Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 4, 437 – 456

# Розв'язність нелокальної крайової задачі для диференціально-операторного рівняння зі слабкою нелінійністю в уточненій шкалі просторів Соболєва

Володимир С. Ільків, Наталія І. Страп

(*Представлена А. Є. Шишковим*)

**Анотація.** Розглянуто нелокальну крайову задачу для диференціального рівняння зі слабкою нелінійністю та з оператором диференціювання $B = (B_1, \dots, B_p)$, де $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \dots, p$. За допомогою ітераційної схеми Неша–Мозера встановлено умови розв'язності даної задачі у гільбертових просторах Хермандера функцій багатьох комплексних змінних, що утворюють уточнену соболєвську шкалу просторів.

**2010 MSC.** 35G30.

**Ключові слова та фрази.** Диференціальні рівняння з частинними похідними, малі знаменники, ітераційна схема Неша–Мозера.

## 1. Вступ

В останні роки зростає зацікавлення задачами для рівнянь з частинними похідними у різних класах функціональних просторів, зокрема у соболєвських просторах [1–4], а також у (гільбертових) просторах Хермандера [5, 6]. Значний науковий інтерес викликає поширення теорії нелокальних крайових задач для рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними з класу просторів Соболєва на клас гільбертових просторів Хермандера, які утворюють уточнену шкалу соболєвських просторів [7, 8].

Особливістю даної роботи є дослідження нелокальної крайової задачі для диференціально-операторного рівняння з нелінійною правою частиною та оператором диференціювання $B = (B_1, \dots, B_p)$, де

*Стаття надійшла в редакцію* 10.01.2016

$B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \ldots, p$, який діє на функції комплексних просторових змінних $z_1, \ldots, z_p$, у просторах Хермандера, що утворюють уточнену соболєвську шкалу. У цих шкалах просторів числовий параметр задає основну гладкість, а функціональний параметр (повільно змінна на нескінченності функція) визначає допоміжну гладкість. Доведення розв'язності задачі проводиться за ітераційною схемою Неша–Мозера [9–11]. Найбільш важливим моментом у цій схемі є отримання оцінок норм у відповідних просторах обернених лінеризованих операторів, які виникають у кожній ітерації. Оцінювання пов'язане з проблемою малих знаменників, яка вирішується за допомогою метричного підходу на множині параметрів задачі.

## 2. Основні позначення та постановка задачі

Нехай $\mathcal{S}$ однозв'язна область проколотої у нулі комплексної площини, а $\mathcal{D}^p$ — циліндрична область $[0, T] \times \mathcal{S}^p$, де $T > 0$, $p \geq 2$.

В області $\mathcal{D}^p$ розглянемо задачу з двоточковими нелокальними умовами для диференціально-операторного рівняння зі сталими коефіцієнтами та нелінійною правою частиною

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)u \equiv \sum_{|\hat{s}| \leq n} a_{\hat{s}} B^s \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = \varepsilon f(u), \qquad (t, z) \in \mathcal{D}^p, \tag{2.1}$$

$$M_m u \equiv \mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=T} = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1, \quad z \in \mathcal{S}^p, \tag{2.2}$$

де $\hat{s} = (s_0, s)$, $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|\hat{s}| = s_0 + s_1 + \ldots + s_p$, $a_{s_0,s} \in \mathbb{C}$ $(a_{n,0} = 1)$, $\varepsilon$, $\mu$ — комплексні параметри, $u = u(t, z)$ — шукана функція, $z = (z_1, \ldots, z_p)$. Оператор $B = (B_1, \ldots, B_p)$ складений з операторів узагальненого диференціювання $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1, \ldots, p$, які мають спільну систему власних функцій $z^k$, де $z^k = z_1^{k_1} \ldots z_p^{k_p}$, $k = (k_1, \ldots, k_p)$, з власними значеннями $k_j$ відповідно. Степені даних операторів стандартно визначаються формулами $B_j^0 u \equiv u$, $B_j^l u = B_j(B_j^{l-1}u)$ $(j = 1, \ldots, p,\ \ l = 1, \ldots, n)$, $B^s = B_1^{s_1} \ldots B_p^{s_p}$.

Розглянемо задачу на власні значення для оператора L, породженого диференціальним виразом $L\Big(\dfrac{\partial}{\partial t}, \dfrac{\partial}{\partial z}\Big)$ і крайовими умовами (2.2) з $\mu \neq 0$, тобто [2]

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)u = \lambda u, \qquad M_m u = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.3}$$

Власними значеннями задачі (2.3) є числа $\lambda_{\hat{k}} = L(\tau(k_0), k)$, де $\tau(k_0) = \dfrac{\ln\mu}{T} + \dfrac{i\ 2\pi k_0}{T}$, $\hat{k} = (k_0, k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^{p+1}$, які утворюють точковий спектр $\sigma_P$ оператора $L$. Власними функціями, що відповідають власному значенню $\lambda_{\hat{k}}$ є функції $\varphi_{\hat{k}^*} = e^{\tau(k_0^*)t} z^{k^*}$, $k^* = (k_1^*, \ldots, k_p^*)$, $\hat{k}^* \in R_{\hat{k}}$ — множина розв'язків у цілих числах $k_0^*$, $k_1^*$, …, $k_p^*$ рівняння $L(\tau(k_0^*), k^*) = L(\tau(k_0), k)$.

Позначимо через $\mathcal{M}_1$ множину всіх повільно змінних за Караматою на $\infty$ функцій, тобто множину таких функцій $\psi$, для яких виконується рівність

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi(\lambda t)}{\psi(t)} = 1 \quad \text{для кожного} \quad \lambda > 0,$$

а через $\mathcal{M}$ — множину всіх вимірних за Борелем на півосі $[1, \infty)$ функцій $\psi\colon [1, \infty) \to (0, \infty)$ з $\mathcal{M}_1$ таких, що функції $\psi$ і $1/\psi$ обмежені на кожному відрізку $[1, b]$, де $1 < b < \infty$.

Нехай для кожного вектора $\hat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}$ число $\breve{k}$ визначає формула $\breve{k} = \sqrt{1 + k_0^2 + k_1^2 + \ldots + k_p^2}$.

Для задачі (2.1), (2.2) на базі власних функцій $\varphi_{\hat{k}}$ оператора L розглянемо простори

$$\mathbf{H}_q^\psi = \Big\{ u(t,z) = \sum_{\hat{k}\in\mathbb{Z}^{p+1}} u_{\hat{k}}\ e^{\tau(k_0)t}\ z^k \colon$$
$$\|u\|_{q,\psi}^2 = \sum_{\hat{k}\in\mathbb{Z}^{p+1}} \breve{k}^{2q} \psi^2(\breve{k}) |u_{\hat{k}}|^2 < +\infty \Big\}, \quad q \in \mathbb{R}, \quad \psi \in \mathcal{M}.$$

У шкалі $\{\mathbf{H}_q^\psi\}_{q\in\mathbb{R},\psi\in\mathcal{M}}$ числовий параметр $q$ задає основну (степеневу) гладкість, а функціональний $\psi = \psi(\breve{k})$ — допоміжну гладкість, тобто параметр $\psi$ уточнює основну гладкість.

Введемо послідовність натуральних чисел $N_q$, $q \in \mathbb{N}$, за формулою $N_q = N_{q-1}^2 = N_0^{2^q}$ з натуральним $N_0 \geq 2$.

Виберемо функцію $\psi_1 \in \mathcal{M}$ так, щоб $\omega_1(2) < \infty$, де функцію $\omega_1 \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ задає формула

$$\omega_1(r) = \sum_{\hat{k}\in\mathbb{Z}^{p+1}} \breve{k}^{-(p+1)} \psi_1^{-r}(\breve{k}).$$

Функції з такими властивостями існують, наприклад $\psi(t) \equiv 1$, а якщо існує $\underbrace{\ln\ldots\ln}_{k} t$, $k \in \mathbb{N}$, то $\psi(t) = (\ln t)^{r_1} (\ln\ln t)^{r_2} \ldots (\underbrace{\ln\ldots\ln}_{k} t)^{r_k}$ при $t > 1$ для дійсних чисел $r_1 \geq 1$, …, $r_k \geq 1$ таких, що $r_1 \ldots r_k > 1$.

Розв'язок задачі (2.1), (2.2) будемо шукати, використовуючи ітераційну схему Неша–Мозера [9–11], у вигляді границі послідовності гладких (аналітичних) функцій зі скінченно-вимірних підпросторів простору $\mathbf{H}_q^{\psi}$.

Для кожного натурального $N$ розіб'ємо простір $\mathbf{H}_q^{\psi}$ у пряму суму $\mathbf{H}_q^{\psi} = \mathbf{W\Psi}^{(N)} \oplus \mathbf{W\Psi}^{(N)\perp}$, відщіпляючи скінченно-вимірний підпростір, де

$$\mathbf{W\Psi}^{(N)} = \{u \in \mathbf{H}_q^{\psi} \colon u = \sum_{\breve{k} \le N} u_{\hat{k}}\ e^{\tau(k_0)t}\ z^k\},$$

$$\mathbf{W\Psi}^{(N)\perp} = \{u \in \mathbf{H}_q^{\psi} \colon u = \sum_{\breve{k} > N} u_{\hat{k}}\ e^{\tau(k_0)t}\ z^k\}.$$

Розмірність простору $\mathbf{W\Psi}^{(N)}$ (дорівнює кількості розв'язків нерівності $k_0^2 + k_1^2 + \ldots + k_p^2 \le N - 1$) має асимптотику $N^{p+1}$.

Позначимо через $\mathrm{P}_N \colon \mathbf{H}_q^{\psi} \to \mathbf{W\Psi}^{(N)}$ і $\mathrm{P}_N^{\perp} \colon \mathbf{H}_q^{\psi} \to \mathbf{W\Psi}^{(N)\perp}$, $N \in \mathbb{N}$, оператори проектування у просторі $\mathbf{H}_q^{\psi}$ на $\mathbf{W\Psi}^{(N)}$ і $\mathbf{W\Psi}^{(N)\perp}$ відповідно, які для довільної функції $u \in \mathbf{H}_q^{\psi}$ визначаються наступними формулами:

$$\mathrm{P}_N\ u = \sum_{\breve{k} \le N} u_{\hat{k}}\ e^{\tau(k_0)t}\ z^k, \qquad \mathrm{P}_N^{\perp}\ u = \sum_{\breve{k} > N} u_{\hat{k}}\ e^{\tau(k_0)t}\ z^k. \tag{2.4}$$

Використовуючи введені позначення, отримаємо, що $\mathbf{W\Psi}^{(N)} = \mathrm{P}_N \mathbf{H}_q^{\psi}$ і $\mathbf{W\Psi}^{(N)\perp} = \mathrm{P}_N^{\perp} \mathbf{H}_q^{\psi}$.

З означень простору $\mathbf{H}_q^{\psi}$ і проектора $\mathrm{P}_N$ випливає, що для будь-яких $N \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$, і функцій $\psi'$ і $\psi''$ з множини $\mathcal{M}$ виконуються нерівності

$$\|\mathrm{P}_N u\|_{q+r,\psi'\psi''} \le N^r \psi''(N) \|u\|_{q,\psi'} \quad \text{для кожної} \quad u \in \mathbf{H}_q^{\psi'}, \tag{2.5}$$

$$\|\mathrm{P}_N^{\perp} u\|_{q,\psi'} \le N^{-r} (\psi''(N))^{-1} \|u\|_{q+r,\psi'\psi''} \ \text{ для кожної } \ u \in \mathbf{H}_{q+r}^{\psi'\psi''}. \tag{2.6}$$

Існування розв'язку задачі (2.1), (2.2) базується на наступних властивостях $(P1)$ – $(P5)$ коефіцієнтів $a_{\hat{s}}$ та функції $f$ з правої частини рівняння, яка, за припущенням, відображає простір $\mathbf{H}_d^{\psi}$ в себе для деякого $d > (p+1)/2$.

Нехай числа $l \ge d + 2$, $c_0 \ge 0$, $c_1 \ge 0$ і $c_2 \ge 0$ такі, що виконуються умови $(P1)$ – $(P4)$.

$(P1)$ $f \in C^2(\mathbf{H}_d^{\psi}; \mathbf{H}_d^{\psi})$, зокрема $f$, $\mathrm{D}_u f$, $\mathrm{D}_u^2 f$ обмежені на кулі $K_1 = \{u \in \mathbf{H}_d^{\psi} \colon \|u\|_{d,\psi} \le 1\}$.

$(P2)$ Для будь-якого $d \le d' < l$ та функції $u \in \mathbf{H}_{d'}^{\psi}$

виконується нерівність $\|f(u)\|_{d',\psi} \le c_0(1+\|u\|_{d',\psi})$.

$(P3)$ Для довільних $u \in \mathbf{H}_d^\psi \cap K_1$ і $h \in \mathbf{H}_d^\psi$ існує таке $\bar{\bar{d}} > d + 2\eta$, $\eta = (p+1-2n)/2$, що $D_u f(u) \in C^1(\mathbf{H}_d^\psi; \mathbf{H}_{\bar{\bar{d}}}^\psi)$ і $\|\mathrm{D}_u f(u)[h]\|_{\bar{\bar{d}},\psi} \le c_1 \|h\|_{d,\psi}$.

$(P4)$ Для будь-якого $d \le d' \le l-2$ та функцій $u \in \mathbf{H}_{d'}^\psi \cap K_1$ і $h \in \mathbf{H}_{d'}^\psi$ справджується нерівність

$$\|f(u+h) - f(u) - \mathrm{D}_u f(u)h\|_{d',\psi} \le c_2(\|u\|_{d',\psi}\|h\|_{d,\psi}^2 + \|h\|_{d,\psi}\|h\|_{d',\psi}).$$

З властивості $(P4)$ випливає, що

$$\|f(u+h) - f(u) - \mathrm{D}_u f(u)h\|_{d,\psi} \le 2c_2\|h\|_{d,\psi}^2.$$

Зокрема, властивості $(P2)$, $(P3)$ і $(P4)$ виконуються для сталих $c_0 = \sup\limits_{d \le d' < l} \sup\limits_{u \in \mathbf{H}_{d'}^\psi} \dfrac{\|f(u)\|_{d',\psi}}{1+\|u\|_{d',\psi}}$, $c_1 = \sup\limits_{\substack{u \in \mathbf{H}_d^\psi \cap K_1 \\ h \in \mathbf{H}_d^\psi}} \dfrac{\|D_u f(u)[h]\|_{\bar{\bar{d}},\psi}}{\|h\|_{d,\psi}}$ та

$$c_2 = \sup_{d \le d' \le l-2} \sup_{\substack{u \in \mathbf{H}_{d'}^\psi \cap K_1 \\ h \in \mathbf{H}_{d'}^\psi}} \frac{\|f(u+h) - f(u) - \mathrm{D}_u f(u)h\|_{d',\psi}}{\|u\|_{d',\psi}\|h\|_{d,\psi}^2 + \|h\|_{d,\psi}\|h\|_{d',\psi}} \text{ відповідно.}$$

Перші чотири властивості характеризують поведінку функції $f$ у кулі $K_1$ простору $\mathbf{H}_d^\psi$.

Для формулювання властивості $(P5)$, яка характеризує коефіцієнти рівняння (2.1), припускаємо, що вони належать кругу $\mathcal{O}_A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < A\}$ радіуса $A > 0$.

Позначимо вектори $\vec{\varepsilon} = (\mathrm{Re}\,\varepsilon, \mathrm{Im}\,\varepsilon)$ і $\vec{a} = (y_1, \dots, y_{2p+2})$, причому $a_{\hat{s}(j)} = y_{2j+1} + i\ y_{2j+2}$, де $y_{2j+1}$ і $y_{2j+2}$ — дійсні числа, $j = 0, 1, \dots, p$, $\hat{s}(j) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{j}, n, 0, \dots, 0)$.

Операцію $L$ розглядатимемо за умови $p \ge 2n$ на множині параметрів $\vec{a} \in \mathcal{O}_A^{p+1}$, а всі інші $a_{\hat{s}}$ вважатимемо фіксованими. Для $\eta = (p+1-2n)/2$, $\gamma > 0$ та вибраної функції $\psi_1$ побудуємо послідовність множин $A\Psi_0$, $A\Psi_1$, …, де $A\Psi_q$ — множина тих векторів $\vec{a}$ з рівняння (2.1), для яких виконується оцінка

$$|L(\tau(k_0), k)| \ge \gamma \breve{k}^{-\eta}\psi_1^{-1}(\breve{k}) \quad \text{при} \quad \breve{k} \le N_q, \quad q = 0, 1, \dots . \tag{2.7}$$

Із задання множин $A\Psi_q$, $q = 0, 1, \dots$, випливають вкладення

$$\dots \subseteq A\Psi_1 \subseteq A\Psi_0 \subset \mathcal{O}_A^{p+1}.$$

З властивостей повільно змінних функцій [5] та означення класу $\mathcal{M}$ випливає існування числа $K = K(\eta) > 1$ такого, що для всіх $x \geq 1$ виконується нерівність

$$\psi_1(x) \leq Kx^{\eta}. \tag{2.8}$$

Введемо відповідні до множин $A\Psi_q$ множини $\mathcal{A}\Psi_q$ формулою $\mathcal{A}\Psi_q = \mathcal{O}_{\varepsilon_0} \times A\Psi_q$, де $q \geq 0$,

$$\varepsilon_0 = \min\left\{\frac{3\gamma}{16c_3}, \frac{\gamma}{2c_3 N_0^{2\eta}}\right\}, \qquad c_3 = K\max\{c_0, c_1, 2c_2\}. \tag{2.9}$$

Для них також очевидними є наступні вкладення:

$$\ldots \subseteq \mathcal{A}\Psi_1 \subseteq \mathcal{A}\Psi_0 \subset \mathcal{O}_{\varepsilon} \times \mathcal{O}_A^{p+1}.$$

**Зауваження 2.1.** Стала $c_3$ є додатньою якщо $c_0 > 0$, зокрема $c_3 \geq Kc_0$. Якщо $c_0 = 0$, то $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ і $\varepsilon_0 = \infty$, тобто $\mathcal{O}_{\varepsilon_0} = \mathbb{C}^2$, але $f = 0$, тому задача (2.1), (2.2) має тривіальний розв'язок. Цей розв'язок єдиний у множині $\mathcal{A}\Psi'_\infty$ векторів $(\vec{\varepsilon}, \vec{a}) \in \mathbb{C}^2 \times \mathcal{O}_A^{p+1}$, для яких $\lambda_{\hat{k}} \neq 0$ для всіх $\hat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}$. Множина $\mathcal{A}\Psi'_\infty$ є щільною у множині $\mathcal{O}_\varepsilon \times \mathcal{O}_A^{p+1}$ параметрів задачі. Аналогічне твердження справедливе для векторів $(\vec{0}, \vec{a}) \in \mathcal{A}\Psi'_\infty$ у випадку довільної функції $f$ з будь-якого простору зі шкали $\{\mathbf{H}_q^{\psi}\}_{q\in\mathbb{R},\psi\in\mathcal{M}}$.

Для довільних функцій $u \in \mathbf{W\Psi}^{(N)}$, $h \in \mathbf{W\Psi}^{(N)}$, $N \in \mathbb{N}$, та параметра $\vec{\varepsilon} \in \mathbb{R}^2$ позначимо

$$\mathcal{L}_N[h] \equiv \mathcal{L}_N(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u)[h] = Lh - \varepsilon \mathrm{P}_N \mathrm{D}_u f(u)h,$$

де $L$ — ліва частина рівняння (2.1), проектор $\mathrm{P}_N$ задає формула (2.4).

Наступна властивість $(P5)$ є властивістю неперервності оператора, оберненого до лінійного оператора

$$\mathcal{L}_{N_q}(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u)\colon \mathbf{W\Psi}^{(N_q)} \to \mathbf{W\Psi}^{(N_q)}.$$

$(P5)$ Для довільних $u \in \mathbf{W\Psi}^{(N_q)} \cap K_1$ та $\gamma > 0$ для всіх $(\vec{\varepsilon}, \vec{a}) \in \mathcal{A}\Psi_q$ оператор $\mathcal{L}_{N_q}(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u) : \mathbf{W\Psi}^{(N_q)} \to \mathbf{W\Psi}^{(N_q)}$ є оборотним, зокрема для $\bar{d} \in [d, \bar{\bar{d}} - 2\eta]$ і $h \in \mathbf{W\Psi}^{(N_q)}$ виконується оцінка

$$\|\mathcal{L}_{N_q}^{-1}(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u)[h]\|_{\bar{d},\psi} \leq \frac{2K}{\gamma} N_q^{2\eta} \|h\|_{\bar{d},\psi}.$$

*Доведення властивості* $(P5)$. Для кожного $q \geq 0$ подамо оператор $\mathcal{L}_{N_q} = \mathfrak{D} - \mathcal{T}_q$ у вигляді

$$\mathcal{L}_{N_q} = |\mathfrak{D}|^{\frac{1}{2}}\mathcal{U}|\mathfrak{D}|^{\frac{1}{2}} - \mathcal{T}_q = |\mathfrak{D}|^{\frac{1}{2}}(\mathcal{U} - \mathcal{R}_1)|\mathfrak{D}|^{\frac{1}{2}} = |\mathfrak{D}|^{\frac{1}{2}}\mathcal{U}(\mathcal{I} - \mathcal{U}^{-1}\mathcal{R}_1)|\mathfrak{D}|^{\frac{1}{2}},$$

де $\mathfrak{D}h = Lh$, $\mathcal{T}_q h = \varepsilon \mathrm{P}_{N_q}\mathrm{D}_u f h$, $\mathcal{R}_1 = |\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}}\mathcal{T}_q|\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}}$ і $\mathcal{U} = |\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{D}|\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}}$.

Оператори $\mathfrak{D}$ і $|\mathfrak{D}|^{\alpha}$, $\alpha \geq 0$, визначені і діють у шкалі просторів $\{\mathbf{H}_q^{\psi}\}_{q\in\mathbb{R},\psi\in\mathcal{M}}$, зокрема, якщо $h = \sum\limits_{\hat{k}\in\mathbb{Z}^{p+1}} h_{\hat{k}}\varphi_{\hat{k}}$, то $\mathfrak{D}h = \sum\limits_{\hat{k}\in\mathbb{Z}^{p+1}} \lambda_{\hat{k}}\, h_{\hat{k}}\, \varphi_{\hat{k}}$ і $|\mathfrak{D}|^{\alpha}h = \sum\limits_{\hat{k}\in\mathbb{Z}^{p+1}} |\lambda_{\hat{k}}|^{\alpha}\, h_{\hat{k}}\, \varphi_{\hat{k}}$.

Для $\alpha < 0$ оператори $|\mathfrak{D}|^{\alpha}$ існують за такої умови: $\lambda_{\hat{k}} \neq 0$ для всіх $\hat{k} \in \mathbb{Z}^{p+1}$. Оператори $\mathfrak{D}$ і $|\mathfrak{D}|^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, у просторі $\mathbf{W\Psi}^{(N_q)}$ представлені діагональними матрицями, мають власні значення $\lambda_{\hat{k}}$ і $|\lambda_{\hat{k}}|^{\alpha}$ відповідно і власні функції $\varphi_{\hat{k}} = e^{\tau(k_0)t}z^k$ при $\breve{k} \leq N_q$.

**Лема 2.1.** *Для всіх векторів* $\vec{a} \in A\Psi_q$ *оператор* $|\mathfrak{D}|$ *є оборотним та для* $\bar{d} \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathcal{M}$ *і для довільної функції* $h \in \mathbf{W\Psi}^{(N_q)}$ *виконується*

$$\big\||\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}}h\big\|_{\bar{d},\psi} \leq \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\|h\|_{\bar{d}+\eta/2,\psi\psi_1^{1/2}} \leq \sqrt{\frac{K}{\gamma}}N_q^{\eta}\|h\|_{\bar{d},\psi},$$

*де* $\psi_1$, $K$, $\eta$ *та* $\gamma$ *— величини з формул* (2.7) *і* (2.8).

Доведення цієї леми наведено нижче у пункті 4.

Для оператора $\mathcal{L}_{N_q}^{-1}$ маємо зображення подібне до зображення оператора $\mathcal{L}_{N_q}$:

$$\mathcal{L}_{N_q}^{-1} = |\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{I} - \mathcal{U}^{-1}\mathcal{R}_1)^{-1}\mathcal{U}^{-1}|\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}} = |\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{I} - \mathcal{R})^{-1}\mathcal{U}^{-1}|\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}},$$

де $\mathcal{R} = \mathcal{U}^{-1}\mathcal{R}_1$ і $(\mathcal{I} - \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{I} + \sum\limits_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{R}^r$. Зображення справедливе за умови збіжності геометричної прогресії.

Норми операторів $\mathcal{U}$ та $\mathcal{R}_1$, що діють у просторах $\mathbf{H}_{\bar{d}}^{\psi}$ для всіх $\bar{d} \in [d, \bar{\bar{d}} - 2\eta]$ і $\psi \in \mathcal{M}$, характеризують наступні леми 2.2 та 2.3.

**Лема 2.2.** *Нехай точковий спектр оператора* $L$ *не містить нуля, тобто* $0 \notin \sigma_P$. *Тоді для будь-яких* $\bar{d} \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathcal{M}$ *оператор* $\mathcal{U}$ *є ізометричним у просторі* $\mathbf{H}_{\bar{d}}^{\psi}$.

**Лема 2.3.** *Для оператора* $\mathcal{R}_1\colon \mathbf{W\Psi}^{(N_q)} \to \mathbf{W\Psi}^{(N_q)}$ *для всіх* $\psi \in \mathcal{M}$, $d \leq \bar{d} \leq \bar{\bar{d}} - 2\eta$ *і* $u \in \mathbf{W\Psi}^{(N_q)}$ *справджується оцінка*

$$\|\mathcal{R}_1 h\|_{\bar{d},\psi} \leq Kc_1\frac{|\varepsilon|}{\gamma}\|h\|_{\bar{d},\psi},$$

*де* $K$ *і* $\gamma$ *— величини з* (2.7) *і* (2.8).

Доведення лем подано у пункті 4.

З формули $\mathcal{R} = \mathcal{U}^{-1}\mathcal{R}_1$ і лем 2.1 та 2.2 для всіх $d \le \bar{d} \le \bar{\bar{d}} - 2\eta$, $\psi \in \mathcal{M}$ отримаємо, що

$$\|\mathcal{R}h\|_{\bar{d},\psi} = \|\mathcal{U}^{-1}\mathcal{R}_1 h\|_{\bar{d},\psi} = \|\mathcal{R}_1 h\|_{\bar{d},\psi} \le Kc_1\frac{|\varepsilon|}{\gamma}\|h\|_{\bar{d},\psi}.$$

Запишемо оцінку $\|(I-\mathcal{R})^{-1}h\|_{\bar{d},\psi} \le \|h\|_{\bar{d},\psi} + \sum\limits_{r\in\mathbb{N}} \|\mathcal{R}^r h\|_{\bar{d},\psi}$, де

$$\|\mathcal{R}^r h\|_{\bar{d},\psi} = \|\mathcal{R}(\mathcal{R}^{r-1})h\|_{\bar{d},\psi} \le Kc_1\frac{|\varepsilon|}{\gamma}\|\mathcal{R}^{r-1}h\|_{\bar{d},\psi} \le \Big(Kc_1\frac{|\varepsilon|}{\gamma}\Big)^r\|h\|_{\bar{d},\psi},$$

з якої, за умови (2.9), маємо

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{I}-\mathcal{R})^{-1}h\|_{\bar{d},\psi} &\le \|h\|_{\bar{d},\psi}\sum_{r=0}^{\infty}\Big(\frac{Kc_1|\varepsilon|}{\gamma}\Big)^r < \|h\|_{\bar{d},\psi}\sum_{r=0}^{\infty}\Big(\frac{Kc_1\varepsilon_0}{\gamma}\Big)^r \\ &= \|h\|_{\bar{d},\psi}\Big(1-\frac{Kc_1\varepsilon_0}{\gamma}\Big)^{-1} = \frac{\gamma}{\gamma-Kc_1\varepsilon_0}\|h\|_{\bar{d},\psi}.\end{aligned}$$

Повертаючись до оцінки норми оператора $\mathcal{L}_{N_q}^{-1}$, виводимо, що для будь-яких $d \le \bar{d} \le \bar{\bar{d}} - 2\eta$, $\psi \in \mathcal{M}$ і $(\vec{\varepsilon},\vec{a}) \in \mathcal{A}\Psi_q$ виконуються оцінки

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}_{N_q}^{-1}h\|_{\bar{d},\psi} &\le \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\gamma}{\gamma-Kc_1\varepsilon_0}\big\||\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}}h\big\|_{\bar{d}+\eta/2,\psi\psi_1^{1/2}} \\ &\le \frac{1}{\gamma}\frac{\gamma}{\gamma-Kc_1\varepsilon_0}\|h\|_{\bar{d}+\eta,\psi\psi_1} \le \frac{N_q^{\eta}\psi_1(N_q)}{\gamma-Kc_1\varepsilon_0}\|h\|_{\bar{d},\psi} \\ &= \frac{KN_q^{2\eta}}{\dfrac{\gamma}{2}-Kc_1\varepsilon_0+\dfrac{\gamma}{2}}\|h\|_{\bar{d},\psi} \le \frac{2K}{\gamma}N_q^{2\eta}\|h\|_{\bar{d},\psi}.\end{aligned}$$

□

## 3. Встановлення умов розв'язності задачі (2.1), (2.2)

Рекурентно визначимо послідовність функцій $\{u_q\}_{q\ge 0}$, $u_q \in \mathbf{W\Psi}^{(N_q)}$, заданих на множинах $\mathcal{A}\Psi_q$, яка збігатиметься до розв'язку $u \in \mathbf{H}_d^{\psi}$ задачі (2.1), (2.2) для всіх векторів $(\vec{\varepsilon},\vec{a})$ з множини $\mathcal{A}\Psi_\infty$ та покажемо, що множина $\mathcal{A}\Psi_\infty$ є досить великою у множині $\mathcal{O}_{\varepsilon_0} \times \mathcal{O}_A^{p+1}$ параметрів задачі та знайдемо оцінку знизу її міри.

**Теорема 3.1.** *Нехай виконуються властивості* $(P1)$–$(P5)$, $\beta{=}12\eta$, $\eta = (p+1-2n)/2$. *Тоді існує послідовність функцій* $\{u_q\}_{q\ge 0}$, *в якій* $u_q = \sum\limits_{i=0}^{q} h_i \in \mathbf{W\Psi}^{(N_q)}$ *є розв'язком рівняння*

$$Lu_q - \varepsilon \mathrm{P}_{N_q} f(u_q) = 0, \qquad (P_{N_q})$$

*що визначений для* $(\vec{\varepsilon}, \vec{a}) \in \mathcal{A}\Psi_q$*, причому* $\|h_i\|_{d,\psi} \le 4c_3 B_0 \dfrac{|\varepsilon|}{\gamma} N_i^{-2\eta}$ *для кожного* $i \in \mathbb{N}$*, а* $B_q \equiv 1 + \|u_q\|_{d+\beta,\psi} \le B_0 N_{q+1}^{2\eta}$ *для* $q \in \mathbb{N}$*, де* $B_0 \equiv 1 + \|u_0\|_{d+\beta,\psi} \le 1 + \dfrac{|\varepsilon|}{\gamma} 2Kc_0 N_0^{14\eta}$.

*Доведення.* Використаємо метод математичної індукції. За умови $(\vec{\varepsilon}, \vec{a}) \in \mathcal{A}\Psi_0$ знайдемо розв'язок рівняння

$$Lu - \varepsilon \mathrm{P}_{N_0} f(u) = 0. \qquad (P_{N_0})$$

Для довільної $w = \sum_{\breve{k} \le N_0} w_{\hat{k}} \varphi_{\hat{k}}$ існує оператор $L^{-1} \colon \mathbf{W\Psi}^{(N_0)} \to \mathbf{W\Psi}^{(N_0)}$, зокрема,

$$L^{-1} w = \sum_{\breve{k} \le N_0} \lambda_{\hat{k}}^{-1}\, w_{\hat{k}}\, \varphi_{\hat{k}} = \sum_{\breve{k} \le N_0} \frac{w_{\hat{k}}\ \varphi_{\hat{k}}}{L(\tau(k_0), k)},$$

тому з оцінки (2.7) випливає нерівність

$$\begin{aligned} \left\|L^{-1} w\right\|_{d,\psi}^2 &= \sum_{\breve{k} \le N_0} \breve{k}^{2d} \psi^2(\breve{k}) \frac{|w_{\hat{k}}|^2}{|L(\tau(k_0), k)|^2} \\ &\le \sum_{\breve{k} \le N_0} \frac{1}{\gamma^2} \breve{k}^{2d+2\eta} (\psi(\breve{k}) \psi_1(\breve{k}))^2 |w_{\hat{k}}|^2 = \frac{1}{\gamma^2} \|w\|_{d+\eta,\psi\psi_1}^2. \end{aligned}$$

Тоді (за формулою (2.5)) справедливими є оцінки

$$\begin{aligned} \left\|L^{-1} w\right\|_{d,\psi} &\le \frac{1}{\gamma} \|w\|_{d+\eta,\psi\psi_1} \le \frac{1}{\gamma} N_0^{\eta} \psi_1(N_0) \|w\|_{d,\psi} \\ &\le \frac{K}{\gamma} N_0^{2\eta} \|w\|_{d,\psi}. \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Рівняння $(P_{N_0})$ зводимо до вигляду $u = \varepsilon L^{-1} \mathrm{P}_{N_0} f(u)$.

**Зауваження 3.1.** Якщо $c_1 = 0$, то $f(u) = f(0)$ і $u = \varepsilon L^{-1} \mathrm{P}_{N_0} f(0)$ є єдиним розв'язком рівняння $(P_{N_0})$ для всіх векторів $(\vec{\varepsilon}, \vec{a}) \in \mathcal{A}\Psi_0$.

Позначимо через $H^0(u) = \varepsilon L^{-1} \mathrm{P}_{N_0} f(u)$ значення оператора $H^0 \colon \mathbf{W\Psi}^{(N_0)} \to \mathbf{W\Psi}^{(N_0)}$ на елементі $u \in \mathbf{W\Psi}^{(N_0)}$, тоді знаходження розв'язку рівняння $(P_{N_0})$ зводиться до відшукання нерухомої точки $u \in \mathbf{W\Psi}^{(N_0)}$ оператора $H^0$.

Покажемо, що оператор $H^0$ є стиском у кулі

$$G^0 = \{u \in \mathbf{W}\Psi^{(N_0)} \colon\ \|u\|_{d,\psi} \le \rho_0 = \frac{|\varepsilon|}{\gamma} 2Kc_0 N_0^{2\eta}\}$$

для кожного вектора $(\vec{\varepsilon}, \vec{a}) \in \mathcal{A}\Psi_0$.

Використаємо нерівність (3.1), властивість ($P2$) та формулу (2.9) для отримання оцінки

$$\|H^0(u)\|_{d,\psi} \leq K\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_0^{2\eta}\|f(u)\|_{d,\psi} \leq K\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_0^{2\eta}c_0(1+\|u\|_{d,\psi})$$
$$\leq K\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_0^{2\eta}c_0(1+\rho_0) = \frac{\rho_0}{2} + K\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_0^{2\eta}c_0\rho_0 \leq \frac{\rho_0}{2} + K\frac{\varepsilon_0}{\gamma}N_0^{2\eta}c_0\rho_0 \leq \rho_0.$$

Для довільних функцій $u,\ u' \in G^0$ виконується рівність

$$H^0(u) - H^0(u') = \varepsilon L^{-1}\mathrm{P}_{N_0}(f(u) - f(u')),$$

тоді, використовуючи нерівність (3.1), запишемо оцінку

$$\|H^0(u) - H^0(u')\|_{d,\psi} \leq K\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_0^{2\eta}\|f(u) - f(u')\|_{d,\psi}$$
$$\leq Kc_1\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_0^{2\eta}\|u-u'\|_{d,\psi} \leq Kc_1\frac{\varepsilon_0}{\gamma}N_0^{2\eta}\|u-u'\|_{d,\psi}.$$

Отже, враховуючи (2.9), відображення $H^0\colon \mathbf{W\Psi}^{(N_0)} \to \mathbf{W\Psi}^{(N_0)}$ є стиском у кулі $G^0$. Таким чином, $u = u_0 \in \mathbf{W\Psi}^{(N_0)}$ є єдиним розв'язком рівняння $(P_{N_0})$ і $B_0 \leq 1 + N_0^{\beta}\rho_0 = 1 + \dfrac{|\varepsilon|}{\gamma}2Kc_0N_0^{14\eta}$; нульовий крок індукції зроблено.

За індукцією будуємо наступні елементи послідовності $\{u_q\}_{q>0}$, для оцінки норми яких у просторі $\mathbf{H}^{\psi}_{d+\beta}$ використовуємо наступну лему, яка буде доведена далі.

**Лема 3.1.** *Для елементів послідовності* $\{u_q\}_{q\geq 0}$ *виконується*

$$B_{q+1} \leq (1 + N_{q+1}^{2\eta})B_q. \tag{3.2}$$

З нерівності (3.2) за індукцією отримаємо, що

$$B_q \leq B_0\prod_{i=1}^{q}(1 + N_i^{2\eta}) = B_0\prod_{i=1}^{q}\bigl(1 + (N_0^{2^i})^{2\eta}\bigr).$$

Оскільки $1 + (N_0^{2^i})^{2\eta} \leq (N_0^{2^i+2^{-i}})^{2\eta}$, то справджується нерівність

$$B_q \leq B_0\prod_{i=1}^{q}(N_0^{2^i+2^{-i}})^{2\eta} = B_0N_0^{\sum\limits_{i=1}^{q}2\eta(2^i+2^{-i})}$$
$$= B_0N_0^{2\eta2^{q+1}-2\eta+\sum\limits_{i=1}^{q}2\eta2^{-i}} \leq B_0N_{q+1}^{2\eta}.$$

Вважаючи відомими $u_0$, $u_1$, …, $u_q$, доведемо існування розв'язку $u_{q+1} \in \mathbf{W\Psi}^{(N_{q+1})}$ рівняння

$$Lu_{q+1} - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_{q+1}) = 0. \qquad (P_{N_{q+1}})$$

Оскільки $u_{q+1} = u_q + h_{q+1}$, то $h_{q+1} \in \mathbf{W\Psi}^{(N_{q+1})}$ і

$$B_{q+1} = 1 + \|u_{q+1}\|_{d+\beta,\psi} \leq B_0 N_{q+2}^{2\eta}.$$

Оцінимо доданок $h_{q+1}$ у просторі $\mathbf{H}_d^{\psi}$.

Для кожного $h \in \mathbf{W\Psi}^{(N_{q+1})}$ запишемо процедуру лінеризації лівої частини рівняння $(P_{N_{q+1}})$

$$\begin{aligned} L(u_q + h) - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q + h) = Lu_q - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q) + Lh \\ - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} \mathrm{D}_u f(u_q) h + \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} \mathrm{D}_u f(u_q) h + \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q) - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q + h) \\ = r_q + \mathcal{L}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u_q) h - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} (f(u_q + h) - f(u_q) - \mathrm{D}_u f(u_q) h) \\ = r_q + \mathcal{L}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u_q) h + R_q(h), \end{aligned}$$

де $r_q = Lu_q - \varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q)$, $R_q(h) = -\varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} (f(u_q + h) - f(u_q) - \mathrm{D}_u f(u_q) h)$, у підсумку якої $h_{q+1}$ є розв'язком у просторі $\mathbf{W\Psi}^{(N_{q+1})}$ рівняння

$$r_q + \mathcal{L}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u_q) h + R_q(h) = 0.$$

Оскільки $u_q$ є розв'язком рівняння $(P_{N_q})$, тобто $Lu_q = \varepsilon \mathrm{P}_{N_q} f(u_q)$, то

$$r_q = \varepsilon (\mathrm{P}_{N_q} - \mathrm{P}_{N_{q+1}}) f(u_q) = -\varepsilon \mathrm{P}_{N_q}^{\perp} \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q) \in \mathbf{W\Psi}^{(N_q)\perp} \cap \mathbf{W\Psi}^{(N_{q+1})}$$

і, використовуючи формулу (2.6) і властивість $(P2)$, отримаємо

$$\|r_q\|_{d,\psi} = |\varepsilon| N_q^{-\beta} \|\mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q)\|_{d+\beta,\psi} \leq |\varepsilon| c_0 N_q^{-\beta} B_q \leq |\varepsilon| c_0 B_0 N_q^{-\beta} N_{q+1}^{2\eta}.$$

Для оцінки норми $\|R_q(h)\|_{d,\psi}$ використаємо властивість $(P4)$ та одержимо

$$\|R_q(h)\|_{d,\psi} \leq 2c_2 |\varepsilon| \|h\|_{d,\psi}^2.$$

Оскільки для будь-яких функцій $h,\ h' \in \mathbf{W\Psi}^{(N_{q+1})}$

$$\begin{aligned} R_q(h) - R_q(h') \leq -\varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} (f(u_q + h) - f(u_q + h') - \mathrm{D}_u f(u_q)(h - h')) \\ = -\varepsilon \mathrm{P}_{N_{q+1}} (f(u_q + h' + (h - h')) - f(u_q + h') - \mathrm{D}_u f(u_q)(h - h')), \end{aligned}$$

то за властивістю $(P4)$ виконується наступна оцінка:

$$\begin{aligned}
\|R_q(h)-R_q(h')\|_{d,\psi} &\le |\varepsilon|\|f(u_q+h'+(h-h'))-f(u_q+h') \\
&- \mathrm{D}_u f(u_q)(h-h')\|_{d,\psi} \le |\varepsilon|\|f(u_q+h'+(h-h'))-f(u_q+h') \\
&- \mathrm{D}_u f(u_q+h')(h-h')+\mathrm{D}_u f(u_q+h')(h-h')-\mathrm{D}_u f(u_q)(h-h')\|_{d,\psi} \\
&\le |\varepsilon|(2c_2\|h-h'\|^2_{d,\psi}+c_1\|h-h'\|_{d,\psi}\|h'\|_{d,\psi}) \\
&\le \frac{1}{K}|\varepsilon|(2Kc_2\|h-h'\|_{d,\psi}(\|h\|_{d,\psi}+\|h'\|_{d,\psi})+Kc_1\|h-h'\|_{d,\psi}\|h'\|_{d,\psi}) \\
&\le \frac{c_3}{K}|\varepsilon|(\|h\|_{d,\psi}+2\|h'\|_{d,\psi})\|h-h'\|_{d,\psi}. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

За властивістю $(P5)$ оператор $\mathcal{L}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon},\vec{a},u_q)$ є оборотним для всіх векторів $(\vec{\varepsilon},\vec{a})\in\mathcal{A}\Psi_{q+1}$ та довільних функцій $u_q\in\mathbf{W\Psi}^{(N_q)}$ і

$$\|\mathcal{L}^{-1}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon},\vec{a},u_q)[h]\|_{d,\psi}\le\frac{2K}{\gamma}N^{2\eta}_{q+1}\|h\|_{d,\psi}.$$

Значення оператора $H_{q+1}\colon \mathbf{W\Psi}^{(N_{q+1})}\to\mathbf{W\Psi}^{(N_{q+1})}$ на елементі $h\in\mathbf{W\Psi}^{(N_{q+1})}$ позначимо $H_{q+1}(h)=-\mathcal{L}^{-1}_{N_{q+1}}(\vec{\varepsilon},\vec{a},u_q)\big(r_q+R_q(h)\big)$. Тоді розв'язування рівняння $(\mathrm{P}_{N_{q+1}})$ еквівалентне знаходженню нерухомої точки $h_{q+1}=h\in\mathbf{W\Psi}^{(N_{q+1})}$ оператора $H_{q+1}$, тобто розв'язування рівняння $h=H_{q+1}(h)$.

Сформулюємо лему 3.2, яка буде доведена у пункті 4.

**Лема 3.2.** *Для кожного вектора* $(\vec{\varepsilon},\vec{a})\in\mathcal{A}\Psi_{q+1}$ *оператор* $H_{q+1}$, $q\ge0$, *є стиском у кулі*

$$G_{q+1}=\{h\in\mathbf{W\Psi}^{(N_{q+1})}\colon\ \|h\|_{d,\psi}\le\rho_{q+1}=4c_3B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N^{-2\eta}_{q+1}\}.$$

З даної леми випливає існування для всіх $(\vec{\varepsilon},\vec{a})\in\mathcal{A}\Psi_{q+1}$ єдиного розв'язку $h_{q+1}\in\mathbf{W\Psi}^{(N_{q+1})}$ рівняння $h=H_{q+1}(h)$, для якого справедливо $\|h_{q+1}\|_{d,\psi}\le\rho_{q+1}=4c_3B_0\dfrac{|\varepsilon|}{\gamma}N^{-2\eta}_{q+1}$.

Таким чином, функція $u_{q+1}=u_q+h_{q+1}$ є розв'язком у просторі $\mathbf{W\Psi}^{(N_{q+1})}$ рівняння $(P_{N_{q+1}})$, який визначений для всіх векторів $(\vec{\varepsilon},\vec{a})\in\mathcal{A}\Psi_{q+1}\subseteq\mathcal{A}\Psi_0$ і $u_{q+1}=\sum\limits_{i=0}^{q+1}h_i$, де $h_i\in\mathbf{W\Psi}^{(N_i)}$, та виконується оцінка $\|h_i\|_d\le4c_3B_0\dfrac{|\varepsilon|}{\gamma}N_i^{-2\eta}$ для будь-якого $i=0,1,\dots,q+1$. □

Знайдемо міру множини $\mathcal{A}\Psi_\infty=\lim\limits_{q\to\infty}\mathcal{A}\Psi_q$, для елементів якої справджується теорема 3.1.

**Теорема 3.2.** *Множину* $\mathcal{A}\Psi_\infty$ *визначає формула* $\mathcal{A}\Psi_\infty = \bigcap\limits_{q\geq 0} \mathcal{A}\Psi_q$*; для її міри* $\operatorname{meas}\mathcal{A}\Psi_\infty$ *справедливою є оцінка*

$$\operatorname{meas}\mathcal{A}\Psi_\infty \geq \varepsilon_0^2 A^{2p+2}\pi^{p+2}\Big(1-\gamma^2\frac{4^{p+1}(p+1)\omega_1(2)}{A^2\pi^{p+1}}\Big).$$

*Доведення.* Оскільки $\mathcal{A}\Psi_q = \bigcap\limits_{l=0}^{q} \mathcal{A}\Psi_l$, то $\mathcal{A}\Psi_\infty = \lim\limits_{q\to\infty} \mathcal{A}\Psi_q = \bigcap\limits_{q=0}^{\infty} \mathcal{A}\Psi_q$.

Для оцінки міри $\operatorname{meas}\mathcal{A}\Psi_\infty$ множини $\mathcal{A}\Psi_\infty$ подамо многочлен $L(\tau(k_0),k)$ у вигляді суми $L(\tau(k_0),k)=L_1(\tau(k_0),k)+L_2(\tau(k_0),k)$, де

$$L_1(\tau(k_0),k) = a_{n,0,\ldots,0}\big(\tau(k_0)\big)^n + \sum_{i=1}^{p} a_{\hat{s}(j)}k_j^n = \sum_{j=1}^{2p+2} y_j(\varphi_j(\hat{k}) + i\ \xi_j(\hat{k})),$$

зокрема, $\operatorname{Re} L_1(\tau(k_0),k)=\sum\limits_{i=1}^{2p+2} y_j\varphi_j(\hat{k})$ та $\operatorname{Im} L_1(\tau(k_0),k)=\sum\limits_{i=1}^{2p+2} y_j\xi_j(\hat{k})$.

Зауважимо, що $\operatorname{meas}\mathcal{A}\Psi_\infty = \varepsilon_0^2 A^{2p+2}\pi^{p+2} - \operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}\Psi_\infty}$, де множини $\overline{\mathcal{A}\Psi_\infty} = \bigcup\limits_{q=0}^{\infty} \overline{\mathcal{A}\Psi_q}$, $\overline{\mathcal{A}\Psi_q} = \mathcal{O}_{\varepsilon_0} \times \overline{\mathcal{A}\Psi_q}$, а горизонтальна риска над множиною означає операцію доповнення у множині $\mathcal{O}_A^{p+1}$ або $\mathcal{O}_{\varepsilon_0} \times \mathcal{O}_A^{p+1}$. Знайдемо міру множини $\overline{\mathcal{A}\Psi_\infty}$, для чого оцінимо міру множини $\overline{\mathcal{A}\Psi_q} = \bigcup\limits_{\breve{k}\leq N_q} \overline{\mathcal{A}\Psi_q(\hat{k})}$, де $\overline{\mathcal{A}\Psi_q(\hat{k})}$ — множина векторів $\vec{a}$, для яких при фіксованому векторові $\hat{k}$ за умови $\breve{k}\leq N_q$ виконується

$$|L(\tau(k_0),k)| < \gamma\breve{k}^{-\eta}\psi_1^{-1}(\breve{k}).$$

Очевидно, що $\overline{\mathcal{A}\Psi_q(\hat{k})} \subset \overline{\mathcal{A}\Psi'_q(\hat{k})}$, де $\overline{\mathcal{A}\Psi'_q(\hat{k})}$ — множина тих векторів $\vec{a}$ для яких при фіксованому $\hat{k}$, такому, що $\breve{k}\leq N_q$, виконується хоча б одна з оцінок

$$|\operatorname{Re} L(\tau(k_0),k)| < \gamma\breve{k}^{-\eta}\psi_1^{-1}(\breve{k}), \qquad |\operatorname{Im} L(\tau(k_0),k)| < \gamma\breve{k}^{-\eta}\psi_1^{-1}(\breve{k}).$$

$\overline{\mathcal{A}\Psi'_q(\hat{k})}$ — це множина точок $\vec{a}$, які знаходяться між перпендикулярними гіперплощинами

$$\sum_{i=1}^{2p+2} y_j\varphi_j(\hat{k}) = \operatorname{Re} L_2(\tau(k_0),k) \pm \gamma\breve{k}^{-\eta}\psi_1^{-1}(\breve{k}),$$

$$\sum_{i=1}^{2p+2} y_j\xi_j(\hat{k}) = \operatorname{Im} L_2(\tau(k_0),k) \pm \gamma\breve{k}^{-\eta}\psi_1^{-1}(\breve{k}).$$

Для її міри можна отримати [2] оцінку $\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}\Psi'_q(\hat{k})} \leq d^{2p}\cdot S$, де $d$ — діаметр мінімальної кулі, що містить множину векторів $\vec{a}$, а число $S$ визначається формулою

$$S = \frac{4\gamma^2 \breve{k}^{-2\eta}\psi_1^{-2}(\breve{k})}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{2p+2}\varphi_j^2(\hat{k})\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum\limits_{i=1}^{2p+2}\xi_j^2(\hat{k})\Big)^{\frac{1}{2}}}.$$

Для $S$ і $d$ справедливими є нерівності $S \leq \dfrac{4(p+1)\gamma^2\breve{k}^{-2\eta}\psi_1^{-2}(\breve{k})}{(m^2+|k|^2)^n}$ і $d \leq 2A$ відповідно.

Таким чином, для міри множини $\overline{\mathcal{A}\Psi_q}$ можна записати оцінку

$$\begin{aligned}\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}\Psi_q} \leq \sum_{\breve{k}\leq N_q}\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}\Psi_q(\hat{k})} &\leq \sum_{\breve{k}\leq N_q}\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}\Psi'_q(\hat{k})}\\ &\leq 4d^{2p}(p+1)\gamma^2\sum_{\breve{k}\leq N_q}\breve{k}^{-2\eta-2n}\psi_1^{-2}(\breve{k})\\ \leq 4d^{2p}(p+1)\gamma^2 &\sum_{\hat{k}\in\mathbb{Z}^{p+1}}\breve{k}^{-(p+1)}\psi_1^{-2}(\breve{k}) = 4d^{2p}(p+1)\gamma^2\omega_1(2),\end{aligned}$$

де $\eta = (p+1-2n)/2$. Тоді $\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}\Psi_q} \leq 4d^{2p}(p+1)\gamma^2\omega_1(2)$ і

$$\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}\Psi_q} \leq 4\pi\varepsilon_0^2\omega_1(2)d^{2p}(p+1)\gamma^2.$$

Так, як $\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}\Psi_\infty} = \lim\limits_{q\to\infty}\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}\Psi_q}$, то

$$\operatorname{meas}\overline{\mathcal{A}\Psi_\infty} \leq 4\pi\varepsilon_0^2\omega_1(2)d^{2p}(p+1)\gamma^2.$$

Міра множини $\mathcal{A}\Psi_\infty$ має асимптотику

$$\operatorname{meas}\mathcal{A}\Psi_\infty \underset{\gamma\to 0}{=} \operatorname{meas}(\mathcal{O}_{\varepsilon_0}\times\mathcal{O}_A^{p+1}) + O(\gamma^2),$$

зокрема,

$$\begin{aligned}\operatorname{meas}\mathcal{A}\Psi_\infty &\geq \varepsilon_0^2A^{2p+2}\pi^{p+2} - 4\pi\varepsilon_0^2\omega_1(2)4^pA^{2p}(p+1)\gamma^2\\ &= \varepsilon_0^2A^{2p+2}\pi^{p+2}\Big(1-\gamma^2\frac{4^{p+1}(p+1)\omega_1(2)}{A^2\pi^{p+1}}\Big).\end{aligned}$$

□

**Теорема 3.3.** *Для довільного $\gamma > 0$ і натурального $N_0 \geq 2$ та всіх векторів $(\vec{\varepsilon},\vec{a}) \in \mathcal{A}\Psi_\infty$ ряд $\sum\limits_{i\geq 0} h_i$ є збіжним у просторі $\mathbf{H}_d^\psi$ до розв'язку $u$ задачі* (2.1), (2.2), *норма якого визначається нерівністю $\|u\|_{d,\psi} \leq \dfrac{8c_3B_0}{N_0^{2\eta}}\dfrac{|\varepsilon|}{\gamma}$.*

*Доведення.* За теоремою 3.1 для всіх $(\vec{\varepsilon}, \vec{a}) \in \mathcal{A}\Psi_\infty$ виконується

$$\sum_{i\geq 0} \|h_i\|_{d,\psi} \leq \sum_{i\geq 0} 4c_3 B_0 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N_i^{-2\eta}.$$

Тоді ряд $\sum\limits_{i\geq 0} h_i$ збігається у просторі $\mathbf{H}_d^\psi$ до деякої функції $u \in \mathbf{H}_d^\psi$, оскільки мажорантний ряд $\sum\limits_{i\geq 0} \|h_i\|_{d,\psi}$ є збіжним, зокрема,

$$\begin{aligned}\|u\|_{d,\psi} \leq \sum_{i\geq 0} \|h_i\|_{d,\psi} &\leq \sum_{i\geq 0} 4c_3 B_0 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N_i^{-2\eta} \\ &= 4c_3 B_0 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} \sum_{i\geq 0} (N_0^{2^i})^{-2\eta} = 4c_3 B_0 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} \frac{2}{N_0^{2\eta}} = \frac{8c_3 B_0}{N_0^{2\eta}} \frac{|\varepsilon|}{\gamma}.\end{aligned}$$

Покажемо, що $Lu = \varepsilon f(u)$. Функція $u_q$ є розв'яком рівняння $(P_{N_q})$, тоді

$$Lu_q \leq \varepsilon P_{N_q} f(u_q) = \varepsilon f(u_q) - \varepsilon P_{N_q}^{\perp} f(u_q). \tag{3.4}$$

З властивості (2.6) проектора $P_{N_q}^{\perp}$ у просторі $\mathbf{H}_d^\psi$, властивості $(P2)$ і оцінки для $B_q$ знайдемо

$$\begin{aligned}\|u\|_{d,\psi} \leq \sum_{i\geq 0} \|h_i\|_{d,\psi} &\leq \sum_{i\geq 0} 4c_3 B_0 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N_i^{-2\eta} \\ &= 4c_3 B_0 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} \sum_{i\geq 0} (N_0^{2^i})^{-2\eta} \leq 4c_3 B_0 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} \frac{2}{N_0^{2\eta}} = \frac{8c_3 B_0}{N_0^{2\eta}} \frac{|\varepsilon|}{\gamma}.\end{aligned}$$

Таким чином, $P_{N_q}^{\perp} f(u_q) \to 0$ при $q \to \infty$, далі з властивості $(P1)$ права частина (3.4) є збіжною до $\varepsilon f(u)$ у просторі $\mathbf{H}_d^\psi$, а з неперервності оператора $L$ маємо, що ліва частина (3.4) $Lu_q$ при $q \to \infty$ збігається до $Lu$ у сенсі розподілів. □

## 4. Доведення допоміжних лем

*Доведення леми 2.1.* Для всіх векторів $\vec{a} \in A\Psi_q$ оператор $|\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}}$ існує і оскільки $h = \sum\limits_{\breve{k}\leq N_q} e^{\tau(k_0)t}\, z^k\, h_{\hat{k}}$, то $|\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}} h = \sum\limits_{\breve{k}\leq N_q} \dfrac{h_{\hat{k}}\varphi_{\hat{k}}}{\sqrt{|L(\tau(k_0), k)|}}$, а з нерівності (2.7) випливає оцінка

$$\big\||\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}}h\big\|^2_{\bar d,\psi} = \sum_{\breve k\le N_q}\breve k^{2\bar d}\psi^2(\breve k)\frac{|h_{\hat k}|^2}{|L(\tau(k_0),k)|}$$
$$\le \sum_{\breve k\le N_q}\frac{1}{\gamma}\breve k^{2\bar d+\eta}\psi^2(\breve k)\psi_1(\breve k)|h_{\hat k}|^2 = \frac{1}{\gamma}\|h\|^2_{\bar d+\eta/2,\psi\psi_1^{1/2}}.$$

Використавши нерівності (2.5) і (2.8), отримуємо

$$\big\||\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}}h\big\|_{\bar d,\psi} \le \frac{1}{\sqrt{\gamma}}N_q^{\eta/2}\psi_1^{1/2}(N_q)\|h\|_{\bar d,\psi} \le \sqrt{\frac{K}{\gamma}}N_q^{\eta}\|h\|_{\bar d,\psi}.$$

□

*Доведення леми 2.2.* Оскільки $\mathcal{U} = |\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{D}|\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}}$, то його дію на функцію $h\in\mathbf{H}^{\psi}_{\bar d}$ задає формула $\mathcal{U}h = \sum\limits_{\hat k\in\mathbb{Z}^{p+1}}\dfrac{\lambda_{\hat k}}{|\lambda_{\hat k}|}\,h_{\hat k}\,\varphi_{\hat k}$, де $\lambda_{\hat k}$ — власні значення оператора $\mathfrak{D}$. Використавши означення простору $\mathbf{H}^{\psi}_{\bar d}$ і норми у цьому просторі, отримаємо, що $\|\mathcal{U}^{-1}h\|_{\bar d,\psi} = \|h\|_{\bar d,\psi}$. □

*Доведення леми 2.3.* Оскільки $\mathcal{R}_1 h = \varepsilon|\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{P}_{N_q}(D_u f|\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}}h)$, то, згідно з лемою 2.1, нерівностями (2.5) та (2.8), отримаємо

$$\|\mathcal{R}_1 h\|_{\bar d,\psi} \le |\varepsilon|\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\|\mathrm{P}_{N_q}\mathrm{D}_u f|\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}}h\|_{\bar d+\eta/2,\psi\psi_1^{1/2}}$$
$$\le\frac{|\varepsilon|}{\sqrt{\gamma}}N_q^{-3\eta/2}\|\mathrm{D}_u f|\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}}h\|_{\bar d+2\eta,\psi\psi_1^{1/2}}\le\frac{|\varepsilon|}{\sqrt{\gamma}}N_q^{-3\eta/2}c_1\||\mathfrak{D}|^{-\frac{1}{2}}h\|_{\bar d,\psi\psi_1^{1/2}}$$
$$\le c_1\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_q^{-3\eta/2}\|h\|_{\bar d+\eta/2,\psi\psi_1} \le c_1\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_q^{-3\eta/2}N_q^{\eta/2}\psi_1(N_q)\|h\|_{\bar d,\psi}$$
$$\le c_1\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_q^{-\eta}KN_q^{\eta}\|h\|_{\bar d,\psi} \le Kc_1\frac{|\varepsilon|}{\gamma}\|h\|_{\bar d,\psi}.$$

□

*Доведення леми 3.1.* Оскільки $u_{q+1} = u_q + h_{q+1}$ і $h_{q+1}\in G_{q+1}$, то

$$B_{q+1}{=}1+\|u_{q+1}\|_{d+\beta,\psi}{\le}1+\|u_q\|_{d+\beta,\psi}+\|h_{q+1}\|_{d+\beta,\psi}{=}B_q+\|h_{q+1}\|_{d+\beta,\psi}.$$

Для норми функції $h_{q+1} = -\mathcal{L}^{-1}_{N_{q+1}}(\vec\varepsilon,\vec a,u_q)\big(r_q + R_q(h_{q+1})\big)$ у просторі $\mathbf{H}^{\psi}_{d+\beta}$ справедливою є оцінка

$$\|h_{q+1}\|_{d+\beta,\psi} \le \frac{2K}{\gamma}N^{2\eta}_{q+1}\big(\|r_q\|_{d+\beta,\psi} + \|R_q(h_{q+1})\|_{d+\beta,\psi}\big). \qquad (4.1)$$

Оскільки $r_q = -\varepsilon \mathrm{P}^{\perp}_{N_q} \mathrm{P}_{N_{q+1}} f(u_q)$, то, використовуючи $(P2)$, запишемо оцінку для норми $\|r_q\|_{d+\beta,\psi}$ наступним чином:

$$\|r_q\|_{d+\beta,\psi} \le |\varepsilon| \|f(u_q)\|_{d+\beta,\psi} \le |\varepsilon| c_0 (1 + \|u_q\|_{d+\beta,\psi}) = |\varepsilon| c_0 B_q. \quad (4.2)$$

Для оцінки величини $\|R_q(h_{q+1})\|_{d+\beta,\psi}$ застосуємо лему 3.2 і властивість $(P4)$ та отримаємо

$$\begin{aligned} \|R_q(h_{q+1})\|_{d+\beta,\psi} &\le |\varepsilon| c_2 \big(\|u_q\|_{d+\beta,\psi} \|h_{q+1}\|^2_{d,\psi} + \|h_{q+1}\|_{d,\psi} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,\psi}\big) \\ &\le |\varepsilon| c_2 \big(B_q \rho^2_{q+1} + \rho_{q+1} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,\psi}\big). \quad (4.3) \end{aligned}$$

Підставивши оцінки (4.2) і (4.3) у нерівність (4.1), одержимо

$$\begin{aligned} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,\psi} &\le \frac{2K}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} \big(|\varepsilon| c_0 B_q + |\varepsilon| c_2 (B_q \rho^2_{q+1} + \rho_{q+1} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,\psi})\big) \\ &= 2Kc_0 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} B_q + 2Kc_2 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} \rho^2_{q+1} B_q + 2Kc_2 \frac{|\varepsilon|}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} \rho_{q+1} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,\psi} \\ &< 2Kc_0 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} B_q + 2Kc_2 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} \rho^2_{q+1} B_q + 2Kc_2 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} \rho_{q+1} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,\psi} \\ &< 2c_3 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} B_q + c_3 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} \rho^2_{q+1} B_q + c_3 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} \rho_{q+1} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,\psi}. \end{aligned}$$

Враховуючи лему 3.2 та рівність (2.9), отримаємо наступну оцінку:

$$\begin{aligned} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,\psi} &\le 2c_3 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} B_q + \frac{\rho_{q+1}}{4} B_q + \frac{1}{4} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,\psi} \\ &< 2c_3 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} B_q + c_3 B_0 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{-2\eta}_{q+1} B_q + \frac{1}{4} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,\psi} \\ &= 2c_3 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} B_q (N^{2\eta}_{q+1} + \frac{1}{2} B_0 N^{-2\eta}_{q+1}) + \frac{1}{4} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,\psi} \\ &\le 4c_3 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} B_q + \frac{1}{4} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,\psi}. \end{aligned}$$

Тоді $\frac{3}{4} \|h_{q+1}\|_{d+\beta,\psi} \le 4c_3 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} B_q$, звідки з (2.9) випливає

$$\|h_{q+1}\|_{d+\beta,\psi} \le \frac{16}{3} c_3 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} N^{2\eta}_{q+1} B_q \le N^{2\eta}_{q+1} B_q.$$

Отже, $B_{q+1} \le B_q + N^{2\eta}_{q+1} B_q = (1 + N^{2\eta}_{q+1}) B_q$, що і треба було довести. □

*Доведення леми 3.2.* За властивістю ($P5$) для довільної $h \in G_{q+1}$ маємо

$$\|H_{q+1}(h)\|_{d,\psi} \le \frac{2K}{\gamma} N_{q+1}^{2\eta}\big(\|r_q\|_{d,\psi} + \|R_q(h)\|_{d,\psi}\big)$$
$$\le 2Kc_0B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{2\eta}N_q^{-\beta}N_{q+1}^{2\eta} + 4Kc_2\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{2\eta}\|h\|_{d,\psi}^2.$$

Враховуючи значення $\beta$, рівність $N_{q+1} = N_q^2$ та формулу (2.9), запишемо нерівність

$$\|H_{q+1}(h)\|_{d,\psi} \le 2Kc_0B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{-2\eta} + 4Kc_2\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{2\eta}\rho_{q+1}^2$$
$$\le 2c_3B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{-2\eta} + 2c_3\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{2\eta}\rho_{q+1}^2 \le \frac{\rho_{q+1}}{2} + 8B_0\Big(c_3\frac{|\varepsilon|}{\gamma}\Big)^2\rho_{q+1}$$
$$\le \frac{\rho_{q+1}}{2} + 8B_0\Big(c_3\frac{\varepsilon_0}{\gamma}\Big)^2\rho_{q+1} \le \rho_{q+1},$$

тому оператор $H_{q+1}$ відображає $G_{q+1}$ в себе.

Для довільних функцій $h$ і $h'$ з кулі $G_{q+1}$ виконується рівність

$$H_{q+1}(h) - H_{q+1}(h') = -\mathcal{L}_{N_{q+1}}^{-1}(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u_q)\big(R_q(h) - R_q(h')\big).$$

Використаємо нерівність (3.3) та запишемо наступну оцінку:

$$\|H_{q+1}(h) - H_{q+1}(h')\|_{d,\psi} \le \frac{2K}{\gamma}N_{q+1}^{2\eta}\big\|R_q(h) - R_q(h')\big\|_{d,\psi}$$
$$\le 2c_3\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{2\eta}(\|h\|_{d,\psi} + 2\|h'\|_{d,\psi})\|h - h'\|_{d,\psi}$$
$$\le 2c_3\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{2\eta}12c_3B_0\frac{|\varepsilon|}{\gamma}N_{q+1}^{-2\eta}\|h - h'\|_{d,\psi}$$
$$\le 24B_0\Big(c_3\frac{|\varepsilon|}{\gamma}\Big)^2\|h - h'\|_{d,\psi} < 24B_0\Big(c_3\frac{\varepsilon_0}{\gamma}\Big)^2\|h - h'\|_{d,\psi}.$$

З формули (2.9) випливає, що $24B_0\Big(c_3\dfrac{\varepsilon_0}{\gamma}\Big)^2 < 1$, тобто оператор $H_{q+1}$ є стиском. □

## Висновки

У роботі досліджено розв'язність двоточкової нелокальної крайової задачі для диференціально-операторного рівняння зі слабко нелінійною правою частиною у гільбертових просторах Хермандера, що утворюють уточнену соболєвську шкалу просторів функцій багатьох комплексних змінних. Доведення теорем проведено за допомогою ітераційної схеми Неша–Мозера. Важливу роль у даній схемі відіграє оборотність лінеризованих операторів, які виникають на кожному кроці цієї схеми, та пов'язана з цим проблема малих знаменників. Саме тому розв'язок $u \in \mathbf{H}_d^{\psi}$ даної задачі знайдено не на множині всіх параметрів $(\vec{\varepsilon}, \vec{a})$ задачі (2.1), (2.2), а на множині $\mathcal{A}\Psi_\infty$ тих векторів $(\vec{\varepsilon}, \vec{a})$, для яких власні значення операторів $\mathcal{L}_N(\vec{\varepsilon}, \vec{a}, u)$, $N \in \mathbb{N}$, не є надто близькими до нуля.

## Література


[1] Б. Й. Пташник, *Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными,* К.: Наукова думка, 1984, 264 с.

[2] Б. Й. Пташник, В. С. Ільків, І. Я. Кміть, В. М. Поліщук, *Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними*, К.: Наукова думка, 2002, 416 с.

[3] P. W. Eloea, B. Ahmadb, *Positive solutions of a nonlinear nth order boundary value problem with nonlocal conditions* // J. Applied Mathematics Letters, **18** (2005), No. 5, 521–527.

[4] G. L. Karakostas, P. Ch. Tsamatos, *Existence results for some n-dimensional nonlocal boundary value problems* // J. Math. Anal. Appl, **259** (2001), 429–438.

[5] V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *Extended Sobolev scale and elliptic operators* // Ukrainian Math. J, **65** (2013), No. 3, 435–447.

[6] V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems,* Berlin, Boston: De Gruyter, 2014, 297 p.

[7] В. С. Ільків, Н. І. Страп, *Про розв'язність нелокальної крайової задачі для диференціально-операторного рівняння в уточненій соболевській шкалі* // Збірник праць Ін-ту математики НАН України, **10** (2013), No. 2, 1–23.

[8] В. С. Ільків, Н. І. Страп, *Розв'язність нелокальної крайової задачі для системи диференціально-операторних рівнянь у шкалі просторів Соболева та уточненій шкалі* // Укр. матем. журнал, **67** (2014), No. 5, 611–624.

[9] M. Berti, P. Bolle, *Cantor families of periodic solutions for completely resonant nonlinear wave equations* // Duke Math. J., **134** (2006), No. 2, 359–419.

[10] M. Berti, P. Bolle, *Cantor families of periodic solutions of wave equations with $C^k$ nonlinearities* // Nonlinear Differential Equations and Applications, **15** (2008), 247–276.

[11] M. Berti, P. Bolle, *Sobolev Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations in Higher Spatial Dimensions* // Arch. Rational Mech. Anal., **195** (2010), No. 2, 609–642.

## Відомості про авторів

**Володимир Степанович Ільків** — Національний університет “Львівська політехніка”
*E-Mail:* ilkivv@i.ua

**Наталія Ігорівна Страп** — n.strap@i.ua