Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 4, 539 – 558

Обобщенные γ–производящие матрицы

Елена О. Сухорукова

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. Классы правых и левых γ–производящих матриц, играющих важную роль в описании решений вполне неопределенной задачи Нехари, были введены Д. З. Аровым в 80-х. В настоящей работе вводятся классы обобщенных левых и правых γ–производящих матриц. Для м.ф. этих классов доказаны теоремы о факторизации, установлена связь между обобщенными γ–производящими матрицами и обобщенными j_{pq}–внутренними матриц-функциями, рассмотрены подклассы сингулярных, регулярных и сильно-регулярных обобщенных γ–производящих матриц.

Ключевые слова и фразы. γ–производящая матрица, Ганкелев оператор, обобщенный класс Шура, факторизация Крейна–Лангера, преобразование Потапова–Гинзбурга.

1. Введение

Понятие γ–производящей матрицы для единичной окружности $\mathbb{T}$ было введено Д.З. Аровым в [5] в связи с рассмотрением вполне неопределенной задачи Нехари на $\mathbb{T}$ (см. [1, 3, 6]), в случае прямой $\mathbb{R}$ см. [6].

Напомним, что матриц-функция (м.ф.) $\mathfrak{A}(\mu) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{bmatrix}$, в которой $a_{11}(\mu)$ и $a_{22}(\mu)$ блоки порядка $p \times p$ и $q \times q$, соответственно, называется γ–производящей матрицей класса $\mathfrak{M}_r(j_{pq})$, где $j_{pq} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}$, если:

(1) $\mathfrak{A}(\mu)$ измерима на $\mathbb{R}$ и принимает j_{pq}–унитарные значения для п.в. $\mu \in \mathbb{R}$;

(2) $a_{22}(\mu)$ и $a_{11}(\mu)^*$ являются граничными значениями голоморфных м.ф. $a_{22}(\lambda)$ и $a_{11}^{\#}(\lambda)$, таких что a_{22}^{-1} и $(a_{11}^{\#})^{-1}$ являются внешними м.ф. классов Шура $\mathcal{S}^{p\times p}$ и $\mathcal{S}^{q\times q}$, соответственно;

Статья поступила в редакцию 05.12.2015

ISSN 1810 – 3200.

(3) $s_{21} := -a_{22}^{-1}a_{21} \in \mathcal{S}^{q\times p}$.

Как показано в [1, 3], всякое решение вполне неопределенной матричной задачи Нехари представимо в виде

$$f(\mu) = T_{\mathfrak{A}}[s] = (a_{11}(\mu)s(\mu) + a_{12}(\mu))(a_{21}(\mu)s(\mu) + a_{22}(\mu))^{-1}, \quad (1.1)$$

где $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_r(j_{pq})$, а $s(\mu)$ — произвольная м.ф. класса Шура $\mathcal{S}^{p\times q}$.

В [5] установлена связь между классом $\mathfrak{M}_r(j_{pq})$ и классом $\mathcal{U}(j_{pq})$ j_{pq}–внутренних матриц-функций, т.е. мероморфных в $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ $(p+q)\times(p+q)$–матриц-функций $W(\lambda)$, удовлетворяющих условиям

$$j_{pq} - W(\mu)j_{pq}W(\mu)^* = 0 \quad (\text{п.в.}\mu \in \mathbb{R}),$$

$$j_{pq} - W(\lambda)j_{pq}W(\lambda)^* \geq 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C}_+).$$

А именно, пусть $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_r(j_{pq})$ и пусть $\{b_1, b_2\}$ — это один из знаменателей функции $f = T_{\mathfrak{A}}[0]$, т.е. b_1, b_2 — это внутренние м.ф. классов $\mathcal{S}^{p\times p}$ и $\mathcal{S}^{q\times q}$, соответственно, такие что $b_1 f b_2$ принадлежат классу Смирнова $\mathcal{N}_+^{p\times q}$ (см. Определение на стр. 4). При выполнении этих условий матриц-функция

$$W(\mu) = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \mathfrak{A}(\mu) \quad (1.2)$$

принадлежит классу $\mathcal{U}(j_{pq})$, а пара $\{b_1, b_2\}$ является ассоциированной парой для W в смысле Арова (см. [6, Chapter 4.6]).

В настоящей работе вводятся классы $\mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$ и $\mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$ левых и правых обобщенных γ–производящих матриц ($\kappa \in \mathbb{N}$), которые естественно возникают при описании решений проблемы Шура–Такаги (см. [2,8,10]). Для матриц-функций данных классов приводятся определения сингулярных и регулярных м.ф. Кроме того, получены факторизационные теоремы. Установлена связь между обобщенными γ–производящими матрицами класса $\mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$ ($\mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$) и обобщенными j_{pq}–внутренними м.ф. класса $\mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ ($\mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$) вида (1.2). Вводятся определения сингулярных, регулярных и сильно-регулярных м.ф. из классов $\mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$, $\mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$. Получено достаточное условие сильной регулярности м.ф. из классов $\mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$, $\mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$.

2. Предварительные сведения

Всюду в дальнейшем Ω_+ обозначает либо единичный круг $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, либо верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Im\lambda > 0\}$.

$$\rho_\omega(\lambda) = \begin{cases} 1 - \lambda\omega^*, & \text{если } \Omega_+ = \mathbb{D}; \\ -2\pi i(\lambda - \omega^*), & \text{если } \Omega_+ = \mathbb{C}_+. \end{cases}$$

Таким образом, $\Omega_+ = \{\omega \in \mathbb{C} : \rho_\omega(\omega) > 0\}$ и $\Omega_0 = \{\omega \in \mathbb{C} : \rho_\omega(\omega) = 0\}$ является границей Ω_+. Для м.ф. $f(\lambda)$ определим

$$f^{\#}(\lambda) = f(\lambda^\circ)^*, \text{ где } \lambda^\circ = \begin{cases} 1/\lambda^* & : \text{ если } \Omega_+ = \mathbb{D},\ \lambda \neq 0; \\ \lambda^* & : \text{ если } \Omega_+ = \mathbb{C}_+ \end{cases}$$

Обозначим через $\mathfrak{h}_f$ область голоморфности м.ф. f и пусть $\mathfrak{h}_f^{\pm} = \mathfrak{h}_f \cap \Omega_{\pm}$.

Пусть $\kappa \in \mathbb{Z}_+$. Напомним, что эрмитово ядро $\mathsf{K}_\omega(\lambda) : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}^{m\times m}$ имеет κ отрицательных квадратов, если для любого положительного целого n и любого набора $\omega_j \in \Omega$ и $u_j \in \mathbb{C}^m$ $(j = 1, \dots, n)$ матрица

$$(\langle \mathsf{K}_{\omega_j}(\omega_k)u_j, u_k\rangle)_{j,k=1}^n$$

имеет по крайней мере κ отрицательных собственных значений, а при некотором наборе $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega$ и $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{C}^m$ ровно κ отрицательных собственных значений (см. [7, 13]).

Определение 2.1. *[13] Говорят, что мероморфная в Ω_+ $q \times p$ м.ф. s принадлежит обобщенному классу Шура $\mathcal{S}_\kappa^{q\times p}$, если ядро*

$$\Lambda_\omega^s(\lambda) = \frac{I_p - s(\lambda)s(\omega)^*}{\rho_\omega(\lambda)} \tag{2.1}$$

имеет κ отрицательных квадратов в $\mathfrak{h}_s^+ \times \mathfrak{h}_s^+$.

В частности, класс $\mathcal{S}_0^{q\times p}$ совпадает с классом Шура $\mathcal{S}^{q\times p}$ голоморфных в Ω_+ и сжимающих $q \times p$ матриц-функций.

Как показано в [13], любая м.ф. $s \in \mathcal{S}_\kappa^{q\times p}$ допускает факторизацию вида

$$s(\lambda) = b_\ell(\lambda)^{-1} s_\ell(\lambda), \quad \lambda \in \mathfrak{h}_s^+, \tag{2.2}$$

где $b_\ell \in \mathcal{S}^{q\times q}$ — произведение Бляшке–Потапова степени κ, s_ℓ — функция класса Шура $\mathcal{S}^{q\times p}$ и

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} b_\ell(\lambda) & s_\ell(\lambda) \end{bmatrix} = q \quad (\lambda \in \Omega_+). \tag{2.3}$$

Представление (2.2) называется *левой факторизацией Крейна–Лангера.* Аналогично, любая функция s обобщенного класса Шура $\mathcal{S}_\kappa^{q\times p}$ допускает *правую факторизацию Крейна–Лангера*

$$s(\lambda) = s_r(\lambda) b_r(\lambda)^{-1} \quad \text{для } \lambda \in \mathfrak{h}_s^+, \tag{2.4}$$

где $b_r \in \mathcal{S}^{p\times p}$ — произведения Бляшке–Потапова степени κ, $s_r \in \mathcal{S}^{q\times p}$ и

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} b_r(\lambda)^* & s_r(\lambda)^* \end{bmatrix} = p \quad (\lambda \in \Omega_+). \tag{2.5}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие классы матриц-функций:

$H_\infty^{p\times q}$ — класс Харди голоморфных, ограниченных в Ω_+ $p\times q$ м.ф.;

$L_\infty^{p\times q}$ — класс измеримых, ограниченных п.в. м.ф. с нормой

$$\|f\| = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_+} |f|,$$

$$\widetilde{L}_1^{p\times q} = \begin{cases} L_1^{p\times q}(\Omega_0) & \text{если} \quad \Omega_+ = \mathbb{D}; \\ \{f : (1+|\mu|^2)^{-1} f \in L_1^{p\times q}(\Omega_0)\} & \text{если} \quad \Omega_+ = \Pi_+. \end{cases}$$

$\mathcal{S}_{in}^{p\times q} = \{s \in \mathcal{S}^{p\times q} : s(\mu)^* s(\mu) = I_p \text{ п.в. на } \Omega_0\};$

$\mathcal{S}_{out}^{p\times q} = \{s \in \mathcal{S}^{p\times q} : \overline{sH_2^q} = H_2^p\}, \quad \mathcal{S}_{out} = \mathcal{S}_{out}^{1\times 1};$

$\mathcal{N}^{p\times q} = \{f = h^{-1} g : g \in H_\infty^{p\times q}, h \in H_\infty\};$

$\mathcal{N}_+^{p\times q} = \{f = h^{-1} g : g \in H_\infty^{p\times q}(\Omega_+), h \in \mathcal{S}_{out}(\Omega_+)\};$

$\mathcal{N}_{out}^{p\times q} = \{f = h^{-1} g : g \in \mathcal{S}_{out}^{p\times q}, h \in \mathcal{S}_{out}\}, \quad \mathcal{N}_{out} = \mathcal{N}_{out}^{1\times 1}.$

Определение 2.2. *[9] $m\times m$ матриц-функцию $W(\lambda) = [w_{ij}(\lambda)]_{i,j=1}^2$, мероморфную в Ω_+ относят к классу $\mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ обобщенных j_{pq}–внутренних матриц-функций, если:*

(i) ядро

$$\mathsf{K}_\omega^W(\lambda) = \frac{j_{pq} - W(\lambda) j_{pq} W(\omega)^*}{\rho_\omega(\lambda)} \tag{2.6}$$

имеет κ отрицательных квадратов в $\mathfrak{h}_W^+ \times \mathfrak{h}_W^+$;

(ii) $j_{pq} - W(\mu) j_{pq} W(\mu)^* = 0$ п.в. на Ω_0.

Как известно [4, Th.6.8.], для любой м.ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ блок $w_{22}(\lambda)$ обратим для всех $\lambda \in \mathfrak{h}_W^+$ за исключением может быть κ точек в Ω_+. Таким образом, преобразование Потапова–Гинзбурга

$$S(\lambda) = PG(W) := \begin{bmatrix} w_{11}(\lambda) & w_{12}(\lambda) \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ w_{21}(\lambda) & w_{22}(\lambda) \end{bmatrix}^{-1} \tag{2.7}$$

корректно определено на множестве $\lambda \in \mathfrak{h}_W^+$, на котором $w_{22}(\lambda)$ обратима. Легко видеть, что $S(\lambda)$ принадлежит классу $\mathcal{S}_\kappa^{m\times m}$ и $S(\mu)$ унитарна п.в. на Ω_0 (см. [4, 9]).

Определение 2.3. *[9] Говорят, что $m\times m$ м.ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ принадлежит классу $\mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$, если*

$$s_{21} := -w_{22}^{-1} w_{21} \in \mathcal{S}_\kappa^{q\times p}. \tag{2.8}$$

Пусть $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ и факторизация Крейна–Лангера м.ф. s_{21} представима в виде

$$s_{21}(\lambda) = b_\ell(\lambda)^{-1} s_\ell(\lambda) = s_r(\lambda) b_r(\lambda)^{-1}, \quad (\lambda \in \mathfrak{h}_{s_{21}}^+) \tag{2.9}$$

где $b_\ell \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $b_r \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $s_\ell, s_r \in \mathcal{S}^{q\times p}$. Тогда, как показано в [9], м.ф. $b_\ell s_{22}$ и $s_{11} b_r$ голоморфны в Ω_+ и

$$b_\ell s_{22} \in \mathcal{S}^{q\times q}, \qquad s_{11} b_r \in \mathcal{S}^{p\times p}. \tag{2.10}$$

Определение 2.4. *[9] Рассмотрим внутренне-внешние факторизации матриц-функций $s_{11}b_r$ и $b_\ell s_{22}$*

$$s_{11} b_r = b_1 a_1, \qquad b_\ell s_{22} = a_2 b_2, \tag{2.11}$$

где $b_1 \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $b_2 \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $a_1 \in \mathcal{S}_{out}^{p\times p}$, $a_2 \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q}$. Пара b_1, b_2 внутренних множителей факторизации (2.11) называется правой ассоциированной парой м.ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ и записывается $\{b_1, b_2\} \in ap^r(W)$.

Теорема 2.5. *[9] Пусть $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$, $\{b_1, b_2\} \in ap^r(W)$ и пусть b_ℓ, s_ℓ, b_r, s_r множители, определяемые факторизацией Крейна–Лангера (2.9). Тогда W допускает факторизацию*

$$W = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{-*} & 0 \\ 0 & a_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_r^* & -s_r^* \\ -s_\ell & b_\ell \end{bmatrix} \quad \text{п.в. на } \Omega_0. \tag{2.12}$$

Определение 2.6. *[16] Говорят, что $m \times m$ м.ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ принадлежит классу $\mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$, если*

$$s_{12} := w_{12} w_{22}^{-1} \in \ \mathcal{S}_\kappa^{p\times q}. \tag{2.13}$$

Пусть $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ и факторизация Крейна–Лангера м.ф. s_{12} имеет вид

$$s_{12}(\lambda) = \beta_\ell(\lambda)^{-1} \sigma_\ell(\lambda) = \sigma_r(\lambda) \beta_r(\lambda)^{-1}, \quad (\lambda \in \mathfrak{h}_{s_{12}}^+). \tag{2.14}$$

Тогда, как показано в [16],

$$\beta_\ell s_{11} \in \mathcal{S}^{p\times p} \quad \text{и} \quad s_{22}\beta_r \in \mathcal{S}^{q\times q}. \tag{2.15}$$

Определение 2.7. *[16] Рассмотрим внутренне–внешние факторизации м.ф. $\beta_\ell s_{11}$ и $s_{22}\beta_r$*

$$\beta_\ell s_{11} = \alpha_1 \beta_1, \qquad s_{22}\beta_r = \beta_2 \alpha_2, \tag{2.16}$$

где $\beta_1 \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $\beta_2 \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $\alpha_1 \in \mathcal{S}_{out}^{p\times p}$, $\alpha_2 \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q}$. Пара β_1, β_2 внутренних множителей факторизаций (2.16) называется левой ассоциированной парой м.ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ и записывается $\{\beta_1, \beta_2\} \in ap^\ell(W)$.

Определение 2.8. *[16] Матриц-функция $U \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ называется сингулярной, если $U, U^{-1} \in \mathcal{N}_+^{m\times m}$. Класс сингулярных обобщенных j_{pq}–внутренних м.ф. будем обозначать $\mathcal{U}_{\kappa,S}(j_{pq})$.*

Теорема 2.9. *[16] Пусть $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ и $\{b_1, b_2\} \in ap^r(W)$. W является сингулярной тогда и только тогда, когда $b_1 \equiv const$ и $b_2 \equiv const$.*

Пусть $G(\lambda)$ — мероморфная в Ω_+ $p \times q$ матриц–функция, допускающая расширение Лорана

$$G(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{-k} G_{-k} + \cdots + (\lambda - \lambda_0)^{-1} G_{-1} + G_0 + \cdots \tag{2.17}$$

в окрестности полюса $\lambda_0 \in \Omega_+$. Полюсная кратность $M_\pi(G, \lambda_0)$ определяется следующим образом (см. [13]):

$$M_\pi(G, \lambda_0) = \operatorname{rank} L(G, \lambda_0), \quad L(G, \lambda_0) = \begin{bmatrix} G_{-k} & & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \\ G_{-1} & \dots & G_{-k} \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

Полюсная кратность м.ф. G на Ω_+ определяется как сумма полюсных кратностей $M_\pi(G, \lambda)$ по всем λ из Ω_+, то есть

$$M_\pi(G, \Omega_+) = \sum_{\lambda \in \Omega_+} M_\pi(G, \lambda). \tag{2.19}$$

Нулевую кратность квадратной м.ф. F на Ω_+ определим как:

$$M_\zeta(F, \Omega_+) = M_\pi(F^{-1}, \Omega_+).$$

Теорема 2.10. [12] *Пусть $\varphi \in \mathcal{S}^{q\times q}$ — конечное произведение Бляшке–Потапова и $\psi \in \mathcal{S}^{q\times q}$ — такая м.ф., что* $\det(\varphi + \psi) \not\equiv 0$ *в Ω_+, $M_\zeta(\varphi, \Omega_+) < \infty$ и*

$$\|\varphi(\mu)^{-1}\psi(\mu)\| \le 1 \quad \text{п.в. на } \Omega_0. \tag{2.20}$$

Тогда $M_\zeta(\varphi + \psi, \Omega_+) \le M_\zeta(\varphi, \Omega_+)$. Если к тому же

$$(\varphi + \psi)^{-1} \varphi|_{\Omega_0} \in \widetilde{L}_1^{q\times q}, \tag{2.21}$$

то $M_\zeta(\varphi + \psi, \Omega_+) = M_\zeta(\varphi, \Omega_+)$.

Теорема 2.11. *[9] Пусть $s \in \mathcal{S}_\kappa^{q\times p}$ допускает факторизацию Крейна–Лангера*

$$s = b_\ell^{-1} s_\ell = s_r b_r^{-1}. \tag{2.22}$$

Тогда существует набор м.ф. $c_\ell = c_\ell(s) \in H_\infty^{q\times q}$, $d_\ell = d_\ell(s) \in H_\infty^{p\times q}$, $c_r = c_r(s) \in H_\infty^{p\times p}$ и $d_r = d_r(s) \in H_\infty^{p\times q}$, удовлетворяющих условию

$$\begin{bmatrix} c_r & d_r \\ -s_\ell & b_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_r & -d_\ell \\ s_r & c_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

3. Обобщенные γ–производящие матрицы

Определение 3.1. *Пусть $\mathfrak{M}^r_\kappa(j_{pq})$ обозначает класс матриц-функций $\mathfrak{A}(\mu)$ вида*

$$\mathfrak{A}(\mu) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{bmatrix},$$

удовлетворяющих условиям:

(1) *М.ф. $\mathfrak{A}(\mu)$ измерима и j_{pq}–унитарна на Ω_0;*

(2) *$p\times p$ м.ф. $a^*_{11}(\mu)$ и $q\times q$ м.ф. $a_{22}(\mu)$ обратимы п.в. на Ω_0 и м.ф.*

$$s_{21}(\mu) = -a_{22}(\mu)^{-1}a_{21}(\mu) = -a_{12}(\mu)^*(a_{11}(\mu)^*)^{-1} \tag{3.1}$$

является граничным значением м.ф. $s_{21}(\lambda)$ принадлежащей $\mathcal{S}^{q\times p}_\kappa$;

(3) *$a_1 := (a^\#_{11})^{-1}b_r \in \mathcal{S}^{p\times p}_{out}$, $a_2 := b_\ell a^{-1}_{22} \in \mathcal{S}^{q\times q}_{out}$, где b_ℓ, b_r — произведения Бляшке–Потапова степени κ, определяемые факторизациями Крейна–Лангера* (2.8) *элемента s_{21}.*

Матриц–функции класса $\mathfrak{M}^r_\kappa(j_{pq})$ называются обобщенными правыми γ–производящими матрицами.

Данные матрицы играют важную роль при описании решений обобщенной задачи Шура–Такаги (см. [2, 8, 10]).

Определение 3.2. *Пусть $\mathfrak{M}^\ell_\kappa(j_{pq})$ обозначает класс матриц-функций $\mathfrak{A}(\mu)$ вида*

$$\mathfrak{A}(\mu) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{bmatrix},$$

удовлетворяющих условиям:

(1) *м.ф. $\mathfrak{A}(\mu)$ измерима и j_{pq}–унитарна на Ω_0,*

(2) *$p\times p$ м.ф. $a^*_{11}(\mu)$ и $q\times q$ м.ф. $a_{22}(\mu)$ обратимы п.в. на Ω_0 и м.ф.*

$$s_{12}(\mu) = a_{12}(\mu)a_{22}(\mu)^{-1} = (a_{11}(\mu)^*)^{-1}a_{21}(\mu)^* \tag{3.2}$$

является граничным значением м.ф. $s_{12}(\lambda)$ принадлежащей $\mathcal{S}^{p\times q}_\kappa$;

(3) *$\alpha_1 := \beta_\ell(a^\#_{11})^{-1} \in \mathcal{S}^{p\times p}_{out}$, $\alpha_2 := a^{-1}_{22}\beta_r \in \mathcal{S}^{q\times q}_{out}$, где β_ℓ, β_r — произведения Бляшке–Потапова степени κ, определяемые факторизациями Крейна–Лангера* (2.14) *элемента s_{12}.*

Матриц-функции класса $\mathfrak{M}^{\ell}_{\kappa}(j_{pq})$ называются обобщенными левыми γ–производящими матрицами.

Для формулировки следующей теоремы напомним некоторые определения:

Определение 3.3. *Упорядоченная пара $\{b_1, b_2\}$ внутренних м.ф. $b_1 \in \mathcal{S}^{p\times p}_{in}$, $b_2 \in \mathcal{S}^{q\times q}_{in}$ называется знаменателем м.ф. $f \in \mathcal{N}^{p\times q}$, если $b_1 f b_2 \in \mathcal{N}^{p\times q}_{+}$. Множество знаменателей м.ф. f будем обозначать $den f$.*

Определение 3.4. *Говорят, что $p\times q$ м.ф. f_- в Ω_- является псевдопродолжением м.ф. $f \in \mathcal{N}^{p\times q}$, если $f^{\#} \in \mathcal{N}^{p\times q}$ и*

$$\lim_{\nu\downarrow 0} f_-(\mu - i\nu) = \lim_{\nu\downarrow 0} f_-(\mu + i\nu)(= f(\mu)) \quad \text{п.в. на } \Omega_0.$$

Подкласс м.ф. $f \in \mathcal{N}^{p\times q}$, допускающих псевдопродолжение м.ф. f_- в Ω_- будем обозначать $\Pi^{p\times q}$.

Теорема 3.5. *Пусть $\mathfrak{A} \in \Pi \cap \mathfrak{M}^{r}_{\kappa}(j_{pq})$, пусть c_r, d_r, c_ℓ и d_ℓ такие же как в Теореме 2.11, и пусть*

$$f_0 = (-a_{11}d_\ell + a_{12}c_\ell)a_2. \tag{3.3}$$

Тогда f_0 допускает двойственное представление

$$f_0 = a_1(c_r a^{\#}_{21} - d_r a^{\#}_{22}). \tag{3.4}$$

Если к тому же $\{b_1, b_2\} \in den f_0$ и

$$W(z) = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2^{-1} \end{bmatrix} \mathfrak{A}(z), \tag{3.5}$$

то

$$W \in \mathcal{U}^{r}_{\kappa}(j_{pq}) \quad \text{и} \quad \{b_1, b_2\} \in ap(W). \tag{3.6}$$

Обратно, если (3.6) выполнено, то

$$\mathfrak{A}(z) = \begin{bmatrix} b_1^{-1} & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} W(z) \in \Pi \cap \mathfrak{M}^{r}_{\kappa}(j_{pq}) \quad \text{и} \quad \{b_1, b_2\} \in den(f_0).$$

Замечание 3.6. *Определение 3.1 и доказательство Теоремы 3.5 приведены в [10].*

Как показано в [16] существует набор матриц-функций $\sigma_\ell \in H^{q\times p}_{\infty}$, $\sigma_r \in H^{q\times p}_{\infty}$, $\gamma_\ell \in H^{p\times p}_{\infty}$, $\gamma_r \in H^{q\times q}_{\infty}$, удовлетворяющих тождеству

$$\begin{bmatrix} \beta_\ell & -\sigma_\ell \\ -\delta_r & \gamma_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_\ell & \sigma_r \\ \delta_\ell & \beta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Теорема 3.7. *Пусть* $\mathfrak{A} \in \Pi \cap \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$, *пусть* δ_r, γ_r, δ_ℓ *и* γ_ℓ *определены так же как в* (3.7), *и пусть*

$$f_0^\ell = \alpha_2(-\delta_r a_{11} + \gamma_r a_{21}). \tag{3.8}$$

Тогда f_0^ℓ *допускает двойственное представление*

$$f_0^\ell = (a_{12}^\# \gamma_\ell - a_{22}^\# \delta_\ell)\alpha_1. \tag{3.9}$$

Если в дополнение к этому $\{\beta_2, \beta_1\} \in den f_0^\ell$, $\beta_1 \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $\beta_2 \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$ *и*

$$W(z) = \mathfrak{A}(z)\begin{bmatrix}\beta_1 & 0\\ 0 & \beta_2^{-1}\end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

то

$$W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq}) \quad \text{и} \quad \{\beta_1, \beta_2\} \in ap^\ell(W). \tag{3.11}$$

Обратно, если (3.11) *выполнено, то*

$$\mathfrak{A}(z) = W(z)\begin{bmatrix}\beta_1^{-1} & 0\\ 0 & \beta_2\end{bmatrix} \in \Pi \cap \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq}) \quad \text{и} \quad \{\beta_2, \beta_1\} \in den(f_0^\ell).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} \in \Pi \cap \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$. Рассмотрим тождество

$$-\delta_r a_{12} + \gamma_r a_{22} = \begin{bmatrix}-\delta_r & \gamma_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{12}\\ a_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\delta_r & \gamma_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \beta_r\end{bmatrix}\alpha_2^{-1} = \alpha_2^{-1}. \tag{3.12}$$

Пусть f_0^ℓ определена по формуле (3.8). Следовательно, (3.8) может быть переписано в виде

$$f_0^\ell = (-\delta_r a_{12} + \gamma_r a_{22})^{-1}(-\delta_r a_{11} + \gamma_r a_{21}). \tag{3.13}$$

Тождество

$$\begin{bmatrix}-\delta_r & \gamma_r\end{bmatrix}\mathfrak{A} j_{pq}\mathfrak{A}^\# \begin{bmatrix}\gamma_\ell\\ -\delta_\ell\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\delta_r & \gamma_r\end{bmatrix} j_{pq} \begin{bmatrix}\gamma_\ell\\ -\delta_\ell\end{bmatrix} = 0$$

означает, что

$$(-\delta_r a_{11} + \gamma_r a_{21})(a_{11}^\# \gamma_\ell - a_{21}^\# \delta_\ell) = (-\delta_r a_{12} + \gamma_r a_{22})(a_{12}^\# \gamma_\ell - a_{22}^\# \delta_\ell),$$

и, следовательно, f_0^ℓ допускает двойственное представление

$$f_0^\ell = (a_{12}^\# \gamma_\ell - a_{22}^\# \delta_\ell)(a_{11}^\# \gamma_\ell - a_{21}^\# \delta_\ell)^{-1} = (a_{12}^\# \gamma_\ell - a_{22}^\# \delta_\ell)\alpha_1, \tag{3.14}$$

что совпадает с (3.9).

Пусть $\{\beta_2, \beta_1\} \in den(f_0^\ell)$, т.е.

$$\beta_2 f_0^\ell \beta_2 \in H_\infty^{p\times q} \tag{3.15}$$

и пусть $S = PG(W)$ — преобразование Потапова–Гинзбурга м.ф. W. Формула (3.10) означает что

$$s_{12} = w_{12}w_{22}^{-1} = a_{12}\beta_2^{-1}\beta_2 a_{22}^{-1} = a_{12}a_{22}^{-1} = \beta_\ell^{-1}\sigma_\ell, \tag{3.16}$$

$$s_{22} = w_{22}^{-1} = (a_{22}\beta_2^{-1})^{-1} = \beta_2 a_{22}^{-1}, \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} s_{11} = w_{11}^{-*} &= w_{11}^{-*}\beta_1^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_1\beta_1 \\ &= w_{11}^{-*}\beta_1^{-1}(a_{11}^*\gamma_\ell - a_{21}^*\delta_\ell)\alpha_1\beta_1 \\ &= w_{11}^{-*}(w_{11}^*\gamma_\ell - w_{21}^*\delta_\ell)\alpha_1\beta_1 \\ &= (\gamma_\ell + s_{12}\delta_\ell)\alpha_1\beta_1, \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} s_{21} = w_{12}^* w_{11}^{-*} &= w_{12}^* w_{11}^{-*}\beta_1^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_1\beta_1 \\ &= w_{12}^* w_{11}^{-*}(w_{11}^*\gamma_\ell - w_{21}^*\delta_\ell)\alpha_1\beta_1 \\ &= (w_{12}^*\gamma_\ell - w_{12}w_{11}^{-*}w_{21}^*\delta_\ell)\alpha_1\beta_1 \\ &= (w_{12}^*\gamma_\ell + s_{22}\delta_\ell - w_{22}^*\delta_\ell)\alpha_1\beta_1 \\ &= \beta_2(a_{12}^*\gamma_\ell - a_{22}^*\delta_\ell)\alpha_1\beta_1 + s_{22}\delta_\ell\alpha_1\beta_1 \\ &= \beta_2 f_0^*\beta_1 + s_{22}\delta_\ell\alpha_1\beta_1. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Формулы (3.16)–(3.19) позволяют представить $S(z)$ в виде

$$\begin{aligned} S(z) &= \begin{bmatrix} \gamma_\ell\alpha_1\beta_1 + s_{12}\delta_\ell\alpha_1\beta_1 & s_{12} \\ \beta_2 f_0^\ell\beta_1 + s_{22}\delta_\ell\alpha_1\beta_1 & s_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_\ell\alpha_1\beta_1 & 0 \\ \beta_2 f_0^\ell\beta_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_\ell\alpha_1\beta_1 & I_q \end{bmatrix} \\ &= T(z) + \begin{bmatrix} \sigma_r\beta_r^{-1} \\ \beta_2\alpha_2\beta_r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_\ell\alpha_1\beta_1 & I_q \end{bmatrix} \\ &= T(z) + \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \beta_2\alpha_2 \end{bmatrix} \beta_r^{-1} \begin{bmatrix} \delta_\ell\alpha_1\beta_1 & I_q \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

где $T(z) \in H_\infty^{m\times m}$. Из формул (3.20) следует, что

$$M_\pi(S, \Omega_+) \le \kappa.$$

С другой стороны,

$$M_\pi(s_{21}, \Omega_+) = M_\pi(\sigma_r\beta_r^{-1}, \Omega_+) = \kappa,$$

поэтому

$$M_\pi(S, \Omega_+) = \kappa.$$

Таким образом, $S \in \mathcal{S}_\kappa^{m\times m}$ и значит $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$.

Обратно, пусть $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq}), \{\beta_1, \beta_2\} \in ap^\ell(W)$ и пусть

$$\mathfrak{A}(z) = W(z) \begin{bmatrix} \beta_1^{-1} & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}. \tag{3.21}$$

Тогда м.ф. $\mathfrak{A}(z)$ является измеримой и j_{pq}–унитарной.

Рассмотрим преобразование Потапова–Гинзбурга м.ф. $\mathfrak{A}(z)$

$$s_{12} = a_{12}a_{22}^{-1} = w_{12}\beta_2\beta_2^{-1}w_{22} = w_{12}w_{22} \in \mathcal{S}_\kappa^{p\times q}.$$

Далее, так как $\{\beta_1, \beta_2\} \in ap^\ell(W)$, то

$$a_{22}^{-1}\beta_r = \beta_2^{-1}w_{22}^{-1}\beta_r = \alpha_2 \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q},$$

$$\beta_\ell(a_{11}^{\#})^{-1} = \beta_\ell(w_{11}\beta_1^{-1})^{-\#} = \beta_\ell s_{11}\beta_1 = \alpha_1 \in \mathcal{S}_{out}^{p\times p}.$$

Следовательно, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$.

Покажем, что $\{\beta_2, \beta_1\} \in den(f_0^\ell)$. Это следует из тождества

$$\begin{aligned} \beta_2 f_0^\ell \beta_1 &= \beta_2\alpha_2(-\delta_r a_{11} + \gamma_r a_{21})^{-1}\beta_1 \\ &= \beta_2\alpha_2(-\delta_r w_{11}\beta_1^{-1} + \gamma_r w_{21}\beta_1^{-1})\beta_1 \\ &= \beta_2\alpha_2(-\delta_r w_{11} + \gamma_r w_{21}). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Принадлежность $\beta_2\alpha_2(-\delta_r w_{11} + \gamma_r w_{21}) \in \mathcal{H}_\infty^{q\times p}$ доказана в [16, (3.27)]. □

Следствие 3.8. *Если $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \mathcal{U}_{\kappa,S}^r(j_{pq})$, то $W \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$. Если $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq}) \cap \mathcal{U}_{\kappa,S}^\ell(j_{pq})$, то $W \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$.*

Доказательство. Согласно Теореме 2.9, $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ является сингулярной в том и только том случае, когда ее ассоциированные пары постоянны. Поэтому данная матрица является обобщенной j_{pq}–внутренней и обобщенной γ-производящей м.ф. класса $\mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$ одновременно. □

Лемма 3.9. *Пусть $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \cap L_2^{m\times m}$ и матриц-функция $s_{21} = -a_{22}^{-1}a_{21}$ допускает факторизацию Крейна-Лангера*

$$s_{21}(\lambda) = b_\ell(\lambda)^{-1}s_\ell(\lambda) = s_r(\lambda)b_r(\lambda)^{-1} \quad (\lambda \in \mathfrak{h}_{s_{21}}^+).$$

Тогда для любой м.ф. $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q}$ имеем

$$M_\zeta(b_\ell - s_\ell\varepsilon, \Omega_+) = M_\zeta(b_r - \varepsilon s_r, \Omega_+) = \kappa. \tag{3.23}$$

Доказательство. В силу обобщенной теоремы Руше (Теорема 2.10)

$$M_\zeta(b_\ell - s_\ell\varepsilon, \Omega_+) \le M_\zeta(b_\ell, \Omega_+) = \kappa,$$
$$M_\zeta(b_r - \varepsilon s_r, \Omega_+) \le M_\zeta(b_r, \Omega_+) = \kappa.$$

Доказательство включения $(b_\ell - s_\ell\varepsilon)^{-1} \in \widetilde{L}_1$ содержится в Лемме 4.22 из [9]. Приведем его для полноты изложения.

Пусть $u \in \mathbb{C}^q$ и $\|u\| = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \|(I_q - \varepsilon^* s_{21}^*)u\| &\ge 1 - \|s_{21}^* u\| \ge \frac{1}{2}(1 - \|s_{21}^* u\|^2) \\ &= \frac{1}{2}u^*(I_q - s_{21}s_{21}^*)u = \frac{1}{2}u^* a_{22}^{-1} a_{22}^{-*} u. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Отсюда следует, что

$$\|(I_q - s_{21}\varepsilon)^{-1}\| = \|(I_q - \varepsilon^* s_{21}^*)^{-1}\| \le 2\|a_{22}a_{22}^*\|.$$

Из условия $\mathfrak{A} \in L_2^{m\times m}$ следует, что $(1 - s_{21}\varepsilon)^{-1} \in \widetilde{L}_1^{q\times q}$, следовательно, справедливо первое равенство (3.23). Доказательство второго равенства в (3.23) аналогично. □

Лемма 3.10. *Пусть* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq}) \cap L_2^{m\times m}$ *и матриц-функция* $s_{12} = a_{12}a_{22}^{-1}$ *допускает факторизацию Крейна–Лангера*

$$s_{12}(\lambda) = \beta_\ell(\lambda)^{-1}\sigma_\ell(\lambda) = \sigma_r(\lambda)\beta_r(\lambda)^{-1} \quad (\lambda \in \mathfrak{h}_{s_{21}}^+).$$

Тогда для любой м.ф. $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q}$ *имеем*

$$M_\zeta(\beta_\ell + \varepsilon\sigma_\ell, \Omega_+) = M_\zeta(\beta_r - \sigma_r\varepsilon, \Omega_+) = \kappa. \tag{3.25}$$

Доказательство. Рассмотрим матриц-функцию (см. [16, (3.17)])

$$\widetilde{W}(\lambda) = \begin{cases} W(\overline{\lambda})^*, & \text{if} \quad \Omega_+ = \mathbb{D}, \\ W(-\overline{\lambda})^* & \text{if} \quad \Omega_+ = \mathbb{C}_+. \end{cases} \tag{3.26}$$

Преобразование Потапова–Гинзбурга для $\widetilde{W}$ имеет вид

$$\widehat{S} = PG(\widetilde{W}) = \begin{bmatrix} \widehat{s}_{11} & \widehat{s}_{12} \\ \widehat{s}_{21} & \widehat{s}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{s}_{11} & -\widetilde{s}_{21} \\ -\widetilde{s}_{12} & \widetilde{s}_{22} \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Тогда $\widehat{s}_{21} = -\widetilde{s}_{12} = -\widetilde{\sigma}_\ell\widetilde{\beta}_\ell^{-1} = -\widetilde{\beta}_r^{-1}\widetilde{\sigma}_r$, значит матриц-функция $\widetilde{W}$ принадлежит $\mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$. По Лемме 3.9

$$M_\zeta(\widetilde{\beta}_\ell + \widetilde{\sigma}_\ell\varepsilon) = M_\zeta(\widetilde{\beta}_r + \varepsilon\widetilde{\sigma}_r) = \kappa,$$

и, следовательно,

$$M_\zeta(\beta_\ell + \varepsilon\sigma_\ell) = M_\zeta(\beta_r + \sigma_r\varepsilon) = \kappa.$$

□

4. Сингулярные, регулярные и сильно регулярные м.ф. из классов $\mathfrak{M}^r_\kappa(j_{pq})$ и $\mathfrak{M}^\ell_\kappa(j_{pq})$

Пусть

$$T_{\mathfrak{A}}[\mathcal{S}^{p\times q}] = \{T_{\mathfrak{A}}[\varepsilon] : \varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q}\}.$$

Введем определения

Определение 4.1. *Матриц-функция* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^r_\kappa(j_{pq})$ *называется:*

(1) право-сингулярной, если $T_{\mathfrak{A}}[\mathcal{S}^{p\times q}] \subseteq \mathcal{S}^{p\times q}$*;*

(2) лево-сингулярной, если $T^\ell_{\mathfrak{A}}[\mathcal{S}^{q\times p}] \subseteq \mathcal{S}^{q\times p}$*;*

(3) право-регулярной, если из факторизации $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$*, где множитель* $\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{M}^r_\kappa(j_{pq})$ *и множитель* $\mathfrak{A}_2 \in \mathfrak{M}^r(j_{pq})$ *— право-сингулярный, следует, что* $\mathfrak{A}_2 \equiv const$*;*

(4) сильно право-регулярной, если найдется м.ф $f \in T_{\mathfrak{A}}[\mathcal{S}^{p\times q}]$ *такая, что* $\|f\|_\infty < 1$*;*

(5) лево-регулярной, если из факторизации $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1$*, где множитель* $\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{M}^\ell_\kappa(j_{pq})$ *и множитель* $\mathfrak{A}_2 \in \mathfrak{M}^r(j_{pq})$ *— лево-сингулярный, следует, что* $\mathfrak{A}_2 \equiv const$*;*

(6) сильно лево-регулярной, если найдется м.ф. $f \in T^\ell_{\mathfrak{A}}[\mathcal{S}^{p\times q}]$ *такая, что* $\|f\|_\infty < 1$.

Лемма 4.2. *Пусть* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^r_\kappa(j_{pq})$*, и пусть* $s = s_{21}$ *допускает факторизацию Крейна–Лангера* (2.9)*. Тогда*

$$s \in \mathcal{S}^{q\times p}_\kappa \quad \text{и} \quad \ln\det\{I_q - s_\ell s_\ell^*\} \in \widetilde{L}_1, \quad \ln\det\{I_p - s_r^* s_r\} \in \widetilde{L}_1 \tag{4.1}$$

Обратно, если s *удовлетворяет условиям* (4.1)*, то существует матриц-функция* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^r_\kappa(j_{pq})$*, такая что* $s = -a_{22}^{-1}a_{21}$*. При этом* $\mathfrak{A}$ *определена однозначно с точностью до левого диагонального* j_{pq}*–унитарного множителя формулой*

$$\mathfrak{A}(\mu) = \begin{bmatrix} a_-(\mu) & 0 \\ 0 & a_+(\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_r^* & -s_r^* \\ -s_\ell & b_\ell \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

где a_+ *и* a_- *— существенно единственные решения уравнения*

$$a_+^{-1}a_+^{-*} = I_q - s_\ell s_\ell^*, \quad a_+^{-1} \in \mathcal{S}^{q\times q}_{out}, \tag{4.3}$$

$$a_-^{-1}a_-^{-*} = I_q - s_r^* s_r, \quad a_-^{-\#} \in \mathcal{S}^{p\times p}_{out}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Если $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$, то $s = s_{21} \in \mathcal{S}_\kappa^{q\times p}$. Из j_{pq}–унитарности м.ф. $\mathfrak{A}$ следует

$$a_{21}a_{21}^* - a_{22}a_{22}^* = -I_q,$$

тогда

$$I_q - s_{21}s_{21}^* = a_{22}^{-1}a_{22}^{-*},$$

так как $s_{21} = b_\ell^{-1}s_\ell$, то

$$b_\ell b_\ell^* - s_\ell s_\ell^* = (b_\ell a_{22}^{-1})(a_{22}^{-*}b_\ell^*),$$

$$I_q - s_\ell s_\ell^* = a_2 a_2^*,$$

где $a_2 = a_+^{-1} = b_\ell a_{22}^{-1}$.

Аналогично, из тождества

$$a_{11}a_{11}^* - a_{12}a_{12}^* = I_p$$

и равенства $s_{21} = s_r b_r^{-1}$, получим

$$I_p - (a_{11}^{-1}a_{12})(a_{12}^*a_{11}^{-1}) = a_{11}^{-1}a_{11}^{-*},$$

$$I_p - s^*s = a_{11}^{-1}a_{11}^{-*},$$

$$b_r^*b_r - s_r^*s_r = a_1^*a_1,$$

где $a_1 = a_{11}^{-*}b_r = a_-^{-*}$.

Таким образом, матриц-функции $I_q - s_\ell s_\ell^*$, $I_p - s_r^*s_r$ допускают факторизации (4.3), (4.4) и, следовательно, (см [6, Th 3.78])

$$\ln\det\{I_q - s_\ell s_\ell^*\} \in \widetilde{L}_1, \quad \ln\det\{I_p - s_r^*s_r\} \in \widetilde{L}_1.$$

Обратно, если выполнены условия (4.1), то факторизационные задачи (4.3), (4.4) разрешимы. В силу Теоремы Засухина–Крейна (см. [15, Теорема 14]) существует $a_1 \in \mathcal{S}_{out}^{p\times p}$, $a_2 \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q}$, такие что

$$I_q - s_\ell s_\ell^* = a_2 a_2^*,$$

$$I_p - s_r^*s_r = a_1^*a_1.$$

Если факторизация Крейна–Лангера м.ф. s имеет вид

$$s = b_\ell^{-1}s_\ell = s_r b_r^{-1},$$

то положим

$$a_{11} = a_1^{-1}b_r^*, \quad a_{12} = -a_1^{-*}s_r,$$

$$a_{21} = -a_2^{-1}s_\ell, \quad a_{22} = a_2^{-1}b_\ell.$$

Тогда матрица $\mathfrak{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) \end{bmatrix}$ принадлежит классу $\mathfrak{M}^r_\kappa(j_{pq})$ и допускает факторизацию

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} a_1^{-*} & 0 \\ 0 & a_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_r^* & -s_r^* \\ -s_\ell & b_\ell \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Полагая $a_+ = a_2^{-1}$, $a_- = a_1^{-\#}$ получим (4.2). □

Лемма 4.3. *Пусть* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^\ell_\kappa(j_{pq})$, *и пусть* $s = s_{12}$ *допускает факторизацию Крейна–Лангера* (2.14). *Тогда*

$$s \in \mathcal{S}^{q\times p}_\kappa \quad \text{и} \quad \ln\det\{I_q - \sigma_\ell^*\sigma_\ell\} \in \widetilde{L}_1, \quad \ln\det\{I_p - \sigma_r\sigma_r^*\} \in \widetilde{L}_1 \tag{4.6}$$

Обратно, если s удовлетворяет условиям (4.6), *то существует матриц-функция* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^\ell_\kappa(j_{pq})$, *такая что* $s = a_{12}a_{22}^{-1}$. *При этом* $\mathfrak{A}$ *определена однозначно с точностью до левого диагонального* j_{pq}*–унитарного множителя формулой*

$$\mathfrak{A}(\mu) = \begin{bmatrix} \beta_\ell^* & \sigma_r \\ \sigma_\ell^* & \beta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_-(\mu) & 0 \\ 0 & \alpha_+(\mu) \end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

где α_+ и α_- существенно единственные решения уравнения

$$\alpha_2\alpha_2^* = \alpha_+^{-1}\alpha_+^{-*} = I_q - \sigma_r\sigma_r^*, \quad a_-^{-1} \in \mathcal{S}^{p\times p}_{out}, \tag{4.8}$$

$$\alpha_1^*\alpha_1 = \alpha_-^{-1}\alpha_-^{-*} = I_q - \sigma_\ell^*\sigma_\ell, \quad a_+^{-1} \in \mathcal{S}^{q\times q}_{out}. \tag{4.9}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}^\ell_\kappa(j_{pq})$, $s = s_{12} \in \mathcal{S}^{p\times q}_\kappa$, тогда $\widetilde{\mathfrak{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}^r_\kappa(j_{pq})$ (см. (3.26)), следовательно по Лемме 4.2

$$\ln\det\{I_q - \widetilde{\sigma}_\ell\widetilde{\sigma}_\ell^*\} \in \widetilde{L}_1 \quad \Longrightarrow \quad \ln\det\{I_q - \sigma_\ell^*\sigma_\ell\} \in \widetilde{L}_1, \tag{4.10}$$

$$\ln\det\{I_q - \widetilde{\sigma}_r^*\widetilde{\sigma}_r\} \in \widetilde{L}_1 \quad \Longrightarrow \quad \ln\det\{I_p - \sigma_r\sigma_r^*\} \in \widetilde{L}_1. \tag{4.11}$$

Обратно, пусть выполнены условия (4.6). Тогда разрешимы факторизационные задачи (4.8), (4.9) и существует матриц-функция

$$\widetilde{\mathfrak{A}}(\mu) = \begin{bmatrix} \widetilde{\alpha}_-(\mu) & 0 \\ 0 & \widetilde{\alpha}_+(\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\beta}_\ell^* & \widetilde{\sigma}_\ell^* \\ \widetilde{\sigma}_r & \widetilde{\beta}_r \end{bmatrix},$$

Следовательно, факторизация м.ф. $\mathfrak{A}$ будет иметь вид

$$\mathfrak{A}(\mu) = \begin{bmatrix} \beta_\ell^* & \sigma_r \\ \sigma_\ell^* & \beta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_-(\mu) & 0 \\ 0 & \alpha_+(\mu) \end{bmatrix}.$$

□

Лемма 4.4. *Пусть $b \in \mathcal{S}^{q\times q}$ — множитель Бляшке–Потапова степени κ и $s \in \mathcal{S}^{q\times q}$, то*
$$b - s = \widetilde{b}\widetilde{s},$$
где $\widetilde{b}$ — множитель Бляшке–Потапова степени $\kappa' \le \kappa$, $\widetilde{s} \in \mathcal{N}_{out}$.

Если к тому же $(b-s)^{-1} \in \widetilde{L}_1$, то $\deg \widetilde{b} = \kappa$.

Доказательство. Так как $b - s \in \mathcal{S}^{q\times q}$, то данное выражение допускает внутренне–внешнюю факторизацию
$$b - s = \widetilde{b}\widetilde{s}, \quad \text{где} \quad \widetilde{b} \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}, \widetilde{s} \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q}.$$
Согласно обобщенной Теореме Руше (Теорема 2.10)
$$\kappa' = M_\zeta(\widetilde{b}, \Omega_+) = M_\zeta(b - s, \Omega_+) \le M_\zeta(b, \Omega_+) = \kappa,$$
т.е. $\widetilde{b}$ – множитель Бляшке-Потапова степени $\kappa' \le \kappa$. Более того, если $(b-s)^{-1} \in \widetilde{L}^1$, то $\kappa' = \kappa$. □

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:
$$s_{12}(\mu) = a_{12}(\mu)a_{22}^{-1}(\mu), \quad s_{21}(\mu) = -a_{22}^{-1}(\mu)a_{21}(\mu), \tag{4.12}$$
$$\Delta_r(\mu) = \begin{bmatrix} I_p & -s_{21}(\mu)^* \\ -s_{21}(\mu) & I_q \end{bmatrix}, \quad \Delta_\ell(\mu) = \begin{bmatrix} I_p & s_{12}(\mu) \\ s_{12}(\mu)^* & I_q \end{bmatrix}, \tag{4.13}$$
$$\dot{\mathcal{S}}_{const} = \{A \in \mathbb{C}^{p\times q} : A^*A < I_q\}.$$

Теорема 4.5. *Пусть $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \cup \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$, пусть $m = p + q$ и пусть м.ф. $s_{12}, s_{21}, \Delta_r, \Delta_\ell$ определены по формулам* (4.12) *и* (4.13). *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathfrak{A} \in L_\infty^{m\times m}$;

(2) $\|s_{12}\| < 1$;

(3) $\|s_{21}\| < 1$;

(4) $\Delta_r^{-1} \in L_\infty^{m\times m}$;

(5) $\Delta_\ell^{-1} \in L_\infty^{m\times m}$;

(6) $\|T_{\mathfrak{A}}[\varepsilon]\| < 1$ *для по крайней мере одной матрицы* $\varepsilon \in \mathcal{S}_{const}^{p\times q}$;

(7) $\|T_{\mathfrak{A}}[\varepsilon]\| < 1$ *для любой м.ф.* $\varepsilon \in \dot{\mathcal{S}}_{const}^{p\times q}$.

В дефинитном случае ($\kappa = 0$) доказательство Теоремы 4.5 приведено в [6, Lemma 7.11].

Доказательство. Так как $\mathfrak{A}(\mu)$ является j_{pq}-унитарной почти всюду на Ω_0, блоки $a_{11}(\mu)$, $a_{22}(\mu)$ обратимы п.в. на Ω_0 и выполнены равенства п.в. на Ω_0

$$\begin{aligned} a_{11}(\mu)a_{11}(\mu)^* &= (I_p - s_{12}(\mu)s_{12}(\mu)^*)^{-1}, \\ a_{22}(\mu)^*a_{22}(\mu) &= (I_p - s_{21}(\mu)s_{21}(\mu)^*)^{-1}, \\ a_{22}(\mu)a_{22}(\mu)^* &= (I_p - s_{12}^*(\mu)s_{12}(\mu))^{-1}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Из равенств (4.14) следуют эквивалентности

$$a_{22} \in L_\infty^{p\times q} \Longleftrightarrow \|s_{12}\|_\infty < 1 \Longleftrightarrow a_{22} \in L_\infty^{q\times q} \Longleftrightarrow \|s_{21}\|_\infty < 1.$$

Более того, из условия $a_{22} \in L_\infty^{p\times q}$ следует, что $a_{12} \in L_\infty^{q\times p}$ и $a_{11} \in L_\infty^{p\times p}$, и, следовательно, $a_{21} \in L_\infty^{p\times q}$.

Таким образом, доказаны эквивалентности (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3). Более того, из формулы для дополнения Шура

$$\Delta_\ell(\mu) = \begin{bmatrix} I_p & s_{12}(\mu) \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - s_{12}(\mu)s_{12}(\mu)^* & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ s_{12}(\mu)^* & I_q \end{bmatrix}$$

следует эквивалентность (2) $\Longleftrightarrow$ (5), а из аналогичной формулы для $\Delta_r(\mu)$ следует эквивалентность (3) $\Longleftrightarrow$ (4). Далее, пусть $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q}$ и $f_\varepsilon = T_{\mathfrak{A}}[\varepsilon]$ и предположим, что выполнено (3). Тогда верно тождество

$$I_q - f_\varepsilon^* f_\varepsilon = a_{22}^{-*}b_\ell^*(b_\ell - s_\ell\varepsilon)^{-*}(I_p - \varepsilon^*\varepsilon)(b_\ell - s_\ell\varepsilon)^{-1}b_\ell a_{22}^{-1} \tag{4.15}$$

и, следовательно,

$$\|f_\varepsilon\|_\infty < 1 \Longleftrightarrow \|\varepsilon\| < 1.$$

Таким образом (3) $\Longrightarrow$ (7). Так как импликация (7) $\Longrightarrow$ (6) очевидна, остается проверить (6) $\Longrightarrow$ (1).

Предположим, что выполнено (6) и $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$, то есть, $\|f_\varepsilon\|_\infty < 1$ для некоторой постоянной $p\times q$ сжимающей матрицы ε. Тогда, согласно формуле (4.15), $\|\varepsilon\| < 1$. Таким образом, матрица

$$V_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\varepsilon\varepsilon^*)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (1-\varepsilon^*\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}. \end{bmatrix}$$

является постоянной j_{pq}-внутренней матрицей со свойством $T_{V_\varepsilon}[0] = \varepsilon$.

Положим $\widehat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}V_\varepsilon$ и $\widehat{\mathfrak{A}} = \begin{bmatrix} \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} \\ \widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{22} \end{bmatrix}$. Тогда

$$\widehat{a}_{21} = a_2^{-1}(-s_\ell + b_\ell\varepsilon^*)(1-\varepsilon\varepsilon^*)^{-\frac{1}{2}}, \quad \widehat{a}_{22} = a_2^{-1}(b_\ell - s_\ell\varepsilon)(1-\varepsilon^*\varepsilon)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\widehat{s}_{21} = -\widehat{a}_{22}^{-1}\widehat{a}_{21} = (1-\varepsilon^*\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(b_\ell - s_\ell\varepsilon)^{-1}(-s_\ell + b_\ell\varepsilon^*)(1-\varepsilon\varepsilon^*)^{-\frac{1}{2}}.$$

В силу Леммы 4.4 $M_\pi(b_\ell - s_\ell\varepsilon, \Omega_+) = \kappa$ и, следовательно, справедливо разложение

$$\widehat{a}_{22} = \varphi_{out} b_{in}, \quad b_{in} \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}, \quad \varphi_{out} \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q}.$$

Таким образом,

$$\widehat{a}_{22}^{-1} = b_{in}^{-1}\varphi_{out}^{-1}.$$

Так как $\|a_{22}^{-1}\|_{ess} \le 1$ и $b_{in}\widehat{a}_{22}^{-1} \in \mathcal{N}_{out}^{q\times q}$, то в силу Теоремы Смирнова [6, Th 3.59]

$$\widehat{a} = b_{in} a_{22}^{-1} \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q}.$$

Далее $rank(b_\ell - s_\ell\varepsilon, -s_\ell + b_\ell\varepsilon^*) = q$, поэтому $(b_\ell - s_\ell\varepsilon)^{-1}(-s_\ell + b_\ell\varepsilon^*) \in \mathcal{S}_\kappa^{q\times q}$, следовательно, $\widehat{s}_{21} \in \mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$.

Так как $M_\pi(\widehat{s}_{21}) = M_\pi(\widehat{a}_{22}^{-1}) = \kappa$, то в силу Леммы 4.3 [9]

$$M_\pi(b_{in}\widehat{s}_{21}) = M_\pi(b_{in}\widehat{a}_{22}^{-1}) = 0, \quad \text{т.е.} \quad \widehat{s}_\ell := b_{in}\widehat{s}_{21} \in \mathcal{S}^{q\times p}.$$

Поэтому $\widehat{s}_{21} = b_{in}^{-1}\widehat{s}_\ell$ — факторизация Крейна-Лангера. Следовательно, $\widehat{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$. Кроме того,

$$T_{\widehat{\mathfrak{A}}}[0_{p\times q}] = T_{\mathfrak{A}} = f_\varepsilon,$$

значит $\|T_{\widehat{\mathfrak{A}}}[0_{p\times q}]\| < 1$. Тогда, учитывая импликацию (2) $\Longrightarrow$ (1) для м.ф. $\widehat{\mathfrak{A}}$, получим $\widehat{\mathfrak{A}} \in L_\infty^{m\times m}$ и, следовательно, $\mathfrak{A} \in L_\infty^{m\times m}$, Доказательство импликации (6) $\Longrightarrow$ (1) для $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$ аналогично. □

Следствие 4.6. *Если $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \cap L_\infty^{m\times m}$, то $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_{\kappa,sR}^r(j_{pq})$.*

Если $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq}) \cap L_\infty^{m\times m}$, то $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_{\kappa,sR}^\ell(j_{pq})$.

Доказательство. Если $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \cap L_\infty^{m\times m}$, то по Лемме 4.5 существует $\varepsilon \in \mathcal{S}_{const}^{p\times q}$ такая, что $\|T_{\mathfrak{A}}[\varepsilon]\| < 1$. Положим $f = T_{\mathfrak{A}}[\varepsilon]$. Тогда $\|f\|_\infty < 1$, значит $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_{\kappa,sR}^r(j_{pq})$.

Второе утверждение следует из первого утверждения и следующих эквивалентностей

$$\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq}) \Longleftrightarrow \widetilde{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}),$$

$$\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_{\kappa sR}^\ell(j_{pq}) \Longleftrightarrow \widetilde{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{M}_{\kappa sR}^r(j_{pq}),$$

$$\mathfrak{A} \in L_\infty^{m\times m} \Longleftrightarrow \widetilde{\mathfrak{A}} \in L_\infty^{m\times m}.$$

□

Литература

[1] V. M. Adamjan, D. Z. Arov and M. G. Krein, *Infinite Hankel matrices and generalized problems of Carathodory-Fejr and I. Schur problems* // Funktsional. Anal. i Prilozhen., **2** (1968), No. 4, 1–17.

[2] V. M. Adamyan, D. Z. Arov, M. G. Krein, *Analytic properties of the Schmidt pairs of a Hankel operator and the generalized Schur–Takagi problem* // Matem. Sb. **86** (1971), 34–75.

[3] V. M. Adamjan, *Nondegenerate unitary couplings of semiunitary operators* // Funktsional. Anal. i Prilozhen. **7** (1973), No. 4, 1–16.

[4] D. Alpay, H. Dym, *On applications of reproducing kernel spaces to the Schur algorithm and rational J unitary factorization. I. Schur methods in operator theory and signal processing* // Oper. Theory Adv. Appl., **18** (1986), 89–159.

[5] D. Z. Arov, *γ-generating matrices, j-inner matrix-functions and related extrapolation problems* // Teor. Funktsii Funktsional. Anal. i Prilozhen, I, **51** (1989), 61–67; II, **52** (1989), 103–109; translation in J. Soviet Math. I, **52** (1990), 3487–3491; III, **52** (1990), 3421–3425.

[6] D. Z. Arov, H. Dym, *J-Contractive Matrix Valued Functions and Related Topics* // Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[7] T. Ya. Azizov, I. S. Iokhvidov, *Foundations of the theory of linear operators in spaces with an indefinite metric*, Nauka, Moscow, 1986.

[8] J. A. Ball, I. Gohberg, L. Rodman, *Interpolation of rational matrix functions*, OT45, Birkhäuser Verlag, 1990.

[9] V. A. Derkach, H. Dym, *On linear fractional transformations associated with generalized J-inner matrix functions* // Integ. Eq. Oper. Th., **65** (2009), 1–50.

[10] V. Derkach, O. Sukhorukova, *Generalized γ-generating matrices and Nehari-Takagi problem*, submitted to Operators and Matrices.

[11] A. Kheifets, *On regularization of γ-generating pairs* // J. Funct. Anal. **130** (1995), No. 2, 310–333.

[12] M. G. Krein, H. Langer, *Some propositions of analytic matrix functions related to the theory of operators in the space Π_κ* // Acta Sci. Math. Szeged, **43** (1981), 181–205.

[13] M. G. Krein, H. Langer, *Über die verallgemeinerten Resolventen und die characteristische Function eines isometrischen Operators im Raume Π_κ* // Hilbert space Operators and Operator Algebras (Proc. Intern. Conf., Tihany, 1970); Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, **5** (1972), 353–399.

[14] L. A. Page, *Bounded and compact vectorial Hankel operators* // Trans. Amer. Math. Soc. **150** (1970), 529–539.

[15] Yu. A. Rozanov, *Spectral theory of multi-dimensional stationary processes with discrete time* // Uspekhi Mat. Nauk (N.S.) **13** (1958); translation in Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability, **1** (1961), 253–306.

[16] O. Sukhorukova, *Factorization formulas for some classes of generalized J-inner matrix valued functions* // Methods Funct. Anal. Topology, **20** (2014), No. 4, 365–378.

Сведения об авторах

Елена Олеговна Сухорукова

Национальный педагогический университет имени М. П. Драгоманова,
E-Mail: alena.dn.ua@rambler.ru