\in U_\varepsilon(f)) \\ = \ &\lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+2\alpha\gamma}}\ln \mathbf{P}(X_n(t)\in U_\varepsilon(f)) = -\infty. \end{aligned}$$

□

Покажем, что последовательность X_n не является экспоненциально плотной, а следовательно (см. [4, Remark (a) с. 8]) нельзя получить п.б.у. в смысле определения 1. Напомним определение экспоненциально плотной последовательности.

Определение 3. *Будем говорить, что последовательность случайных процессов η_n является экспоненциально плотной в м.п. (Y, d), если для любого $\alpha < \infty$ найдется компакт $K_\alpha \subset Y$ такой, что*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\psi(n)}\ln \mathbf{P}(\eta_n \notin K_\alpha) < -\alpha.$$

Предположим, что последовательность X_n является экспоненциально плотной. Тогда найдется компакт K_1 такой, что

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+2\alpha\gamma}}\ln \mathbf{P}(X_n \notin K_1) < -1.$$

Из теоремы Асколи–Арцела следует, что существует константа $C > 0$ такая, что для всех функций $f \in K_1$ выполнено неравенство $\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)| \le C$. Рассмотрим функцию

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, 1/2 - r], \\ \frac{C+2}{r}(t - 1/2 + r), & \text{если } t \in (1/2 - r, 1/2], \\ \frac{C+2}{r}(1/2 + r - t), & \text{если } t \in (1/2, 1/2 + r], \\ 0, & \text{если } t \in (1/2 + r, 1], \end{cases}$$

где константа $0 < r < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2b^2(C+2)^{2\gamma}}\right)$.

Очевидно, что множество $U_1(g) \notin K_1$. Используя теорему 1, получаем

$$\begin{aligned}
-1 &> \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1+2\alpha\gamma}} \ln \mathbf{P}(X_n \notin K_1) \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1+2\alpha\gamma}} \ln \mathbf{P}(X_n \in U_1(g)) \\
&\geq \lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1+2\alpha\gamma}} \ln \mathbf{P}(X_n(t) \in U_\varepsilon(g)) = -I(g) \\
&= -\frac{b^2}{2}\int_0^1 |g(s)|^{2\gamma} ds \geq -\frac{b^2}{2} 2r(C+2)^{2\gamma} \geq -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Имеем $-1 > \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1+2\alpha\gamma}} \ln \mathbf{P}(X_n \notin K_1) \geq -\frac{1}{2}$, значит, наше предположение неверно и последовательность X_n не является экспоненциально плотной.

2. Л.п.б.у. для решений стохастических уравнений Ито

Рассмотрим последовательность случайных процессов

$$y_n(t) = bn^{1-\alpha(1-\gamma)} \int_0^t \mathrm{sign}(y_n(s))|y_n(s)|^\gamma ds + \frac{1}{n^{\alpha-1/2}} w(t). \tag{14}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\gamma \in (0,1)$, тогда для последовательности y_n возможны следующие 3 режима.*

1) Если $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{1-\gamma}$, то последовательность случайных процессов y_n удовлетворяет л.п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}[0,1],\rho)$ с нормирующей функцией $\psi(n) = n^{1+2\alpha\gamma}$ и функционалом уклонений

$$I(f) = \begin{cases} \frac{b^2}{2}\int_0^1 |f(s)|^{2\gamma} ds, & \text{если } f \in \mathbb{C}_0, \\ \infty, & \text{если } f \notin \mathbb{C}_0. \end{cases}$$

2) Если $\alpha = \frac{1}{1-\gamma}$, то последовательность случайных процессов y_n удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}[0,1],\rho)$ с нормирующей функцией $\psi(n) = n^{\frac{2+2\gamma}{1-\gamma}}$ и функционалом уклонений

$$\hat{I}(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^1 (\dot{f}(s) - b\cdot sign(f(s))|f(s)|^\gamma)^2 ds, & \text{если } f \in \mathbb{AC}_0, \\ \infty, & \text{если } f \notin \mathbb{AC}_0. \end{cases}$$

3) Если $\alpha > \frac{1}{1-\gamma}$, то последовательность случайных процессов y_n удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}[0,1],\rho)$ с нормирующей функцией $\psi(n) = n^{2\alpha-1}$ и функционалом уклонений

$$\tilde{I}(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^1 \dot{f}^2(s) ds, & \text{если } f \in \mathbb{AC}_0, \\ \infty, & \text{если } f \notin \mathbb{AC}_0. \end{cases}$$

Доказательство. Легко показать, сделав замену переменной, что случайные процессы $y_n(t)$ и $X_n(t)$ имеют одинаковые распределения, следовательно л.п.б.у. для 1-го режима следует из теоремы 1.

П.б.у. для 2-го режима следует из теоремы 2.2 работы [18].

П.б.у. для 3-го режима следует из теоремы 3.2.1 монографии [19]. $\square$

Пример. Частным случаем решения уравнения типа (14) будет процесс Орнштейна–Уленбека ($\gamma = 1$)

$$y_n(t) = -bn \int_0^t y_n(s)ds + \frac{1}{n^{\alpha-1/2}} w(t),$$

где константа $b > 0$.

Из теоремы 1 следует, что для процесса Орнштейна–Уленбека в рассмотренной постановке возможен только один режим $\alpha > 1/2$. Нормирующей функцией будет $n^{1+2\alpha}$, функционал уклонений будет иметь вид

$$I(f) := \begin{cases} \frac{b^2}{2}\int_0^1 f^2(s)ds, & \text{если } f \in \mathbb{C}_0, \\ \infty, & \text{если } f \notin \mathbb{C}_0. \end{cases}$$

Литература

[1] A. S. Cherny, H. J. Engelbert, *Singular stochastic differential equations*, Berlin, Springer, 2005.

[2] H. J. Engelbert, W. Schmidt, *Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional stochastic differential equations, I, II, III* // Math. Nachr., **143** (1989), 167–184; **144** (1989), 241–281; **151** (1991), 149–197.

[3] А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений*, М.: Наука, 1979, 424 с.

[4] A. Dembo, O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*, Berlin, Springer, 1998.

[5] A. M. Kulik, D. D. Soboleva, *Large deviations for one-dimensional SDE with discontinuous diffusion coefficient* // Theory of Stochastic Processes, **18(34)** (2012), No. 1, 101–10.

[6] T. S. Chiang, S. J. Sheu, *Large deviations of diffusion processes with discontinuous drift and their occupation times* // Ann. Probab., **28** (2000), 140–65.

[7] T. S. Chiang, S. J. Sheu, *Small perturbations of diffusions in inhomogeneous media* // Ann. Inst. Henri Poincaré, **38** (2002), No. 3, 285–18.

[8] I. H. Krykun, *Large deviation principle for stochastic equations with local time* // Theory of Stochastic Processes, **15(31)** (2009), No. 2, 140–55.

[9] A. M. Kulik, D. D. Soboleva, *Large deviation principle for one-dimensional sdes with discontinuous coefficients* // Theory of Stochastic Processes, **18(34)** (2012), No. 2, 102–08.

[10] С. Я. Махно, *Большие уклонения для решений стохастических уравнений* // Теория вероятностей и ее применения, **40** (1995), No. 4, 764–785.

[11] M. I. Freidlin, R. B. Sowers, *Acomparison of homogenization and large deviations, with applications to wavefront propagation* // Stochastic processes and their applications, **82** (1999), No. 1, 23–52.

[12] A. A. Puhalskii, *On some degenerate large deviation problems* // Electronic journal of probability, **9** (2004), 862–886.

[13] Р. Ш. Липцер, П. Чиганский, *Умеренные уклонения для процесса диффузионного типа в случайной среде* // Теория вероятностей и ее применения, **54** (2009), No. 1, 39–62.

[14] A. V. Logachov, *Large deviations for solutions of one dimensional Ito equations* // Theory probability and Mathematical Statistics, **90** (2015), 127–137.

[15] А. А. Боровков, А. А. Могульский, *О принципах больших уклонений в метрических пространствах* // Сиб. матем. журнал, **51** (2010), No. 6, 1251–269.

[16] А. А. Боровков, А. А. Могульский, *Принципы больших уклонений для траекторий случайных блужданий. I* // Теория вероятностей и ее применения, **56** (2011), No. 4, 627–55.

[17] A. Mogulskii, E. Pechersky, A. Yambartsev, *Large deviations for excursions of non-homogeneous Markov processes* // Electronic Communications in Probability, **19** (2014), 1–8.

[18] S. Herrmann, *Phénomène de Peano et grandes déviations* // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Ser. I, Mathematics, **332** (2001), No. 11, 1019–1024.

[19] А. Д. Вентцель, *Предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов*, М.: Наука, 1986, 176 с.

Сведения об авторах

Артем Васильевич Логачёв

Новосибирский государственный университет
Сибирский государственный университет геосистем и технологий
E-Mail: `omboldovskaya@mail.ru`