Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 4, 559 – 574

Оценки параметров модели Самуэльсона с телеграфным трендом

Анна А. Дархота, Сергей А. Мельник

(*Представлена С. Я. Махно*)

Аннотация. В работе построены оценки неизвестных параметров модели Самуэльсона с телеграфным трендом. Для построения оценок применен метод моментов. Доказана сильная состоятельность оценок, построены асимптотические доверительные области для неизвестных параметров.

2010 MSC. 60P05, 60F05, 60G10, 60H10.

Ключевые слова и фразы. Модель Самуэльсона, телеграфная волна, стационарный процесс, эргодический процесс.

1. Введение

В 1965 г. в работе [1] П. Самуэльсоном была предложена модель эволюции стоимости финансового актива:

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)},$$

где $S(t)$ — величина биржевого курса некоторого финансового актива в момент времени t, $W(t)$ — стандартный винеровский процесс со значениями в $\mathbb{R}^1$; μ называют коэффициентом роста, σ — коэффициентом волатильности. Благодаря своей простоте модель Самуэльсона стала популярным объектом исследования, и на ее основе в 1973 г. Ф. Блэк и М. Шоулз провели расчеты стоимостей опционов. Оценивание параметров такой модели не представляет трудностей. Если $S_k = S(t_k)$, то последовательность $\left\{\ln \frac{S_{k+1}}{S_k}\right\}_{k=0}^{\infty}$ является последовательностью независимых гауссовских величин с параметрами $\left(\left(\mu - 0.5\sigma^2\right) h; \sigma^2 h\right)$. Однако, существенным недостатком модели Самуэльсона является постоянство коэффициентов μ и σ, что трудно

Статья поступила в редакцию 17.09.2014
Работа выполнена при поддержке гранта НАНУ-РФФИ № 09-01-14

ISSN 1810 – 3200.

встретить в действительности. Поэтому существует значительное количество моделей, представляющих собой усовершенствования модели Самуэльсона, например, модель диффузии со скачками Мертона [2]. Такая модель использовались в [3] для нахождения стратегии хеджирования наименьшей вариации. Другой тип моделей представлен моделями стохастической вариации, среди которых широко известна модель Гестона [4]. Г.Л. Бухбиндер и К.М. Чистилин построили оценки неизвестных параметров модели Гестона и применили полученные результаты к мониторингу реальных курсов акций российских компаний [5]. Однако, в перечисленных моделях остается постоянным коэффициент роста μ, что не позволяет учитывать возможные смены тренда, наступающие в случайные моменты времени.

В работе [6] была предложена усовершенствованная модель Самуэльсона — модель с телеграфным трендом. Напомним, как выглядит указанная модель. На стохастическом базисе $(\Omega, \Im, \{\Im_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ заданы независимые: процесс Пуассона $\nu(t)$, $t \geq 0$ с параметром $\lambda > 0$, винеровский процесс $W(t)$, а также последовательность независимых случайных величин $\{\eta_k\}_{k=0}^{\infty}$, имеющих нормальное распределение с параметрами $(0;\theta^2)$. Будем говорить, что курс финансового актива меняется согласно модели Самуэльсона с телеграфным трендом, если

$$S(t) = S_0 e^{\mu(t) - \frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma W(t)},$$

где: $S_0 > 0$, $\mu(t) = \int\limits_0^t \eta_{\nu(s)} ds$, $\sigma > 0$. Процесс $\eta_{\nu(s)}$, $s \geq 0$ принято называть обобщённым телеграфным процессом.

Таким образом, тренд финансового актива формируется процессом $\mu(t)$, а случайные колебания курса в окрестности тренда формируются процессом $W(t)$. В отличие от перечисленных выше разновидностей моделей, данная модель учитывает возможность смены тренда в случайные моменты времени (моменты скачков процесса Пуассона $\nu(t)$), что делает модель более адекватной по отношению к реальной динамике курса финансового актива на бирже.

2. Постановка задачи

Введённая выше модель Самуэльсона с телеграфным трендом характеризуется тремя параметрами:

- λ — частота смены направления тренда;
- θ — волатильность угла атаки тренда;
- σ — волатильность курса финансового актива.

В моменты времени $t_k = kh$, $h > 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$ производятся измерения $S_k = S(kh)$, на основе которых формирутся базовая последовательность измерений (БПИ)

$$z_k = \ln \frac{S_{k+1}}{S_k} = \Delta_k \mu - \frac{\sigma^2 h}{2} + \sigma \Delta_k W, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где $\Delta_k \mu = \int\limits_{kh}^{(k+1)h} \eta_{\nu(s)} ds$, $\Delta_k W = W((k+1)h) - W(kh)$.

Необходимо построить оценки параметров λ, θ^2, σ^2, изучить их свойства и построить доверительные области.

3. Оценки параметров λ, θ, σ^2

В работе [6] доказано, что последовательность $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ является стационарной как в широком, так и в узком смысле, а также эргодической по математическому ожиданию и по корреляционной функции. Это позволяет нам строить оценки параметров, основываясь на БПИ.

Оценки параметров λ, θ, σ^2 построим методом моментов. Обозначим через $\bar{z}$ выборочное математическое ожидание и $\bar{R}_z(l)$, $l = 0, 1, \ldots, n-1$ — выборочную корреляционную функцию последовательности $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$. Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} E z_k = \bar{z}, \\ R_z(1) = \bar{R}_z(1), \\ R_z(3) = \bar{R}_z(3), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -\dfrac{\sigma^2 h}{2} = \bar{z}, \\ \dfrac{\theta^2}{\lambda^2}\left(1 - e^{-\lambda h}\right)^2 = \bar{R}_z(1), \\ \dfrac{\theta^2}{\lambda^2}\left(1 - e^{-\lambda h}\right)^2 e^{-2\lambda h} = \bar{R}_z(3). \end{cases}$$

Решив систему уравнений относительно неизвестных λ и θ, получим оценки этих параметров:

$$\sigma^{*2}(n) = -\frac{2}{h}\bar{z}, \tag{3.1}$$

$$\lambda^*(n) = \frac{1}{2h} \ln \frac{\bar{R}_z(1)}{\bar{R}_z(3)}, \tag{3.2}$$

$$\theta^*(n) = \frac{\bar{R}_z(1)}{2h\left(\sqrt{\bar{R}_z(1)} - \sqrt{\bar{R}_z(3)}\right)} \ln \frac{\bar{R}_z(1)}{\bar{R}_z(3)}. \tag{3.3}$$

Может оказаться, что система неразрешима или имеет отрицательное решение. В этом случае положим $\sigma^{*2}(n) = \lambda^*(n) = \theta^*(n) = 0$ (см. [7, с. 76–77]). В силу [6, следствие 2]

$$\lim_{n\to\infty} \bar{z} = -\frac{\sigma^2 h}{2} \tag{3.4}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \bar{R}_z(l) = R_z(l) \tag{3.5}$$

с вероятностью 1. Поэтому найдется номер $n(\omega)$, начиная с которого $\bar{z} < 0$ и $\bar{R}_z(1) > \bar{R}_z(3) > 0$ с вероятностью 1, и мы получим ненулевые оценки.

Изучим свойства полученных оценок. Очевидно, что оценка $\sigma^{*2}(n)$ является несмещенной и состоятельной с вероятностью 1 в силу (3.4).

Теорема 3.1. *Оценка $\sigma^{*2}(n)$ состоятельна в среднем квадратическом.*

Доказательство. Как показано в [6], корреляционная функция последовательности $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ имеет вид:

$$R_z(l) = \begin{cases} R_0 + \sigma^2 h, & l = 0, \\ Re^{-\lambda h|l|}, & l \neq 0, \end{cases}$$

где $R_0 = 2\theta^2\left(\lambda h - 1 + e^{-\lambda h}\right)/\lambda^2$, $R = \theta^2 e^{\lambda h}\left(1 - e^{-\lambda h}\right)^2/\lambda^2$. Имеем

$$\sum_{l=0}^{N} R_z(l) = R_0 + \sigma^2 h + R\frac{e^{-\lambda h(N+1)}}{1 - e^{-\lambda h}}.$$

Так как $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum\limits_{l=0}^{N} R_z(l) = 0$, то, согласно [8, с.430], оценка $\sigma^{*2}(n)$ состоятельна в среднем квадратическом. Теорема 3.1 доказана. □

Теорема 3.2. *Оценки $\lambda^*(n)$ и $\theta^*(n)$ состоятельны с вероятностью 1.*

Доказательство. Оценки $\lambda^*(n)$ и $\theta^*(n)$ как функции от $\bar{R}_z(1)$ и $\bar{R}_z(3)$ непрерывны при $\bar{R}_z(1) > \bar{R}_z(3) > 0$. Из (3.5) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^*(n) = \lambda$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \theta^*(n) = \theta$ с вероятностью 1. Теорема 3.2 доказана. □

4. Асимптотический доверительный интервал для σ^2

Чтобы с помощью оценки $\sigma^{*2}(n)$ построить доверительный интервал для σ^2, необходимо знать её закон распределения. Хотя оценка $\sigma^{*2}(n)$ довольно просто устроена, построение ее закона распределения сопряжено с большими трудностями, так как в состав БПИ входит слагаемое $\Delta_k\mu$. Поэтому нашей целью будет построение асимптотических доверительных областей. Для этого нам понадобится следующая теорема.

Теорема 4.1. *Случайные величины* $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(z_k + \frac{\sigma^2 h}{2}\right)$ *сходятся по распределению к величине, имеющей нормальное распределение с параметрами* $\left(0; 2\theta^2 h/\lambda + \sigma^2\right)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся центральной предельной теоремой для стационарных процессов [9, с. 242]. Для последовательности $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ проверим условия теоремы [9, с. 242]:

1) $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ является вполне регулярной:

$$\alpha(l) = \sup_{\substack{A\in\Im_0^{t_k}\\ B\in\Im_{t_{k+l}}^{\infty}}} |P\,(AB) - P\,(A)\,P\,(B)| \to 0$$

при $l\to\infty$, где $\Im_0^{t_k}$ и $\Im_{t_{k+l}}^{\infty}$ — σ–алгебры, порожденные случайными величинами z_m, $m\le k$ и z_m, $m\ge k+l$, соответственно. При этом $\alpha(l) = o(l^{-1-\epsilon})$ при некотором $\epsilon > 0$.

2) $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ имеет моменты достаточно высокого порядка, именно, $Ez_k^{2+\delta} < \infty$ при некотором $\delta > 4/\epsilon$.

3) спектральная плотность $\varphi_z(u)$ последовательности $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ ограничена, непрерывна и невырождена в нуле.

Проверим условие 1. Пусть: $A\in\Im_0^{t_k}$, $B\in\Im_{t_{k+l}}^{\infty}$, $H = \{\nu(t_{k+l+1}) - \nu(t_k) = 0\}$. Тогда

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A|H)P(H) + P(A|\bar H)P(\bar H),\\
P(B) &= P(B|H)P(H) + P(B|\bar H)P(\bar H),\\
P(H) &= e^{-\lambda h(l+1)},
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
P(A\cap B) - P(A)P(B) = {}& P(A\cap B|H)P(H) + P(A\cap B|\bar H)P(\bar H)\\
&- P(A|H)P(B|H)(P(H))^2 - P(A|\bar H)P(B|H)P(H)P(\bar H)\\
&- P(A|H)P(B|\bar H)P(H)P(\bar H) - P(A|\bar H)P(B|\bar H)(P(\bar H))^2.
\end{aligned}$$

Покажем, что $P\left(A\cap B|\bar H\right)=P\left(A|\bar H\right)P\left(B|\bar H\right)$. Действительно, $z_k = \Delta_k\mu-0.5\sigma^2h+\sigma\Delta_kW$, $z_{k+l}=\Delta_{k+l}\mu-0.5\sigma^2h+\sigma\Delta_{k+l}W$, а при условии $\bar H$ величина $\Delta_k\mu$ не зависит от $\Delta_{k-\Delta t}\mu$ в силу независимости величин η_k. Следовательно, события A и B условно независимы.

Получим

$$\begin{aligned}P(A\cap B)-P(A)P(B) &= P(A\cap B|H)e^{-\lambda h(l+1)}\\ &\quad - P(A|H)P(B|H)e^{-2\lambda h(l+1)}\\ &\quad + P(A|\bar H)P(B|\bar H)e^{-\lambda h(l+1)}\left(1-e^{-\lambda h(l+1)}\right)\\ &\quad - P(A|\bar H)P(B|H)e^{-\lambda h(l+1)}\left(1-e^{-\lambda h(l+1)}\right)\\ &\quad - P(A|H)P(B|\bar H)e^{-\lambda h(l+1)}\left(1-e^{-\lambda h(l+1)}\right).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$|P(A\cap B)-P(A)P(B)|<5e^{-\lambda h(l+1)}.$$

Таким образом, условие 1 выполнено.

Условие 2 также выполнено, так как $Ez_k^3=0$.

Проверим выполнение условия 3. Построим спектральную плотность $\varphi_z(u)$ и покажем, что она удовлетворяет условиям теоремы [9, с.242]. Из структуры БПИ следует, что

$$\varphi_z(u)=\varphi_{\Delta\mu}(u)+\sigma^2\varphi_{\Delta W}(u).$$

Последовательность $\{\Delta_kW\}_{k=0}^{\infty}$ является гауссовским белым шумом и согласно [8, с.405] ее спектральная плотность имеет вид:

$$\varphi_{\Delta W}(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & u\in[-\pi;\pi),\\ 0, & u\notin[-\pi;\pi).\end{cases}$$

В [6] показано, что

$$R_{\Delta\mu}(l)=\begin{cases}R_0, & l=0,\\ R, & l\neq 0.\end{cases}$$

Отсюда и из [8, с. 412] следует:

$$\begin{aligned}\varphi_{\Delta\mu}(u)&=\frac{1}{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty}e^{-iul}R_{\Delta\mu}(l)\\ &=\frac{R_0}{2\pi}+\frac{R}{2\pi}\left(\sum_{l=1}^{\infty}e^{-(\lambda h-iu)l}+\sum_{l=1}^{\infty}e^{-(\lambda h+iu)l}\right).\end{aligned}$$

Так как $\left|e^{-\lambda h+iu}\right| = \left|e^{-\lambda h-iu}\right| = e^{-\lambda h} < 1$, то

$$\sum_{l=1}^{\infty} e^{-(\lambda h-iu)l} = \frac{e^{-\lambda h+iu}}{1-e^{-\lambda h+iu}}$$

и

$$\sum_{l=1}^{\infty} e^{-(\lambda h+iu)l} = \frac{e^{-\lambda h-iu}}{1-e^{-\lambda h-iu}}.$$

Далее имеем

$$\varphi_{\Delta\mu}(u) = \frac{R_0-R}{2\pi} + \frac{R}{2\pi}\cdot\frac{1-e^{-2\lambda h}}{\left|1-e^{-iu}e^{-\lambda h}\right|^2}.$$

Таким образом,

$$\varphi_z(u) = \begin{cases} \dfrac{R_0-R+\sigma^2}{2\pi} + \dfrac{R}{2\pi}\cdot\dfrac{1-e^{-2\lambda h}}{\left|1-e^{-iu}e^{-\lambda h}\right|^2}, & u \in [-\pi;\pi), \\ \dfrac{R_0-R}{2\pi} + \dfrac{R}{2\pi}\cdot\dfrac{1-e^{-2\lambda h}}{\left|1-e^{-iu}e^{-\lambda h}\right|^2}, & u \notin [-\pi;\pi). \end{cases}$$

Легко видеть, что $\varphi_z(u)$ ограничена, непрерывна и невырождена в нуле.

Таким образом, условие 3 также выполнено. Таким образом,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(z_k + \frac{\sigma^2 h}{2}\right) \xrightarrow{d} \Phi_{0,2\pi\varphi_z(0)},$$

где $2\pi\varphi_z(0) = 2\theta^2 h/\lambda + \sigma^2$. Теорема 4.1 доказана. □

Построим доверительный интервал для σ^2. Пусть все параметры неизвестны. В силу теоремы 4.1

$$\sqrt{n}\left(\sigma^{*2}(n) - \sigma^2\right) \xrightarrow{d} \Phi_{0,V(\sigma^2,\lambda,\theta)},$$

где $V(\sigma^2,\lambda,\theta) = 8\theta^2/\lambda h + 4\sigma^2/h^2$. Согласно [7, с.316]

$$\frac{\sqrt{n}\left(\sigma^{*2}(n) - \sigma^2\right)}{\sqrt{V(\sigma^{*2},\lambda^*,\theta^*)}} \xrightarrow{d} \Phi_{0,1}.$$

Таким образом, доверительный интервал для σ^2 будет следующим:

$$\sigma^{2\pm} = -\frac{2\bar{z}}{h} \pm \frac{2u_\gamma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{h^2}\left(\frac{\bar{R}(1)}{\sqrt{\bar{R}(1)}-\sqrt{\bar{R}(3)}}\right)^2 \ln\frac{\bar{R}(1)}{\bar{R}(3)} - \frac{2\bar{z}}{h^3}},$$

где u_γ — квантиль уровня $\gamma \approx 1$ распределения $\Phi_{0,1}$.

5. Асимптотическая доверительная область для λ, θ^2

Рассмотрим последовательность $\{\zeta_k(l)\}_{k=0}^{\infty} = \{\mathring{z}_k \mathring{z}_{k+l}\}_{k=0}^{\infty}$, где $\mathring{z}_k = z_k - Ez_k$, $l \in \mathbb{Z}^+$.

Лемма 5.1. *Последовательность* $\{\zeta_k(l)\}_{k=0}^{\infty}$ *стационарна в узком смысле и эргодична по математическому ожиданию при каждом* $l = 0, 1, \ldots$.

Доказательство. Рассмотрим совместное распределение величин $\zeta_{k_1}(l), \ldots, \zeta_{k_n}(l)$:

$$P\left\{\zeta_{k_1}(l) < x_1, \ldots, \zeta_{k_n}(l) < x_n\right\} = P\left\{\mathring{z}_{k_1}\mathring{z}_{k_1+l} < x_1, \ldots, \mathring{z}_{k_n}\mathring{z}_{k_n+l} < x_n\right\}.$$

Так как последовательность $\{\mathring{z}_k\}_{k=0}^{\infty}$ стационарна в узком смысле, то для любого $m \in \mathbb{Z}^+$ верно равенство:

$$\begin{aligned} &P\left\{\mathring{z}_{k_1}\mathring{z}_{k_1+l} < x_1, \ldots, \mathring{z}_{k_n}\mathring{z}_{k_n+l} < x_n\right\} \\ &= P\left\{\mathring{z}_{k_1+m}\mathring{z}_{k_1+l+m} < x_1, \ldots, \mathring{z}_{k_n+m}\mathring{z}_{k_n+l+m} < x_n\right\} \\ &= P\left\{\zeta_{k_1+m}(l) < x_1, \ldots, \zeta_{k_n+m}(l) < x_n\right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\{\zeta_k(l)\}_{k=0}^{\infty}$ стационарна в узком смысле. Эргодичность по математическому ожиданию следует из [6, теорема 4]. Лемма 5.1 доказана. □

Теперь найдем совместное асимптотическое распределение случайных величин

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{k=0}^{n-2}\zeta_k(1) - \sqrt{n-1}E\zeta_k(1) \text{ и } \frac{1}{\sqrt{n-3}}\sum_{k=0}^{n-4}\zeta_k(3) - \sqrt{n-3}E\zeta_k(3).$$

Рассмотрим двумерный процесс $\{Z_k\}_{k=0}^{\infty} = \{\zeta_k(1), \zeta_k(3)\}_{k=0}^{\infty}$ и найдем его спектральную плотность $\varphi_Z(u)$. Для этого построим вначале матричную корреляционную функцию $R_Z(l) = \{R_{pq}(l)\}_{p=1;2}^{q=1;2}$. Заметим, что корреляционная матрица обладает свойством $R_Z(l) = R_Z^T(-l)$, поэтому достаточно определить ее элементы при $l \geq 0$.

Получим:

$$\begin{aligned} R_{11}(0) = &\frac{8\sigma^4}{\lambda^2}\left(\frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda h}\right) - he^{-\lambda h}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{2\sigma^2}{\lambda}\left(h - \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda h}\right)\right) + \sigma^2 h\right)^2 - \frac{\sigma^4}{\lambda^4}\left(1 - e^{-\lambda h}\right)^4; \end{aligned}$$

$$R_{11}(1)=\frac{2\theta^4h^2}{\lambda^2}e^{-\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2+\frac{2\theta^4}{\lambda^3}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2\left(\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda h}\right)-he^{-\lambda h}\right)-\frac{\theta^4}{\lambda^4}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^4;$$

$$R_{11}(l)=\frac{2\theta^4h^2}{\lambda^2}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2e^{-\lambda hl},\quad l\geq 2;$$

$$R_{12}(0)=\frac{4\theta^4h}{\lambda^2}e^{-2\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda h}\right)-he^{-\lambda h}\right)+\frac{2\theta^4}{\lambda^3}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2e^{-\lambda h}\left(h-\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda h}\right)\right)-\frac{\theta^4}{\lambda^4}e^{-2\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^4;$$

$$R_{12}(1)=\frac{2\theta^4h^2}{\lambda^2}e^{-3\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2-\frac{2\theta^4}{\lambda^3}e^{-2\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2\left(\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda h}\right)-he^{-\lambda h}\right)-\frac{\theta^4}{\lambda^4}e^{-2\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^4;$$

$$R_{12}(l)=\frac{2\theta^4h^2}{\lambda^2}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2e^{-2\lambda h}e^{-\lambda hl},\quad l\geq 2;$$

$$R_{21}(0)=R_{12}(0);$$

$$R_{21}(1)=\frac{2\theta^4h^2}{\lambda^2}e^{-2\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2+\frac{\theta^4}{\lambda^4}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^4\left(1-e^{-2\lambda h}\right);$$

$$R_{21}(2)=\frac{4\theta^4h}{\lambda^2}e^{-2\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda h}\right)-he^{-\lambda h}\right)+\frac{2\theta^4}{\lambda^3}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2e^{-\lambda h}\left(h-\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda h}\right)\right)-\frac{\theta^4}{\lambda^4}e^{-2\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^4;$$

$$R_{21}(3)=\frac{2\theta^4h^2}{\lambda^2}e^{-3\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2$$
$$+\frac{2\theta^4}{\lambda^3}e^{-2\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2\left(\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda h}\right)-he^{-\lambda h}\right)$$
$$-\frac{\theta^4}{\lambda^4}e^{-2\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^4;$$

$$R_{21}(l)=\frac{2\theta^4h^2}{\lambda^2}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2e^{-\lambda hl},\quad l\geq 4;$$

$$R_{22}(0)=\frac{8\theta^4}{\lambda^2}e^{-2\lambda h}\left(\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda h}\right)-he^{-\lambda h}\right)^2$$
$$+\left(\frac{2\theta^2}{\lambda}\left(h-\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda h}\right)\right)+\sigma^2h\right)^2-\frac{\theta^4}{\lambda^4}e^{-4\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^4;$$
$$R_{22}(1)=\frac{2\theta^4h^2}{\lambda^2}e^{-3\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2+\frac{\theta^4}{\lambda^4}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^4\left(1-e^{-4\lambda h}\right);$$

$$R_{22}(2)=\frac{2\theta^4h^2}{\lambda^2}e^{-4\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2+\frac{\theta^4}{\lambda^4}e^{-2\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^4\left(1-e^{-2\lambda h}\right);$$

$$R_{22}(3)=\frac{2\theta^4h^2}{\lambda^2}e^{-5\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2$$
$$+\frac{2\theta^4}{\lambda^3}e^{-4\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2\left(\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda h})-he^{-\lambda h}\right)$$
$$-\frac{\theta^4}{\lambda^4}e^{-4\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^4;$$

$$R_{22}(l)=\frac{2\theta^4h^2}{\lambda^2}e^{-2\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2e^{-\lambda hl},\quad l\geq 4.$$

При помощи равенства $\varphi_{pq}(u)=\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty}e^{-iul}R_{pq}(l)$ найдем элементы матрицы спектральной плотности $\varphi_Z(u)=\{\varphi_{pq}(u)\}_{p=1;2}^{q=1;2}$:

$$\varphi_{11}(u)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\theta^4h^2}{\lambda^2}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2\left(\frac{e^{2iu}e^{-2\lambda h}}{1-e^{iu}e^{-\lambda h}}+\frac{e^{-2iu}e^{-2\lambda h}}{1-e^{-iu}e^{-\lambda h}}\right)\right.$$
$$\left.+R_{11}(0)+2R_{11}(1)\cos u\right];$$

$$\varphi_{12}(u)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\theta^4h^2}{\lambda^2}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2\left(\frac{e^{4iu}e^{-4\lambda h}}{1-e^{iu}e^{-\lambda h}}+\frac{e^{-2iu}e^{-4\lambda h}}{1-e^{-iu}e^{-\lambda h}}\right)\right.$$
$$\left.+e^{iu}R_{21}(1)+e^{2iu}R_{21}(2)+e^{3iu}R_{21}(3)+R_{12}(0)+e^{-iu}R_{12}(1)\right];$$

$$\varphi_{21}(u)=\varphi_{12}(-u);$$

$$\varphi_{22}(u)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\theta^4h^2}{\lambda^2}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2\left(\frac{e^{4iu}e^{-6\lambda h}}{1-e^{iu}e^{-\lambda h}}+\frac{e^{-4iu}e^{-6\lambda h}}{1-e^{-iu}e^{-\lambda h}}\right)\right.$$
$$+R_{22}(0)+\left(e^{iu}+e^{-iu}\right)R_{22}(1)+\left(e^{2iu}+e^{-2iu}\right)R_{22}(2)$$
$$\left.+\left(e^{3iu}+e^{-3iu}\right)R_{22}(3)\right].$$

Теперь докажем центральную предельную теорему.

Теорема 5.1. *Случайный вектор*

$$\vec{Z}(n)=\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{k=0}^{n-2}\zeta_k(1)-\sqrt{n-1}E\zeta_k(1)\,;\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{n-3}}\sum_{k=0}^{n-4}\zeta_k(3)-\sqrt{n-3}E\zeta_k(3)\right)$$

имеет асимптотически нормальное распределение с параметрами $(0;2\pi\varphi_Z(0))$.

Доказательство. Покажем, что к процессу $\{Z_k\}_{k=0}^{\infty}$ применима теорема [9, с.242]. Условия 1 и 2 для $\{Z_k\}_{k=0}^{\infty}$ проверяются так же, как и при доказательстве теоремы 4.1.

Проверим выполнение условия 3. Так как $1-e^{-iu}e^{-\lambda h}$ отлично от нуля при $u\in[-\pi;\pi]$, то спектральная плотность $\varphi_Z(u)$ непрерывна и ограничена. Покажем теперь, что $\det\varphi_Z(0)\neq 0$. Найдем $\varphi_{pq}(0)$, $p,q=1;2$.

$$\varphi_{11}(0)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{4\theta^4h^2}{\lambda^2}e^{-\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)+\frac{8\theta^4}{\lambda^2}\left(\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda h}\right)-he^{-\lambda h}\right)^2\right.$$
$$+\left(\frac{2\theta^2}{\lambda}\left(h-\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda h}\right)\right)+\sigma^2h\right)^2+\frac{4\theta^4}{\lambda^3}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda h}\right)-he^{-\lambda h}\right)-\frac{3\theta^4}{\lambda^4}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^4\right];$$

$$\varphi_{12}(0) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{8\theta^4 h}{\lambda^2}e^{-2\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda h}\right)-he^{-\lambda h}\right)\right.$$
$$+\frac{4\theta^4}{\lambda^3}e^{-\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2\left(h-\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda h}\right)\right)$$
$$\left.+\frac{2\theta^4 h^2}{\lambda^2}e^{-2\lambda h}\left(1-e^{-2\lambda h}\right)+\frac{\theta^4}{\lambda^4}\left(1-5e^{-2\lambda h}\right)\left(1-e^{-\lambda h}\right)^4\right];$$

$$\varphi_{21}(0) = \varphi_{12}(0);$$

$$\varphi_{22}(0)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{4\theta^4 h^2}{\lambda^2}e^{-3\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)+\frac{8\theta^4}{\lambda^2}e^{-2\lambda h}\left(\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda h}\right)-he^{-\lambda h}\right)^2\right.$$
$$+\left(\frac{2\theta^2}{\lambda}\left(h-\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda h}\right)\right)+\sigma^2 h\right)^2$$
$$+\frac{4\theta^4}{\lambda^3}e^{-4\lambda h}\left(1-e^{-\lambda h}\right)^2\left(\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda h}\right)\right.$$
$$\left.\left.-he^{-\lambda h}\right)+\frac{\theta^4}{\lambda^4}\left(2+2e^{-2\lambda h}-7e^{-4\lambda h}\right)\left(1-e^{-\lambda h}\right)^4\right].$$

Докажем, что $\det\varphi_Z(0) > 0$. Заметим, что $\det\varphi_Z(0) > \det\tilde{\varphi}_Z(0) = \tilde{\varphi}_{11}(0)\tilde{\varphi}_{22}(0) - \varphi_{12}^2(0)$, где $\tilde{\varphi}_{11}(0)$ и $\tilde{\varphi}_{22}(0)$ – значения $\varphi_{11}(0)$ и $\varphi_{22}(0)$ при $\sigma = 0$. Поэтому достаточно показать, что $\det\tilde{\varphi}_Z(0) > 0$. Для краткости положим $h = 1$ и обозначим $v = e^{\lambda} - 1$. Тогда

$$\frac{2\pi\lambda^4}{\theta^4}e^{4\lambda}\tilde{\varphi}_{11}(0) = 4(v+1)^2(v^2+3v+3)\lambda^2 - 4v(v+1)(2v^2+9v+6)\lambda$$
$$+12v^2(v+1)^2+4v^3(v+1)-3v^4;$$

$$\frac{2\pi\lambda^4}{\theta^4}e^{6\lambda}\varphi_{12}(0) = 2v(v+1)^2(v-2)\lambda^2+4v^2(v+1)^2(v+3)\lambda+$$
$$+v^3(v^3-2v^2-12v-4);$$

$$\frac{2\pi\lambda^4}{\theta^4}e^{8\lambda}\tilde{\varphi}_{22}(0) = 4(v+1)^4(v+2+(v+1)^4)\lambda^2 - 4v(v+1)(4(v+1)^3$$
$$+2(v+1)^6+v)\lambda+8v^2(v+1)^4+4v^2(v+1)^6$$
$$+4v^3(v+1)+v^4(2(v+1)^4+2(v+1)^2-7).$$

Обозначим $D(\lambda) = \frac{4\pi^2\lambda^8}{\theta^8}e^{12\lambda}\det\tilde{\varphi}_Z(0)$ и рассмотрим $D'(\lambda)$ — производную этой функции по переменной λ.

$$\begin{aligned}
D'(\lambda) = {} & 120\lambda^5 + 288\lambda^4 + (920\lambda^5 + 2016\lambda^4 - 1152\lambda^3)v \\
& + (3104\lambda^5 + 6296\lambda^4 - 8760\lambda^3 + 1728\lambda^2)v^2 \\
& + (6228\lambda^5 + 12728\lambda^4 - 29472\lambda^3 + 13104\lambda^2 - 1152\lambda)v^3 \\
& + (8420\lambda^5 + 20108\lambda^4 - 61266\lambda^3 + 42728\lambda^2 - 8592\lambda + 288)v^4 \\
& + (8144\lambda^5 + 25984\lambda^4 - 91118\lambda^3 + 83180\lambda^2 - 26728\lambda + 2112)v^5 \\
& + (5772\lambda^5 + 26264\lambda^4 - 102031\lambda^3 + 111754\lambda^2 - 48172\lambda + 6256)v^6 \\
& + (3016\lambda^5 + 19856\lambda^4 - 85347\lambda^3 + 109484\lambda^2 - 58222\lambda + 10448)v^7 \\
& + (1156\lambda^5 + 42728\lambda^4 - 51835\lambda^3 + 77890\lambda^2 - 49690\lambda + 11426)v^8 \\
& + (312\lambda^5 + 4324\lambda^4 - 22053\lambda^3 + 38828\lambda^2 - 29540\lambda + 8504)v^9 \\
& + (52\lambda^5 + 1164\lambda^4 - 6216\lambda^3 + 12736\lambda^2 - 11608\lambda + 4108)v^{10} \\
& + (4\lambda^5 + 196\lambda^4 - 1046\lambda^3 + 2450\lambda^2 - 2674\lambda + 1176)v^{11} \\
& + (16\lambda^4 - 80\lambda^3 + 210\lambda^2 - 266\lambda + 154)v^{12}.
\end{aligned}$$

Теперь положим $V = (e^\lambda - 1)/\lambda = v/\lambda$ и перепишем $D'(\lambda)$. Получим

$$\begin{aligned}
& D'(\lambda) = 288V^4 - 1152V^3 + 1728V^2 - 1152V + 288+ \\
& + (120V^5 + 2016V^4 - 8760V^3 + 13104V^2 - 8592V + 2112)v \\
& + (920V^5 + 6296V^4 - 29472V^3 + 42728V^2 - 26728V + 6256)v^2 \\
& + (3104V^5 + 12728V^4 - 61266V^3 + 83180V^2 - 48172V + 10448)v^3 \\
& + (6228V^5 + 20108V^4 - 91118V^3 + 111754V^2 - 58222V + 11426)v^4 \\
& + (8420V^5 + 25984V^4 - 102031V^3 + 109484V^2 - 49690V + 8504)v^5 \\
& + (8144V^5 + 26264V^4 - 85347V^3 + 77890V^2 - 29540V + 4108)v^6 \\
& + (5772V^5 + 19856V^4 - 51835V^3 + 38828V^2 - 11608V + 1176)v^7 \\
& + (3016V^5 + 42728V^4 - 22053V^3 + 12736V^2 - 2674V + 154)v^8 \\
& + (1156V^5 + 4324V^4 - 6216V^3 + 2450V^2 - 266V)v^9 \\
& + (312V^5 + 1164V^4 - 1046V^3 + 210V^2)v^{10} \\
& + (52V^5 + 196V^4 - 80V^3)v^{11} \\
& + (4V^5 + 16V^4)v^{12} > 0,
\end{aligned}$$

так как коэффициенты при степенях v строго положительны при $V \in (1; +\infty)$. Это означает, что $D(\lambda)$ строго возрастает. Поскольку $D(0) = 0$, то $D(\lambda) > 0$ при всех значениях $\lambda > 0$.

Таким образом, мы показали, что к процессу $\{Z_k\}_{k=0}^{\infty}$ применима центральная предельная теорема [9, с.242], согласно которой $\vec{Z} \xrightarrow{d} \Phi_{0,2\pi\varphi_Z(0)}$. Теорема 5.1 доказана. $\square$

Отметим, что построение доверительной области в случае, если все три параметра неизвестны, привело бы к необходимости доказать центральную предельную теорему для трехмерного процесса $\{Z_k\}_{k=0}^{\infty} = \{\mathring{z}_k, \zeta_k(1), \zeta_k(3)\}_{k=0}^{\infty}$, где $\zeta_k(l) = (z_k - \bar{z})(z_{k+l} - \bar{z})$. Доказательство невырожденности матрицы спектральной плотности такого процесса еще более затруднительно, чем в предыдущем случае.

Пусть σ^2 известно, а λ и θ неизвестны. Построим асимптотическую доверительную область для вектора $\tau = (\lambda, \theta)^T$. Для этого рассмотрим уравнение

$$\begin{pmatrix} \theta^2(1-e^{-\lambda h})^2/\lambda^2 \\ \theta^2(1-e^{-\lambda h})^2 e^{-2\lambda h}/\lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{R}(1) \\ \bar{R}(3) \end{pmatrix},$$

с помощью которого построены оценки λ^* и θ^*. Обозначим матрицу слева через $G(\tau)$. Из теоремы 5.1 известно, что асимптотической корреляционной матрицей вектора $\left(\sqrt{n}(\bar{R}(1) - R(1), \sqrt{n}(\bar{R}(3) - R(3)\right)$ является матрица $\varphi_Z(0)$. Асимптотическую корреляционную матрицу $Q(\tau)$ для вектора $\tau = (\lambda^*, \theta^*)^T$ найдем по формуле

$$Q = [(G(\tau)')^{-1}]^T \varphi_Z(0) (G(\tau)')^{-1},$$

где $G(\tau)'$ — матрица производных $G(\tau)$ по λ и θ. Подставив в матрицу $Q(\tau)$ значения оценок, получим матрицу $Q(\tau^*)$. Согласно [7, с.325]

$$n(\tau^* - \tau)^T [Q(\tau^*)]^{-1} (\tau^* - \tau) \xrightarrow{d} \chi_2^2.$$

Отсюда следует

$$\lim_{n\to\infty} P\{n(\tau^* - \tau)^T [Q(\tau^*)]^{-1} (\tau^* - \tau) < v_\gamma\} = 1 - \gamma,$$

где v_γ — квантиль уровня γ распределения χ^2 с двумя степенями свободы. Пусть для краткости $Q(\tau^*) = Q^*$. Таким образом, доверительная область для вектора $\tau = (\lambda, \theta)^T$ задается уравнением:

$$(\lambda^* - \lambda)((Q^*)^{-1}_{11}(\lambda^* - \lambda) + (Q^*)^{-1}_{21}(\theta^* - \theta)) + (\theta^* - \theta)((Q^*)^{-1}_{12}(\lambda^* - \lambda)$$
$$+ (Q^*)^{-1}_{22}(\theta^* - \theta)) < \frac{v_\gamma}{n}.$$

Для построения доверительных интервалов для λ и θ воспользуемся тем, что

$$(\tau^* - \tau)^T \sqrt{n} (Q^*)^{-1/2} (\tau^*) \xrightarrow{d} \Phi_{0,E}$$

([7, с.325]). Таким образом,

$$\lambda^{\pm} = \lambda^* \pm \frac{u_\gamma \sqrt{(Q^*)^{-1}_{11}}}{\sqrt{n}},$$

$$\theta^{\pm} = \theta^* \pm \frac{u_\gamma \sqrt{(Q^*)^{-1}_{22}}}{\sqrt{n}}.$$

Применим предложенные методы оценивания к траекториям процесса $S(\tau)$, построенным с помощью компьютерной имитации. Построим БПИ с шагом $h = 1$, продолжительностью 200, 500, 1000 и 2000 измерений. В каждом случае будем рассматривать по 100 различных траекторий, для которых истинные значения параметров равны $\lambda = 0.5$, $\theta = 0.3$, $\sigma^2 = 0.01$. Для доверительных интервалов выбран уровень значимости $\gamma = 0.95$. В таблице 1 представлены выборочное среднее a и выборочная дисперсия s^2 полученных оценок, а также указано m — количество случаев, когда истинное значение параметра не попало в доверительный интервал.

Таблица 1.

	λ			σ^2			θ^2		
n	a	s^2	m	a	s^2	m	a	s^2	m
200	0.4764	0.0221	7	0.0093	$0.4321 \cdot 10^{-3}$	4	0.0828	$0.0988 \cdot 10^{-3}$	6
500	0.5602	0.0074	6	0.0133	$0.2208 \cdot 10^{-3}$	5	0.0792	$0,0332 \cdot 10^{-3}$	5
1000	0.5189	0.0124	5	0.0112	$0.0440 \cdot 10^{-3}$	3	0.0878	$0,0646 \cdot 10^{-3}$	4
2000	0.4844	0.0056	5	0.0102	$0.0886 \cdot 10^{-3}$	4	0.0895	$0,0314 \cdot 10^{-3}$	4

Пример показывает, что для выбранных значений параметров мы можем получить приемлемые оценки параметров (относительные погрешности не превосходят 5%), произведя 1000 и более наблюдений, что означает в среднем 500 и более смен тренда. Доверительные интервалы при этом соответствуют номинальному уровню значимости даже для меньших объемов выборки.

6. Выводы

Для параметров $\lambda, \theta, \sigma^2$ модели Самуэльсона с телеграфным трендом построены оценки, определенные соотношениями (3.1), (3.2), (3.3). Доказана несмещенность, состоятельность с вероятностью 1 и в среднем квадратическом оценки $\sigma^{*2}(n)$, и сильная состоятельность оценок $\lambda^*(n)$ и $\theta^*(n)$. Доказаны теоремы об асимптотической нормальности величин

$$\Theta^{(1)}(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(z_k + \frac{\sigma^2 h}{2} \right), \ \Theta^2(n) = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\mathring{z}_k \mathring{z}_{k+1} - R_z(1) \right),$$

которые использованы для построения доверительных интервалов. Доказано, что почти для каждой траектории наблюдаемого процесса такие интервалы могут быть построены, при условии, что произведено достаточное количество наблюдений. В случае небольшого объема данных оценки и доверительные интервалы могут оказаться довольно неточными, однако, их точность будет возрастать с ростом объема выборки.

Литература

[1] P. A. Samuelson, *Rational theory of warrant pricing* // Industrial Management Review, **6** (1965), 13–31.

[2] R. S. Merton, *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous* // J. Financial Economics, **3** (1976), 125–144.

[3] В. М. Радченко, *Хеджування з найменшою варіацією в пуассонові випадкові моменти* // Теорія ймовірностей та математична статистика, **78** (2008), 159–174.

[4] S. L. Heston, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options* // Rev. Financial Studies, **6** (1993), No. 2, 327–343.

[5] Г. Л. Бухбиндер, К. М. Чистилин, *Описание российского фондового рынка в рамках модели Гестона* // Мат. моделирование, **17** (2005), No. 10, 31–38.

[6] А. А. Хархота, *Свойства модели Самуэльсона с телеграфным трендом* // Труды ИПММ НАН Украины **27** (2013), 217–225.

[7] А. А. Боровков, *Математическая статистика*, М.: Наука, 1984.

[8] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, М.: Наука, 1980.

[9] Ю. А. Розанов, *Стационарные случайные процессы*, М.: Наука, 1990.

Сведения об авторах

Анна Александровна Хархота — Институт прикладной математики и механики НАН Украины
E-Mail: annaharhota@yandex.ru

Сергей Анатольевич Мельник — s.a.melnik@yandex.ua